
大粒径浮遊液滴の界面大変形と 内部流動挙動に関する研究

(研究課題番号： 16360097)

平成 16^{年度}～平成 17^{年度}科学研究費補助金
(基盤研究(B))研究成果報告書

平成 18 年 3 月

研究代表者 阿部 豊

筑波大学システム情報工学研究科教授

大粒径浮遊液滴の界面大変形と 内部流動挙動に関する研究

(研究課題番号： 16360097)

平成 16年度～平成 17年度科学研究費補助金
(基盤研究(B)) 研究成果報告書

平成 18 年 3 月

研究代表者 阿部 豊

筑波大学システム情報工学研究科教授

寄贈
阿部
豊
氏

06003686

<はしがき>

本研究においては、大型浮遊液滴の界面大変形と内部流動挙動を調べるために、浮遊静電浮遊を用いた浮遊実験（宇宙航空研究開発機構・松本聡）ならびに超音波浮遊技術を用いた液滴浮遊実験（筑波大学・阿部豊）を行うとともに、液滴界面の非線形を含む大変形挙動に関する理論解析（東京大学・西成活裕）を行うとともに浮遊液滴の界面大変形挙動を内部流動挙動に関する3次元非定常の数値解析（日本原子力研究所・渡辺正）を、互いに強く連携しつつ実施した。その結果、[1] 静電浮遊炉を用いた実験によって、浮遊液滴の界面振動挙動に及ぼす液滴回転や内部流動の影響を明らかにした。また、[2] 超音波浮遊実験によって、大型浮遊液滴の内部に複雑な渦を有する内部流れの発生する場合のあることを通常重力環境と微小重力環境の両方において確認することができた。浮遊液滴の界面変形に対しては、保持力との関係で扁平形状になるなど重力の影響が大きく関与しており、重力の有無が内部流動挙動に影響を及ぼす可能性が示された。[3] 理論解析においては、浮遊液滴の大変形運動を近似無しで扱える基礎理論式が完成し、その線形解析が完了した。その結果、従来から知られているラムの振動数に一致することが確認された。この基礎式は、近年発達してきたソリトン理論と微分幾何学とを用いたものであり、どのような変形状態でも原理的に記述できる新しい枠組みである。[4] 浮遊液滴の界面変形と内部流動を多次的に評価・検討するための三次元数値計算コードを作成し、実験結果と良く一致する結果を得ることができた。

研究組織

研究代表者： 阿部 豊 （筑波大学システム情報工学研究科 教授）
 研究分担者： 松本 聡 （宇宙航空研究開発機構 宇宙科学研究本部 研究員）
 研究分担者： 西成 活裕 （東京大学工学系研究科 助教授）
 研究分担者： 渡辺 正 （日本原子力研究開発機構 システム計算科学センター 研究主幹）

交付決定額（配分額）

（金額単位：万円）

	直接経費	間接経費	合 計
平成 16 年度	8,900 万円	0 円	8,900 万円
平成 17 年度	4,200 万円	0 円	4,200 万円
総 計	13,100 万円	0 円	13,100 万円

研究発表

(1) 学会誌等

- ① Kazuyoshi AOKI, Shogo YAMADA, Masahiro KAWAJI, Yutaka ABE:
Study on Characteristic of Droplet Levitation by Ultrasonic Wave,
Abstract of the 5th International Conference on Multiphase Flow, pp.120,
2004.
- ② Shogo YAMADA, Kazuyoshi AOKI, Masahiro KAWAJI, Yutaka ABE:
Study on Levitated Droplet Surface Behavior by Ultrasonic Wave,
Abstract of the 5th International Conference on Multiphase Flow, pp.121,
2004.
- ③ 阿部豊, 青木一義: 超音波を用いた浮遊液滴制御に関する研究, 日本機械学
会論文集 B 編, 70 巻、692 号(2004-4), pp. 242-247.
- ④ Yutaka ABE, Daisuke HYUGA, Shogo YAMADA, Kazuyoshi AOKI: Study
on Internal Flow and Surface Deformation of Large Levitated by
Ultrasonic Wave, Proceedings of the Interdisciplinary Transport
Phenomena in Microgravity and Space Sciences Conference IV ,
pp.1-27-1-32, 2005.
- ⑤ S. Matsumoto, S. Awazu, T. Ishikawa, S. Yoda, T. Watanabe, Y. Abe:
Effect of Amplitude on Frequency in Oscillating Liquid Drop, Bulletin of
the American Physical Society, Program of 58th Annual Meeting of the
Division of Fluid Dynamics, Vol. 50, No. 9, pp.130, 2005.
- ⑥ K. Nishinari, Y. Okada, A. Schadschneider and D. Chowdhury:
Intra-cellular transport of single-headed molecular motors KIF1A, Phys.
Rev. Lett., 95, pp. 118101, 2005.
- ⑦ M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro: A stochastic optimal velocity
model and its long-lived metastability, Phys. Rev. E, 72, pp. 035102(R),
2005
- ⑧ Y. Abe, D. Hyuga, S. Yamada, K. Aoki: Study on Internal Flow and
Surface Deformation of Large Droplet Levitated by Ultrasonic Wave, The
New York Academy of Sciences, 2005.
- ⑨ H. Onodera, S. Matsumoto, T. Ishikawa, P.-F. Paradis, S. Yoda, K.
Wakashima, Study on Non-Linear Behavior of Liquid Drop Oscillation,
AIAA, 2005-0723, pp.1-7, 2005.

(2) 口頭発表

- ① 山田章吾, 青木一義, 阿部豊: 超音波を利用した過冷却凝固に関する研究,
関東学生会第 42 回学生員卒業研究発表講演前刷集, pp. 175-176, 2003.

- ②青木一義, 山田章吾, 阿部豊: 超音波による物体保持ならびに非接触での物性測定に関する研究, 日本機械学会関東支部第 9 期総会講演会講演論文集, pp. 483-484, 2003.
- ③阿部豊, 青木一義, 山田章吾: 超音波を用いた流体制御に関する研究, 日本混相流学会年会講演会 2003 講演論文集, pp. 171-174, 2003.
- ④阿部豊, 青木一義, 山田章吾: 超音波を利用した過冷却凝固に関する研究, 日本混相流学会年会講演会 2003 講演論文集, pp. 175-176, 2003.
- ⑤青木一義, 山田章吾, 川路正裕, 阿部豊: 超音波による液滴浮遊の特性に関する研究, 日本マイクログラビティ応用学会 第19回学術講演会講演論文集, pp. 12, 2003.
- ⑥山田章吾, 青木一義, 川路正裕, 阿部豊: 超音波による浮遊液滴の界面挙動に関する研究, 日本マイクログラビティ応用学会 第19回学術講演会講演論文集, pp. 13, 2003.
- ⑦阿部豊: 音場による流体制御のための超音波発生システム, 日本マイクログラビティ応用学会誌 Vol. 20, pp. 212-217, 2003.
- ⑧山田章吾, 青木一義, 阿部豊, 川路正裕, 西成活裕: 超音波による浮遊液滴の界面変形挙動に関する研究, 日本機械学会関東支部第10期総会講演会講演論文集, pp. 605-606, 2004.
- ⑨青木一義, 山田章吾, 川路正裕, 阿部豊: 音響定在波中の浮遊液滴に働く物体保持力に関する研究, 日本混相流学会年会講演会 2004 講演論文集, pp. 193-196, 2004.
- ⑩山田章吾 青木一義, 阿部豊, 川路正裕, 西成活裕: 超音波による浮遊液滴の界面変形挙動に関する研究, 日本混相流学会年会講演会 2004 講演論文集, pp. 197-198, 2004.
- ⑪小野寺博樹, 松本聡, 小宮敦樹, 石川毅彦, Paul-Francois Paradis, 依田眞一, 若島健司: 液滴振動法による表面張力測定における振幅の影響、第 41 回日本伝熱シンポジウム講演論文集、Vol.1, pp. 73-74, 2004.
- ⑫小野寺博樹, 松本聡, 石川毅彦, Paul-Francois Paradis, 依田眞一, 若島健司: 液滴振動法による物性計測に及ぼす液滴挙動の影響, 日本機械学会熱工学コンファレンス 2004 講演論文集, pp. 371-372, 2004.
- ⑬阿部豊, 山田章吾, 日向大輔, 川路正裕: 大粒径浮遊液滴の界面変形と内部流動に関する研究, 宇宙利用シンポジウム (第 21 回), pp. 113-116, 2005.
- ⑭日向大輔, 山田章吾, 阿部豊: 超音波による大粒径液滴の浮遊に関する研究, 関東学生会第 44 回学生員卒業研究発表講演前刷集, pp. 5-6, 2005.
- ⑮阿部豊, 日向大輔, 山田章吾, 青木一義: 微小重力環境下における大粒径液滴の超音波浮遊に関する研究, 日本混相流学会年会講演会 2005 講演論文集, pp. 161-164, 2005.

- ⑯阿部豊, 日向大輔, 山田章吾, 青木一義: 音場浮遊のための超音波変動場の数値解析, 第 18 回計算力学講演会講演論文集, pp. 405-406, 2005.
- ⑰青木一義, 阿部豊: 超音波変動場中の浮遊液滴に働く力解析, 第 18 回計算力学講演会講演論文集, pp. 407-408, 2005.
- ⑱阿部豊, 山本憲一, 中谷文人, 足立和成, 音響定在波による気泡制御手法に関する研究, 日本機械学会論文集 B 編, 71 巻, 705 号 (2005-5), pp. 1293-1300.
- ⑲松本聡, 小野寺博樹, 石川毅彦, 依田眞一, 若島健司: 浮遊液滴の振動挙動に関する研究, 第 21 回宇宙利用シンポジウム講演論文集, Vol. 21, pp. 121-123, 2005.
- ⑳阿部豊, 日向大輔, 栗津茂, 松本聡, 西成活裕, 榎勇作, 渡辺正: 浮遊液滴非線形ダイナミクスワーキンググループ活動報告, 宇宙利用シンポジウム (第 22 回), pp. 59-62, 2006.
- ㉑栗津茂, 松本聡, 阿部豊: 静電浮遊液滴の大振幅振動挙動に関する研究, 日本機械学会関東学生会第 45 回学生員卒業研究発表講演前刷集, pp. 291-292, 2006.
- ㉒日向大輔, 栗津茂, 阿部豊: 大粒径浮遊液滴の流動挙動に関する研究, 日本機械学会関東支部第 12 期総会講演会講演論文集, pp. 149-150, 2006.

目次

第1章 序論

1-1 研究の背景	P1
1-2 従来の研究	P2
1-3 研究の目的	P2

第2章 静電浮遊実験

2-1 はじめに	P4
2-2 理論	
2-2-1 浮遊による物性測定	
2-2-1-1 物性値算出式	P5
2-2-1-2 静電浮遊による表面電荷影響補正	P8
2-2-1-3 重力影響補正	P9
2-2-2 液滴の振動振幅と共振周波数シフトの関係	P10
2-3 浮遊実験	
2-3-1 実験概要	P10
2-3-2 実験方法	
2-3-2-1 静電浮遊の原理	P10
2-3-2-2 液滴振動の励起	P11
2-3-2-3 液滴回転の励起	P11
2-3-3 実験装置	P12
2-4 実験結果および考察	
2-4-1 試験流体の選定	P13
2-4-2 表面張力の測定	
2-4-2-1 実験概要	P14
2-4-2-2 実験結果	P15
2-4-3 振幅増加による液滴振動への影響	
2-4-3-1 実験概要	P16
2-4-3-2 印加外力の増加に伴う振動振幅の変化	P16
2-4-3-3 小振幅液滴振動	P18
2-4-3-4 大振幅液滴振動	P19
2-4-3-5 液滴振動の変化速度の推移	P21
2-4-4 振動振幅と共振周波数との関係	P21
2-4-5 回転による液滴振動への影響	
2-4-5-1 実験概要	P23
2-4-5-2 回転の計測方法	P23

2-4-5-3	液滴の回転による液滴振動への影響	P24
2-5	バネ・マス・ダンパー系による数値計算	
2-5-1	数値計算概要	P26
2-5-2	計算結果	P26
2-6	まとめ	P28
	参考文献	P29
第3章	超音波浮遊実験	
3-1	はじめに	P31
3-2	実験装置	P32
3-3	地上実験結果	P34
3-4	微小重力実験結果	
3-4-1	実験の概要	P38
3-4-2	手動注入実験結果	P39
3-4-3	固定注入実験結果	P43
3-5	まとめ	P50
	参考文献	P50
第4章	理論解析	
4-1	はじめに	
4-1-1	概要	P53
4-1-2	研究の背景	P54
4-2	曲面の微分幾何	
4-2-1	序	P54
4-2-2	空間内の曲面の概念	P54
4-2-3	曲面のパラメータ表示例	P56
4-2-4	基本形式	P58
4-2-5	曲面における曲率	P63
4-3	球面調和関数	
4-3-1	球調和関数	P67
4-3-2	球面調和関数の直交性	P69
4-3-3	楕円体調和関数	P70
4-4	表面波	
4-4-1	序	P73
4-4-2	ラプラスの式	P74
4-4-3	表面張力波	P77
4-4-4	表面張力波の固有振動数	P78

4-5	浮遊液滴の形状	
4-5-1	序	P79
4-5-2	支配方程式	P80
4-5-3	表面での境界条件	P82
4-5-4	表面のパラメータ表示方法	P83
4-5-5	回転する液滴形状の厳密解	P86
4-5-6	数値シミュレーション	P87
4-5-7	水滴の形状変化	P89
4-5-8	エチレングリコール液滴の形状変化	P96
4-5-9	プロピレンカーボネートの形状変化	P104
4-5-10	考察	P113
4-6	まとめ	
4-6-1	考察	P113
4-6-2	今後の課題	P115
第5章	数値解析	
5-1	解析手法	P117
5-2	解析結果	
5-2-1	振幅の減衰と周波数	P118
5-2-2	振動周波数への振幅及び回転の影響	P119
5-2-3	実験結果との比較	P119
5-3	並列化による高速化	P120
5-4	まとめ	P120
	参考文献	P120
第6章	結論	P127

第1章 序論

1-1 研究の背景

純度の高い熔融液体を、非常にゆっくり冷却させた場合（徐冷）、図 1-1 に示すように核の発生が抑制されて、熔融物は凝固点温度以下でも凝固しない過冷却現象が発生する。過冷却以下に冷却された熔融液体は、一旦核生成が始まると極めて速い速度で均質に凝固し、均質で高品位の結晶が合成できることが期待されている。一方、熔融液体を空中に保持する無容器状態で冷却する場合、やはり図 1-1 に示すように、核の発生が抑制され、急速冷却であっても過冷却状態が達成される可能性がある。このような過冷却凝固の場合の核生成には、いまだ未知の部分があり、無容器での過冷却状態からの核形成によって、新たな機能を有する新材料の創生が期待されている。また、非接触無容器状態においては、異物の混入など容器からの影響を排除できることから、高温環境下での高精度物性測定などこれまでにできなかった計測が可能となり、既存材料の高度利用などに対する寄与についても大きく期待されている。

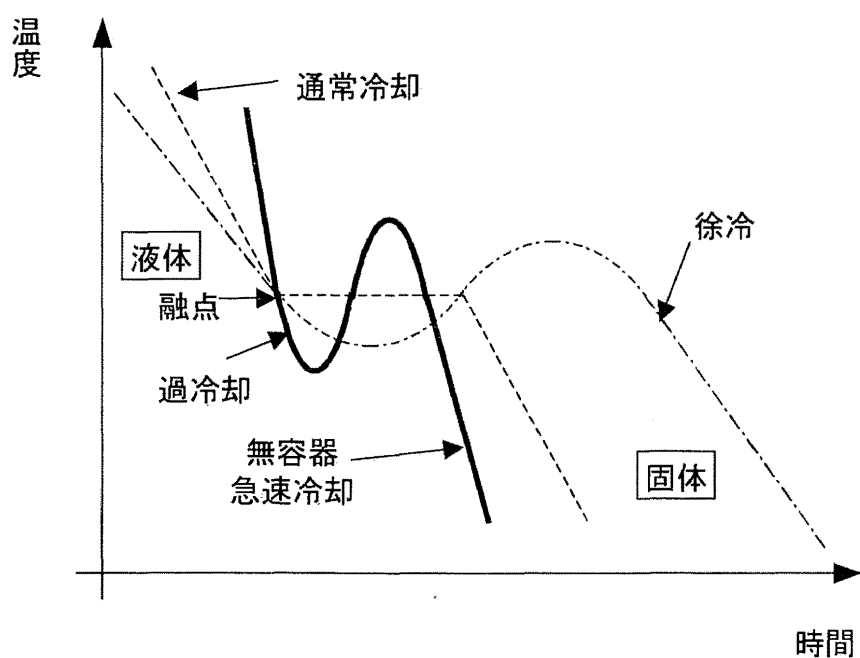


図 1-1 熔融物の冷却曲線

1-2 従来の研究

材料プロセス研究のうち、核形成の問題は、国内外の関連する研究において最も研究の進んでいない分野であるとされている。特に浮遊液滴における核形成は新材料創生のための極めて有望な手段とされているものの、核形成に及ぼす自由界面の形状挙動の影響やそれに伴う内部流れの影響の評価、さらにはそれらを制御する手法はいまだ確立されていない

すなわち、無容器で浮遊状態にある過冷却液滴の均質核生成に関しては、過冷却状態からの核生成における熔融液体内部での流動挙動が何らかの影響を与えている可能性があり、またそのような熔融液体内部での流動に液滴状の液相と気相間の界面変形が関連している可能性も指摘されているものの、現時点においては、そのような浮遊液滴の過冷却凝固に及ぼす気液界面変形の影響については、実験的にも解析的にも明らかにされていないのが現状である。

また、通常重力環境下において熔融液体を無容器状態で保持するためには、静電場や超音波などの何らかの非接触保持力を使用することが必要不可欠である。また、非接触で浮遊状態となった熔融液体は表面張力の影響により球形液滴となり、その表面は自由界面として振舞うことになる。このような浮遊液滴の自由界面としての変形挙動やそれに伴って誘起される内部流動や外部の流れ場の影響などは、過冷却状態の達成や高精度物性測定などに大きな影響を与える可能性がある。さらに、特に大粒径の浮遊液滴の場合には、線形な変形挙動だけでなく非線形な大変形を伴う可能性がある。現在のところ、このような非線形な界面変形を含む大粒径浮遊液滴の自由界面の変形挙動ならびにそれに連動する液滴内部ならびに外部の流動挙動を関連させた実験ならびに解析的な研究は行われてきていない。

1-3 研究の目的

本研究の目的は、まず、申請者らが独自に開発してきている静電浮遊場を用いた高温熔融金属液滴浮遊システムを用いて浮遊液滴に対する外部変形挙動や物性値測定を通して浮遊液滴の変形挙動に関する実験情報を収集するとともに、やはり独自に開発してきている強力超音波を用いた液滴浮遊システムを用いて空中に浮遊させた透明な大粒径液滴の変形挙動や内部ならびに外部流動挙動を可視的に観察測定し、大粒径の浮遊液滴の界面変形挙動と内部および外部流動に関する実験情報を収集する。同時に、界面変形に関する理論的な検討を行うことによって大粒径浮遊液滴の非線形な界面変形挙動を記述するための理論体系の構築を目指すとともに、大粒径浮遊液滴の界面変形と液滴内外の流動に関する数値解析を行うための多次元で非定常な界面変形ならびに液滴内部流動挙動の詳細解析を行うための数

値解析コードを開発整備することとする。これらの実験結果ならびに解析手段を整備構築することによって得られた結果を総合的に評価検討することによって最終的には、空間に無容器状態で浮遊させた大粒径液滴の界面変形と流動との関係を明らかにするための知見を蓄積することとしている。

本研究から得られる知見は、将来的に、過冷却凝固を用いた新材料の創生や既存材料の高温物性の高精度測定など工業的に新たなブレークスルーをもたらす可能性のある新技術の開発に資するだけでなく、過冷却状態からの核形成の挙動に及ぼす自由界面変形や液滴内部流れの影響、更には大粒径浮遊液滴の非線形な界面変形の取り扱いなどについての工学的に極めて重要な情報を提供するものである。

第2章 静電浮遊実験

2-1 はじめに

静電浮遊による、材料プロセッシングや高温物性の測定が行われており、新機能を有する材料の創成やこれまでに実測値の無い超高温融体の熱物性値の測定に関する研究が行われ、非常に多くの注目を浴びている。物性計測においては、浮遊液滴の安定化のために行っている回転数がある値を超えると、液滴振動における従来の線形理論が適用できず、回転の影響を補正することが不可能であることが分かっている。その原因として、浮遊液滴の回転に伴う界面変形あるいは内部流動が何らかの形で液滴の挙動に非線形的影響を与えている可能性があるが、現段階ではこれを明らかにすることができていない。そこで、液滴の回転・振動挙動の解明及び物性測定への影響について流体力学の観点から解明することを目的に研究を行った。

現在、地上重力環境下において、静電力を用いた無容器浮遊によって、従来の方法では測定が困難であった融点が 3000°C を超えるような超高温溶融金属の熱物性測定などが行われている⁽¹⁾⁽³⁾。この熱物性測定においては、液滴振動法によって液滴形状の変形から固有振動数を求め、Rayleigh⁽⁴⁾や Lamb⁽⁵⁾によって導出された線形理論の関係式が用いられる。しかし、浮遊液滴の固有振動数を求めるために印加する軸対称振動や、安定した浮遊を促すために印加する回転により液滴形状が大きく変化すると、液滴の非線形効果が顕著になるため、熱物性測定において線形関係式が適用できなくなり、測定に大きな誤差を与えることが懸念される。しかしながら、現段階では、非線形効果が液滴にどの様に現れるのかについては明らかになってはいない。この液滴に対する非線形効果の解明は、熱物性測定への寄与だけでなく、過去1世紀に渡り続けられてきた液滴挙動に関する流体力学的研究の発展につながるものと考えられる。

本研究では、線形理論での熱物性測定の限界や、大振幅・大変形時の浮遊液滴における非線形効果を解明することを目的としている。

まず、液滴の無容器浮遊技術として、音波や電磁力を利用する方法に比べて比較的安定に真球の状態の液滴を保持できる静電浮遊法を用いて、常温・大気圧下での液滴浮遊を行った。また、液滴振動法による表面張力測定を行い、測定誤差となりうる要因について検討した。次に大振幅振動、または回転印加時の液滴挙動観測を行い、液滴形状の変形が固有振動数に与える影響を調べ、理論との比較を行った。

2-2 理論

2-2-1 浮遊による物性測定

2-2-1-1 物性値算出式

ここでは、線形変形理論から表面張力算出式の導出を行う^{(1),(4),(5)}。まず、密度 ρ の液滴が、密度 ρ' の無限に広がった他の流体によって囲まれているとし、平衡状態から半径方向のみに微小変形させた場合を仮定する。この時、任意の瞬間における共通球面の形状は、次のように与えられる。

$$r = a + \zeta = a + S_n \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (1)$$

ここで

a : 平均半径

S_n : n 次の球面調和関数

(1)式に対応する速度ポテンシャルの値は、内部の点で、

$$\phi = \frac{\sigma a}{n} \frac{r_n}{a_n} S_n \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (2)$$

外部の点で、

$$\phi' = -\frac{\sigma a}{n+1} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (3)$$

となる。これらは、 $r = a$ で、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi'}{\partial r} \quad (4)$$

となる。また、このときの表面における内圧、および外圧の変動部分は、

$$p = \dots + \frac{\rho \sigma^2 a}{n} S_n \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (5)$$

$$p' = \dots - \frac{\rho' \sigma^2 a}{n+1} S_n \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (6)$$

によって与えられる。

曲率の和を見出すためには、次の立体幾何の定理を用いる。すなわち、曲面の族

$$F(x, y, z) = \text{const} \quad (7)$$

点 (x, y, z) を通る曲面のその点での法線方向余弦を λ, μ, ν 、すなわち、

$$\lambda, \mu, \nu = \frac{F_x, F_y, F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (8)$$

とすれば、

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \quad (9)$$

であるという定理である。

調和球状体の方程式(1)は、また、

$$r = a + \zeta_n \quad (10)$$

と書ける。ここで、

$$\zeta_n = \frac{r_n}{a_n} S_n \cdot \cos(\omega_n t + \varepsilon) \quad (11)$$

すなわち、 ζ_n は n 次の体調和関数である。

こうして

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial x} + n \frac{x}{r^2} \zeta_n \\ \mu &= \frac{y}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} + n \frac{y}{r^2} \zeta_n \\ \nu &= \frac{z}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial z} + n \frac{z}{r^2} \zeta_n \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{2}{r} + \frac{n(n+1)}{r^2} \zeta_n \\ &= \frac{2}{a} + \frac{(n-1)(n+2)}{a^2} S_n \cdot \sin(\omega_n t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。この時、液滴の自由界面において、表面張力が一様に分布しているとする
と、(4),(9)を表面条件であるラプラスの式

$$p - p' = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (14)$$

ここで

p, p' : 流体球の界面近くでの両側の圧力

R_1, R_2 : 表面の主曲率半径

σ : 表面張力

に代入すると

$$\omega_n^2 = n(n+1)(n-1)(n+2) \frac{\sigma}{\{(n+1)\rho + n\rho'\}a^3} \quad (15)$$

が得られる。

$r' = 0$ 、 a を球形時の半径 r_0 とおけば、これは

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho n_0^3} \quad (16)$$

を与える。これによって、液滴の固有振動数から表面張力を算出することができる。

今、球面調和関数とは、以下に示す微分方程式

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \phi^2} + n(n+1) Y_n^m = 0 \quad (17)$$

の解 $Y_n^m(\theta, \phi)$ となっている。元の方程式に含まれる l, m の二つを指定すると関数型が決まり、極座標 θ, ϕ の関数となる。ここで球面調和関数は、ルジャンドル関数 P_n^m を用いて、以下のように表せる。

$$Y_n^m = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (18)$$

このルジャンドル関数を用いると、(1)式は、次のようになる。

$$r(\theta, t) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) P_n^m(\cos \theta) \quad (19)$$

ここで、

r_0 : 球形と仮定した時の液滴の半径

P_n^m : n 次のルジャンドル関数

θ : z 軸からの角度

A_n : n 次モードの振動振幅

ω_n : n 次モードの固有振動数

今、(19)式として、液滴の n 次のモードの界面変形を表す式が得られた。この式により記述される浮遊液滴の界面変形の様子を、図 2-1 と、図 2-2 に示す。図 2-1 では、 n は液滴の振動モードを、 m は振動の軸を表している。また、ここで示す浮遊液滴の界面変形は、周期的な変形のある瞬間の変形の様子を示している。図 2-2 は、 $n=2, m=0$ の軸対称振動モードにおける一周分分の界面変形挙動を表している。

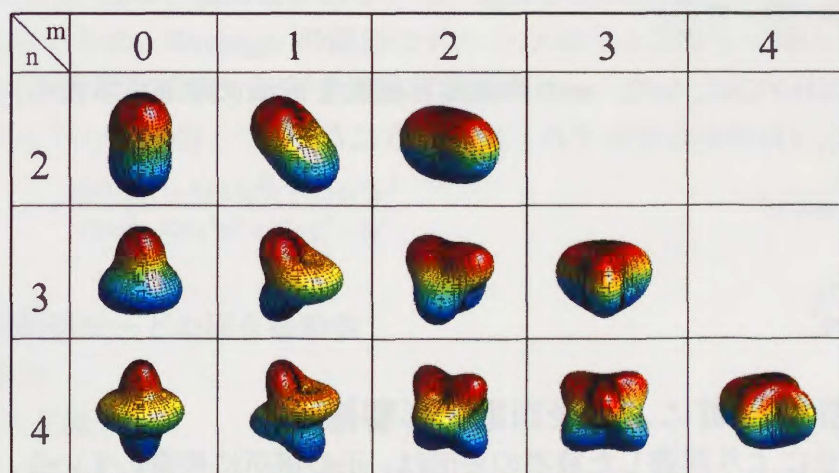


図 2-1 液滴の界面変形

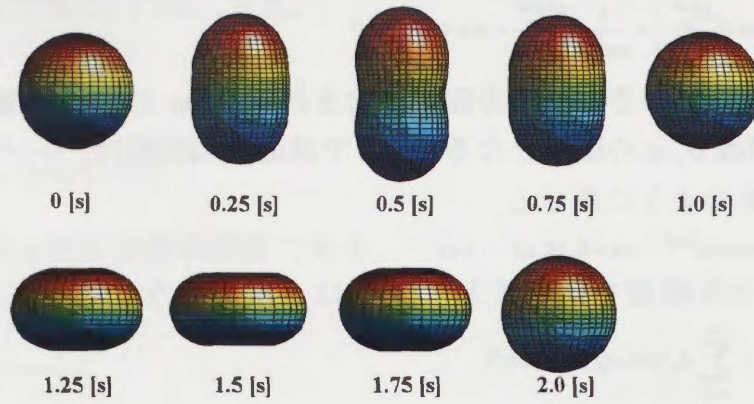


図 2-2 $n=2, m=0$ の振動モードでの一周期での振動挙動

次に、液滴の粘度が及ぼす液滴振動への影響を考慮に入れると、液滴の振幅は減衰するものとして考えられる。したがって、(19)式において、振動振幅 A_n は、次のように表される。

$$A_n \propto A_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_n}\right) \quad (20)$$

ここで

τ_n : 減衰定数

A_0 : 初期振幅

これと(1)式より減衰定数 τ_n は、次のように表される。

$$\frac{1}{\tau_n} = (n+1)(2n+1) \frac{\eta}{\rho r_0^2} \quad (21)$$

本実験においては、 $n=2$ 、 $m=0$ の軸対称振動を液滴に印加するため、表面張力と粘度は(2)式、(3)式からそれぞれ、次のようになる。

$$\sigma = \frac{1}{8} \rho \omega_2^2 r_0^3 \quad (22)$$

$$\eta = \frac{5\tau_2}{\rho r_0^2} \quad (23)$$

2-2-1-2 静電浮遊による表面電荷影響補正

静電浮遊法により浮遊した液滴の表面は、正の電荷に帯電している。液滴表面に一様に電荷を帯びている場合、液滴の固有振動数は、電荷の影響を受け変化する。これは、表面電荷によって、液滴界面に働く表面張力が弱められることに起因する。ゆえに、液滴の表面張力を算出する際には、その減少分を補正する必要がある。Rayleigh⁽⁶⁾は、エネルギー安定論による解析から、外力を受けない状態において、電荷を帯びた液滴の微小振動に対する固有振動数を最初に計算し、液滴界面の乱れ

を引き起こす原因が電荷量であることを証明した。Rayleigh⁽⁶⁾によると、液滴表面の電荷量を Q_s とすると、2 次の振動モードの固有振動数は、次のように表される。

$$\omega_{2c}^2 = \frac{8\sigma}{\rho r_0^3} \left(1 - \frac{Q_s^2}{64\pi^2 r_0^3 \sigma \epsilon_0} \right) \quad (24)$$

これより、表面電荷の補正を加味した表面張力は、以下の式で求められる。

$$\sigma = \frac{\rho r_0^3}{8} \left(\omega_{2c}^2 + \frac{Q_s^2}{8\pi^2 r_0^3 \rho \epsilon_0} \right) \quad (25)$$

本研究では、液滴の表面電荷 Q_s については、平行な電極のちょうど中央に 1 点の電荷として存在するものと仮定するし、クーロン力と重力の釣り合いより、次式によって計算を行った。

$$mg = \frac{Q_s V}{L} \quad (26)$$

ここで

m : サンプルの質量

g : 重力加速度

V : 上下電極間のポテンシャル

L : 電極間の距離

2-2-1-3 重力影響補正

静電浮遊液滴における軸対称振動の性質は、Feng&Beard⁽⁷⁾により、摂動法を使って、解析された。電場、重力場がある中で、電荷を帯びた液滴の微小振動は、完全な球形ではないため、Rayleigh の線形モデルとは異なることを示唆した。Feng と Beard の 2 次の軸対称振動モードでの固有振動数は、下のようになら与えられる。

$$\omega_2^2 = \omega_{2c}^2 [1 - F(\sigma, q, e)] \quad (27)$$

$$F(\sigma, q, e) \equiv \frac{(243.31\sigma^2 - 63.14q^2\sigma + 1.54q^4)e^2}{176\sigma^3 - 120q^2\sigma^2 + 27\sigma q^4 - 2q^6} \quad (28)$$

ここで

ω_{2c} : 2 次の振動モードの固有振動数

σ : 表面張力

ω_{2c} : (6)式で定義

また、 q と e は、以下のように定義される。

$$q^2 \equiv \frac{Q_s^2}{16\pi^2 r_0^2 \epsilon_0} \quad (29)$$

$$e^2 \equiv E^2 r_0 \epsilon_0 \quad (30)$$

ここで

e : 浮遊において適用された電場

2-2-2 液滴の振動振幅と共振周波数シフトの関係

非粘性、非圧縮性の液滴や気泡において、ある程度の大きさの振幅を有する軸対称振動についての理論解析は、Tsamopoulos&Brown⁽⁸⁾によって行われた。振幅の2次モード結合に起因する液滴形状や速度ポテンシャルの補正は、2、3、または4分化された運動として考えられる。その計算は、速度ポテンシャルが移動境界によって与えられた領域での形状に依存するため複雑なものになるが、彼らは、ポアンカレ-リンドステッド法と、領域摂動法を組み合わせることで境界形状の変化を扱うことで、この問題を解決した。彼らは、このような解析によって、2次の軸対称振動モードに対する液滴の共振周波数が、その振動振幅の2乗に比例して減少する結果を得た。振動振幅と共振周波数の減少量の関係は次の式で表される⁽¹⁰⁾。

$$df / f_0 = - \frac{1}{2} C e^2 \quad (31)$$

ここで

df : 無印加時の共振周波数からの減少量

f_0 : 無印加時の共振周波数

C : 定数 1.17037 (Tsamopoulos⁽⁹⁾)

e : 無次元振幅 a / R

なお、本実験における振幅の大きさは、この(31)式に従って、振幅が液滴の大きさに依存しない無次元振幅 ε を用いて評価することとした。

2-3 浮遊実験

2-3-1 実験概要

本実験では、静電浮遊装置によって常温・大気圧下で液体を浮遊させ、その浮遊液滴に振動、または回転を誘起し、そのときの挙動を液滴垂直軸方向長さの時系列データの解析、または、高速度カメラによって撮影した画像による観察を行った。

2-3-2 実験方法

2-3-2-1 静電浮遊の原理

図 3-1 に静電浮遊方式の概要を示す。浮遊開始前、下電極に正の電圧を印加しておき、試料は下電極に接触させておく。これにより、試料表面は正電荷に帯電する。次に、上電極に負の電圧を印加すると試料と上電極間にクーロン力が働き、液滴は鉛直上向きに引力を受け、浮遊する。しかしながら、これだけでは試料が安定に保持されないため、レーザー光を試料に照射し、その影を光検出器に投影することに

よって位置情報を検出し、検出された位置データをもとに PID 制御を行い、位置のずれに応じて上電極の電圧を調節することによって、液滴を安定に浮遊させる。

高温熔融金属などを浮遊させる静電浮遊炉においては、試料を加熱すると電荷が減る傾向があり、このため、試料の電荷供給が必要不可欠になる。しかしながら、本実験では、常温・大気圧下において、液滴を浮遊させるため、電荷の減少はほとんどないものとして扱うことが可能である。

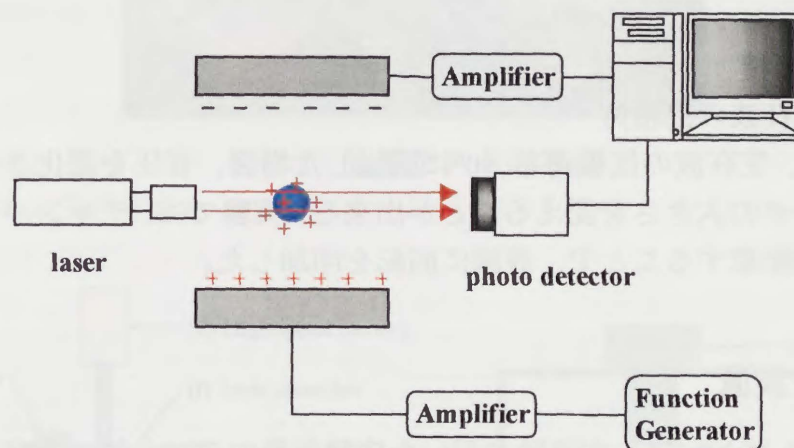


図 3-1 静電浮遊方式の概要

2-3-2-2 液滴振動の励起

液滴振動を励起する方法として、JPL の Rhim ら⁽¹⁾、JAXA の石川助教授ら⁽²⁾⁽³⁾が採用している下電極に正弦波周期の電圧を印加する方法を用いた。ここでは、下電極と接地の間に高速高圧アンプを介して、ファンクションジェネレータからの正弦波周期の電圧信号を印加し、浮遊液滴に 2 次の垂直軸対称な振動を励起した。また、印加電圧を変化させることで、液滴の振動振幅を変化させた。本実験装置では、液滴に対して、3 次の振動モードまで印加できることが確認された。

2-3-2-3 液滴回転の励起

液滴の安定浮遊、軸対称振動を促すためには回転の印加は不可欠である。しかしながら、液滴の垂直軸周りに回転を印加した場合、回転数増加に伴い、液滴の固有振動数、減衰時間が変化することが理論的に示されている⁽¹¹⁾⁽¹³⁾。そこで、熱物性測定における誤差を観察するために、音波による回転トルク印加法を用いて回転を印加することとした。

回転トルク印加法では、液滴に定在波を直交に与えられるように 2 個のスピーカーを 90°の角度で配置する。ここで与えられる回転トルク T の大きさは、Busse & Wang⁽¹⁴⁾により、次のように与えられる。

$$T = \frac{3}{2} l_h A \frac{P_x P_y}{r c^2} \sin j_0 \quad (32)$$

$$l_h = \frac{r}{w} \frac{1}{n^2} \quad (33)$$

ここで

ν : 空気の動粘性係数

P_x, P_y : 定常波の音圧振幅

c : 音速

A : 液滴の表面積

φ_0 : 2つの定在波の位相角

(32)式より、定在波の位相角を 90° に固定した場合、音圧を変化させることによって回転トルクの大きさを変えることが出来る。実験では、チャンバー側面にスピーカーを2つ配置することで、液滴に回転を印加した。

2-3-3 実験装置

図 3-2、図 3-3(a),(b)に、本実験で用いた実験装置のテスト部の写真と概略図を示す⁽¹⁵⁾。実験装置の中央には、浮遊液滴の可視化のためにアクリル製の透明チャンバー (180[mm]×180[mm]×110[mm]) を配置した。その中央には、上下対の平行電極、またそのチャンバー周囲に、液滴の鉛直方向長さの変化を測定するためのラインセンサー、液滴の位置制御のための He-Ne レーザー、その反対側にレーザー光量調整のための偏光板とノイズ除去のためのバンドパスフィルター、液滴の影を検出する光検出器、液滴の挙動観察と液滴の回転を測定するための CCD カメラ 2 台と高速度カメラ、液滴に回転を印加させるためのスピーカーを配置した。実験における液滴径の時系列データ、および、液滴の下電極からの位置、上下電極に印加された電圧値の取り込みには、計測制御用プログラミングソフトウェア Labview により、データ取り込みプログラムを作成した。サンプリング周波数は、2400 [Hz] で行った。

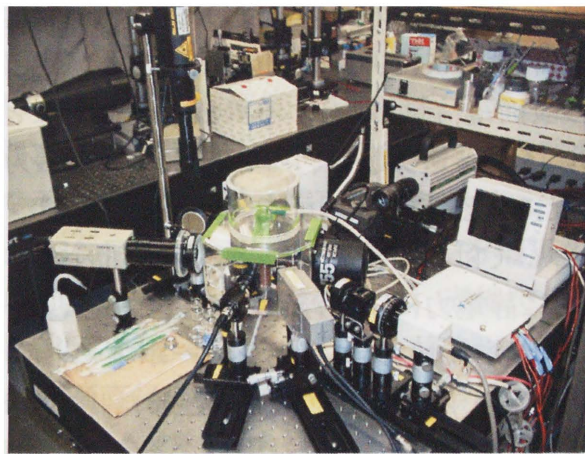


図 3-2 装置テスト部写真

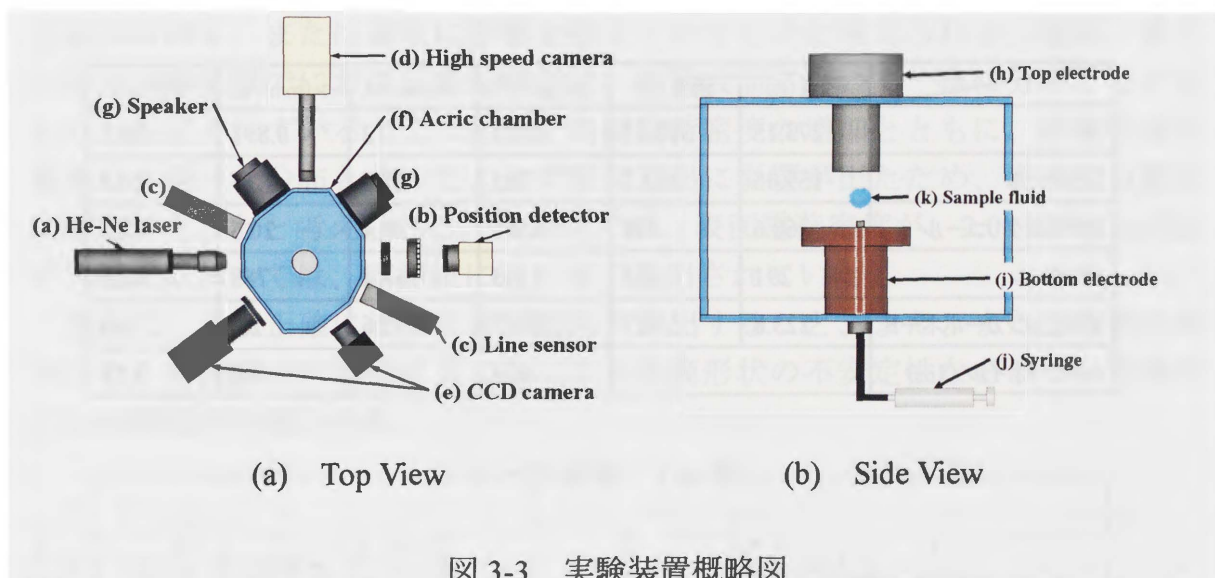


図 3-3 実験装置概略図

2-4 実験結果および考察

2-4-1 試験流体の選定

本実験においては、液滴の形状、界面変形などの可視が容易な流体を選定することとした。具体的な選定基準は以下に示す 4 点である。

- ・ 無色・透明である
- ・ 表面張力が大きく、低粘性である
- ・ 蒸発しにくい
- ・ 化学的に安定で安全な物質である

表 4-1 に、候補となった試験流体を示す。第一候補に挙げられる流体としては純

水である。しかし、純水は不純物の影響を受けやすく、特に表面張力の測定においては大きな誤差が見られた。また、長時間の測定では、蒸発により液滴径が変化してしまうため、液滴の表面電荷量、取得する周波数データなどに大きな影響が出た。

他の候補流体においても浮遊実験を行った結果、表面張力が 20 [mN/m] 程度の流体では、本実験装置による浮遊が不可能であった。また、浮遊出来たとしても、粘度が大きい流体については、液滴に振動は励起されなかった。

選定の結果、最終的に静電力による浮遊が可能であり、かつ、上記の実験条件を満たす流体として、本実験では、プロピレンカーボネート(旭硝子株式会社 アサヒネート 化学式： $C_4H_6O_3$)を使用することとした。プロピレンカーボネートの物性値も表 4-1 に示した。本実験で測定対象となる表面張力については、実験室の気温 25°C の条件下で、プレート法による測定を行った結果、表面張力 $\sigma = 42.6 \pm 0.16$ [mN/m] であった。

	融点(K)	沸点(K)	ρ (kg/m ³)	σ (mN/m)	ν (mm ² /s)	ε (F/m)
水	273.15	373.15	997.1	72	0.891	78.5
エタノール	159.05	351.7	785	22.3	1.37	24.3
エチレングリコール	260.6	471	1110	48.4	20.5	37.7
グリセリン	291	563	1263	63.4	748	42.5
プロピレンカーボネート	223.8	514.7	1205.7	42.6	2.3	69
シリコンオイル (1cs)			818	16.9	1.0	2.28

表 4-1 流体データ

2-4-2 表面張力の測定

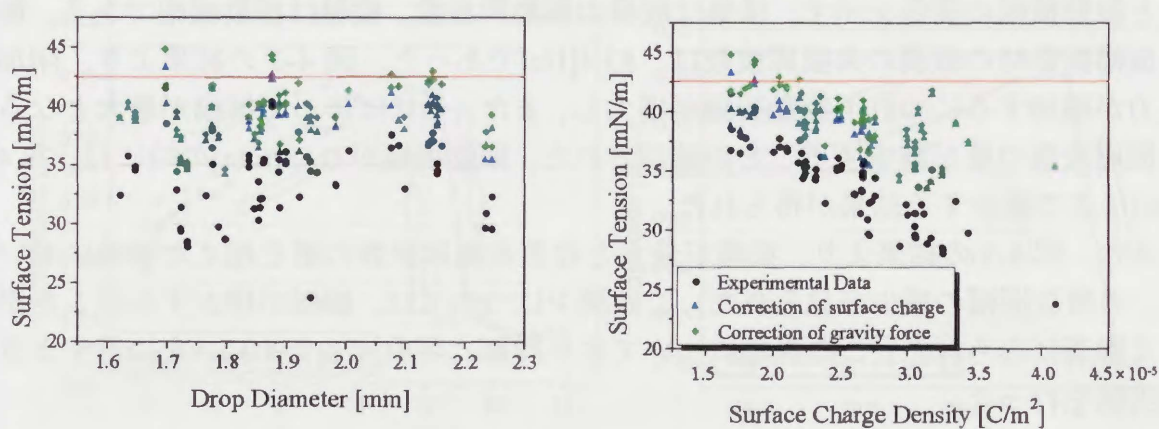
2-4-2-1 実験概要

実験では、プロピレンカーボネートの液滴を浮遊させた。液滴は下電極に設置したシリンジから注入されるのだが、液滴が下電極から離れた直後は、液滴は不安定になっていた。時間経過とともに安定して液滴が保持されるので、安定になったことを確認した後、アンプから 10 [kV] のランダムノイズを下電極に印加し、液滴に微小な振動を与えた。その時の垂直軸方向の液滴長さをラインセンサーによって測定し、得られた時系列データを FFT 解析することで液滴の共振周波数を求め、(22) 式により表面張力を算出した。また、電荷による影響補正、重力による影響補正をそれぞれ、(25)式、(27)式を用いて行った。

2-4-2-2 実験結果

図 4-2(a),(b)にプロピレンカーボネートの表面張力測定結果を示す。図 4-2(a)は横軸に液滴直径、縦軸に表面張力の測定値をとったもので、グラフ中には、(22)式による算出結果、(25)式による電荷補正、(27)、(28)式による重力補正の結果をそれぞれ、黒、青、緑の点で示す。この結果、補正前の結果は $\sigma_e = 34.1 \pm 3.3$ [mN/m]、電荷による補正結果が $\sigma_c = 38.4 \pm 2.1$ [mN/m]、重力による補正の結果が $\sigma_g = 39.5 \pm 2.6$ [mN/m]となり、重力補正による表面張力の値が、赤線で示す常温での測定値 $\sigma = 42.6 \pm 0.16$ [mN/m]に最も近い値を示していることが確認された。しかしながら、表面張力の値に対して、液滴直径による依存性は見られず、また、データ誤差は、補正によって小さくなるものの、大きな変化はなかった。後においても大きい値を示した。そこで、横軸のパラメータを変え、横軸に液滴の表面電荷密度、縦軸に表面張力の測定値をとった結果を図 4-2(b)に示す。この結果より、表面張力の値は、液滴の表面電荷密度に比例して減少していることから、表面電荷が、表面張力の測定、または補正に影響を与えているものと考えられる。電荷、重力の両方の補正式でにおける表面電荷は、液滴表面において一様に分布しているものと仮定されている。このため、表面電荷密度の増加とともに、液滴表面の電荷が不均一な分布となったことで電荷算出に影響が出たため、表面張力測定に誤差が生じたと考えられる。現段階では、表面電荷密度が、 2.0×10^{-5} [C/m²]以下の領域においては、実測値に近い値で算出されていた。

今後は、より正確に液滴の表面電荷を算出すること、また、また、電荷の増加により表面張力が低下することによる液滴形状の不安定性などについて検討する必要性が示唆された。



(a) 液滴径の影響

(b) 単位表面積あたりの表面電荷量の影響

図 4-2 表面張力の測定結果

2-4-3 振幅増加による液滴振動への影響

2-4-3-1 実験概要

表面張力測定時と同様にプロピレンカーボネートを浮遊させ、共振周波数を求める。振動の印加については、第三章に述べた方法を用いる。ファンクションジェネレータから、共振周波数より低い周波数の正弦波周期の電圧を下電極に送り、液滴に振動を印加する。周波数を 0.2 [Hz] 刻みで増加させ、それぞれについて液滴の鉛直軸方向長さの測定を行い、時系列データから振幅を計算した。共振周波数を超える領域まで測定を行なった後、今度は印加電圧の大きさを 0.5～7[kV]間に変化させることで印加外力を増大させ、同じように測定を行った。

ここで、液滴に印加される平均的外力は、下電極に面する液滴の下半分に均一に与えられると仮定し、液滴の表面電荷量と下電極への印加電圧から、次式で算出することとした。

$$F_{osc} = \frac{Q}{2} E_{osc} \quad (34)$$

ここで

F_{osc} : 液滴に印加される外力

E_{osc} : 印加電圧

Q : 液滴の表面電荷量

2-4-3-2 印加外力の増加に伴う振動振幅の変化

図 4-3 に、直径 1.89 [mm]の液滴について、印加外力を変化させた時の振動周波数と振動振幅の関係を示す。横軸は液滴の振動周波数、縦軸は振動振幅である。微小振幅振動時の液滴の共振周波数は、83.4[Hz]であった。図 4-3 の結果より、印加外力が増加するにつれて振動振幅が増大し、また、それに伴って振幅が最大となる共振周波数の値が減少することが確認された。振動振幅が 0.65[mm]の時には、78.4 [Hz]にまで減少する結果が得られた。

また、図 4-3 の結果より、振幅が最大となる共振周波数の値を超えた領域において、急激な振幅の減少が見られた。この減少については、振幅が増大するにしたがって顕著にみられた。この現象についてより詳細に考察するために、次に示すような実験を行った。

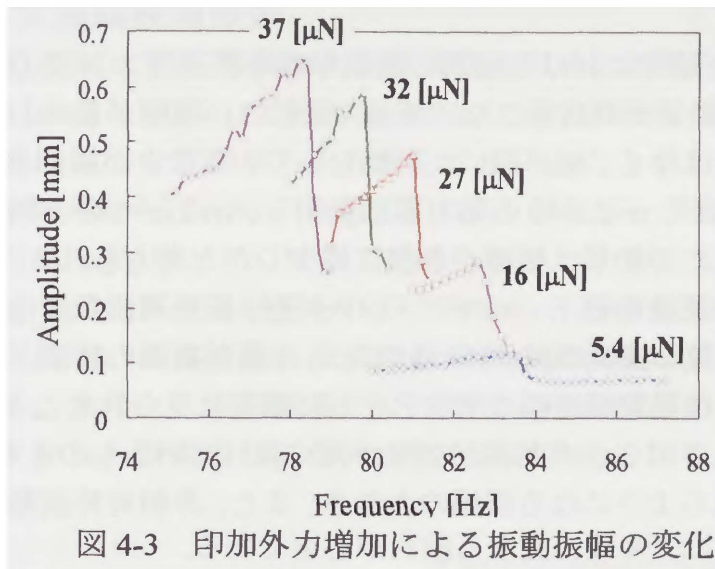
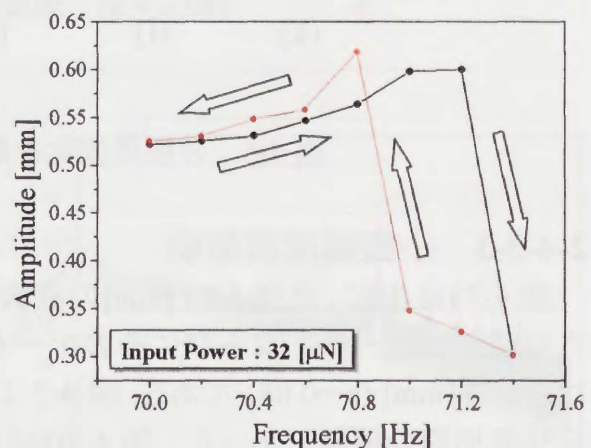
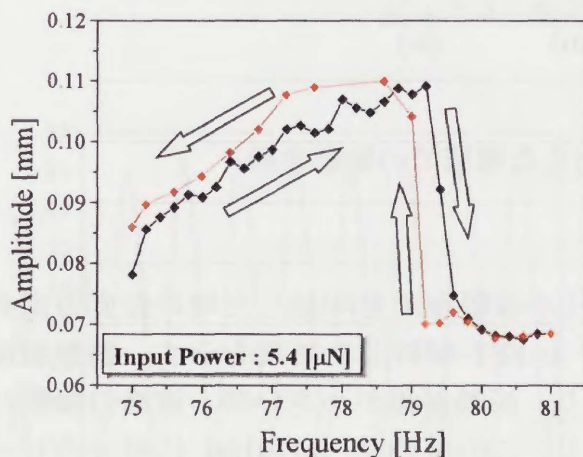


図 4-4、4-5 に、直径 1.92 [mm] の液滴について、同様の条件下で実験を行い、今度は印加周波数を増加させた後、そこから印加周波数を逆に減少させていった場合の両方で、液滴の振動振幅の測定を行った結果を示す。横軸は液滴の振動周波数、縦軸は振動振幅である。黒で示した線が印加周波数を増加させた場合、赤で示した線が印加周波数を減少させた場合である。図 4-4 は印加外力が 5.4[μN]、図 4-5 は印加外力 32[μN] の場合である。この結果、周波数による振幅の変化は、振動周波数が増加した場合と、減少した場合の曲線が同じ経路たどらないヒステリシス特性を有していることが示された。また、この時、行きと帰りの経路において、振幅が最大となる共振周波数の値にずれが生じることも示された。



共振周波数を越えた領域における液滴の振動挙動を高速カメラで撮影した結果を図 4-6 に示す。図 4-6 の結果より、液滴の振動は、振幅が最大となる点を越ええると、軸対称振動ではなく、軸が傾いた振動をしていることが確認された。これは、この領域での振動が、 $n=2, m=0$ の軸対称振動から、 $n=2, m=1$ の非軸対称振動に転移したと考えられ、この結果、振幅が急激に減少したと考えられる。

以上のような共振周波数の低下、ヒステリシス特性、振動周波数変化に伴う振幅の減少については、急激な振幅の減少については、非線形振動の特徴として挙げられることである⁽¹⁶⁾。この現象が振幅の増加とともに顕著に見られたことから、浮遊液滴の振幅増加によって何らかの非線形効果が強く現れているものと考えられる。このような現象が現れるようになる振幅の大きさ、また、非軸対称振動への転移の原因などについては、今後、更なる検討が必要である。

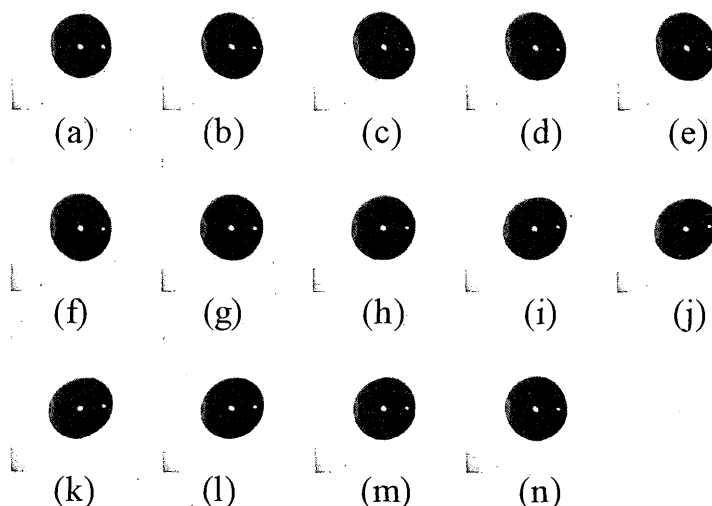


図 4-6 共振周波数を越えた領域での振動挙動

2-4-3-3 小振幅液滴振動

図 4-7 (a),(b)に、直径 1.65 [mm]の液滴に小振幅振動を印加した時の鉛直方向長さの時系列データ、ならびにそのデータを FFT 解析した結果を示す。振動振幅は、0.07 [mm] ($\varepsilon=0.08$) である。図 4-7 より、振動振幅が小さい時、液滴の振動は正弦波周期の振動であった。図 4-7(b)から、この振動は、102 [Hz] に単一のピークを持つ単振動であることがわかる。また、この液滴の無印加時に測定した共振周波数は、102.5 [Hz]であり、共振周波数の大きな減少は見られなかった。

2-4-3-4 大振幅液滴振動

図 4-8 (a),(b)に、同じ液滴に大振幅振動を印加した場合の結果を示す。振動振幅は、0.38 [mm] ($\varepsilon = 0.46$) である。図 4-8(a)に示す振動振幅が大きい時の振動波形は、正弦波周期的な波形から歪みが生じていることがわかる。図 4-8(b)に示す FFT 解析の結果からは、86.1 [Hz]に基本モードのピークを持ち、無印加時の共振周波数 102.5[Hz]から大きく減少しているのがわかる。また、その整数倍の周波数にもいくつかのピークが見られることから、液滴振動に高調波が存在することが示唆された。この結果、液滴の振動が、正弦波周期からずれているものと考えられる。また、この高調波のピークは、小振幅振動においては確認されなかったことから、振幅増加に起因したものと考えられる。

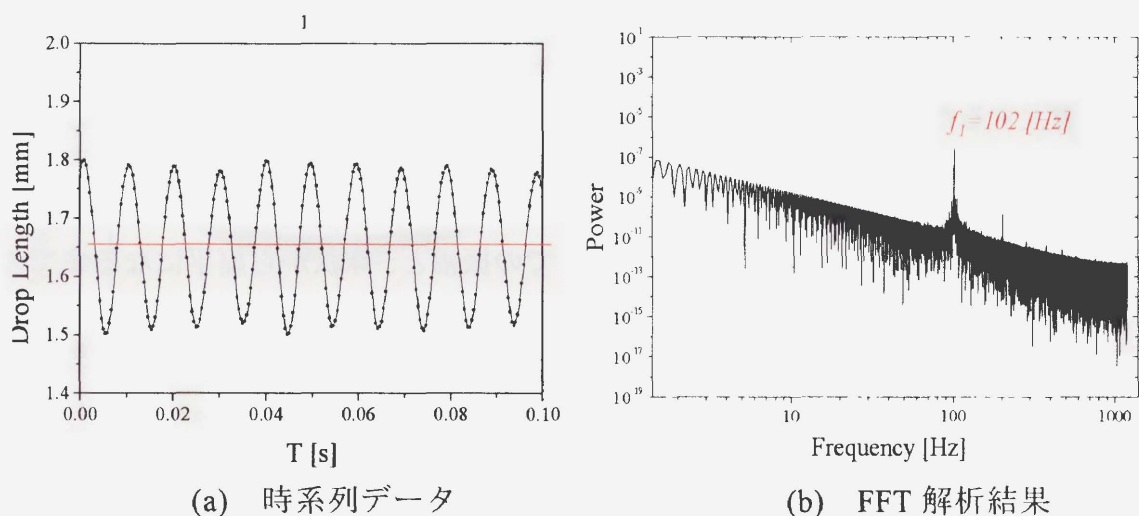


図 4-7 小振幅振動 ($\varepsilon = 0.08$)

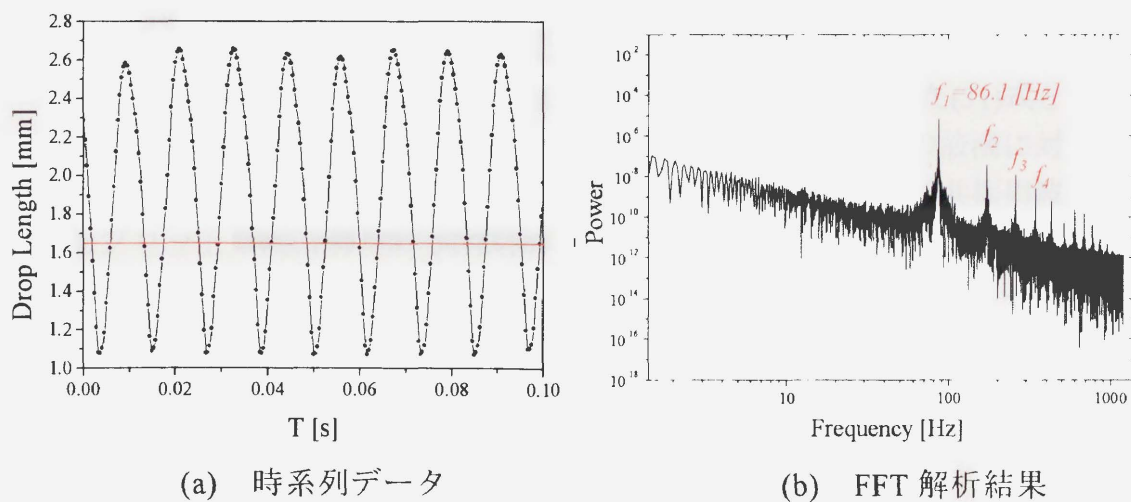


図 4-8 大振幅振動 ($\varepsilon = 0.46$)

また、図 4-9 に、高速度カメラを使って、液滴直径 1.9 [mm]、振動振幅 0.4 [mm] ($\varepsilon=0.45$)の時の液滴をバックライト法で撮影した大振幅振動液滴の一周期分の界面形状の変化を示す。このときの撮影速度は、1125 [fps] である。図 4-9 より、大振幅振動の場合、液滴の形状が、上下対称にはなっておらず、きれいな軸対称振動が起こっていないことがわかる。このことは、液滴界面での流れや内部流動、また、重力による影響などが考えられるが、現段階では、その同定には至っておらず、今後は別の方法を用いて、液滴界面、または内部の可視化を行う必要性が示唆された。

また、液滴が球状から縦方向の葉巻状になるまでの振動振幅が、球状から横方向に扁平になるまでの振動振幅に比べて大きいことがわかる。この理由については、液滴界面での圧力の関係を表す(14)式を用いて考察を行った。

ここで、液滴が縦に葉巻状になった場合、液滴頂点における曲率半径は小さくなる。したがって、液滴頂点では、液滴を引き伸ばそうとする外力と同方向に内部圧力が増大するため、液滴が大きく引き伸ばされる。一方、液滴が横に扁平になった場合、曲率半径は大きくなることから、液滴頂点での内部圧力は減少するものの、液滴を縮めようとする外力と反対方向に圧力が働くため、液滴の縮みは抑制される。その結果、液滴が球状から葉巻状になるまでの振幅と、球状から扁平になるまでの振幅に違いが生じたと考えられる。また、この他に考えられる要因としては、重力に起因するものである。重力は、鉛直下向きであり、液滴を縮めようとする外力と反対の方向であることから、液滴の縮みは抑制されると考えられる。

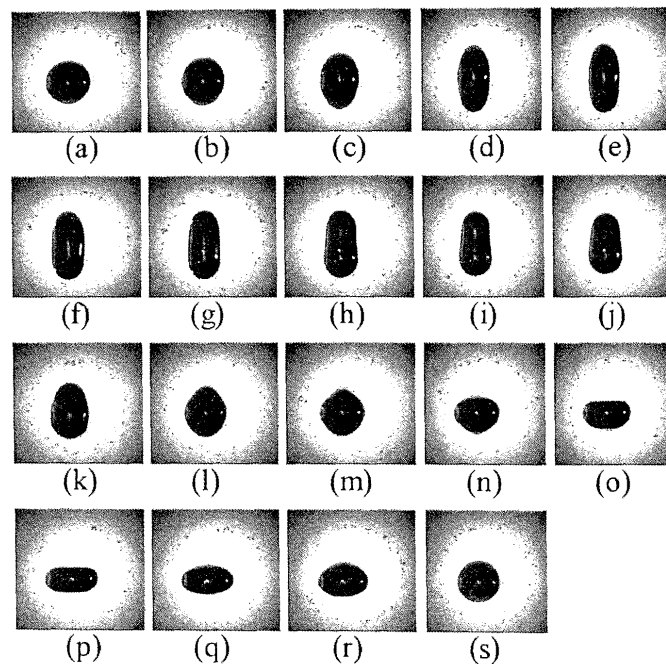


図 4-9 大振幅振動液滴の一周期分の界面形状

2-4-3-5 液滴振動の変化速度の推移

小振幅、大振幅の液滴振動における正弦波振動からの差異を見るため、図 4-10 (a),(b) に、液滴振動波形から液滴径の変化速度を算出した結果を示す。横軸に液滴径の振動振幅、縦軸に液滴径の変化速度をとった。この結果より、小振幅振動では、微小な誤差はあるものの、赤線で示した正弦波周期で振動した場合での変化速度とほぼ一致するが、大振幅振動では、大きく歪むことが示された。これは、図 4-9 に示す液滴画像からもわかる通り、大振幅振動においては、液滴形状が上下対称ではないこと、また、液滴が伸びた場合と縮んだ場合での振幅が異なっていることなどに起因するものと考えられる。

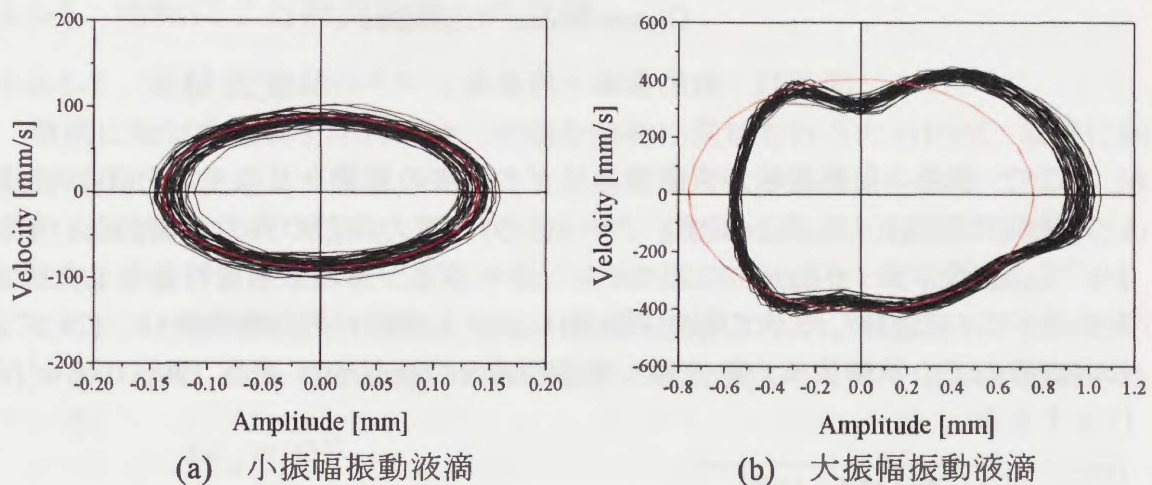


図 4-10 浮遊液滴の径変化速度

2-4-4 振動振幅と共振周波数との関係

図 4-3 の結果をふまえて、振動振幅と共振周波数の関係を表した(31)式と、実験結果を比較したものを図 4-11 に示す。ここでは、直径 1.65 [mm] の液滴に対して、4.3 節と同様に実験を行い、各印加外力に対して振幅が最大となる共振周波数の点のみをプロットした結果である。横軸に液滴直径で割って無次元化した振幅、縦軸に無印加時の共振周波数からの減少量をとった。図 4-11 の結果より、本実験の結果と理論式の結果が、ほぼ一致しすることから、本実験における理論式の妥当性が示唆された。

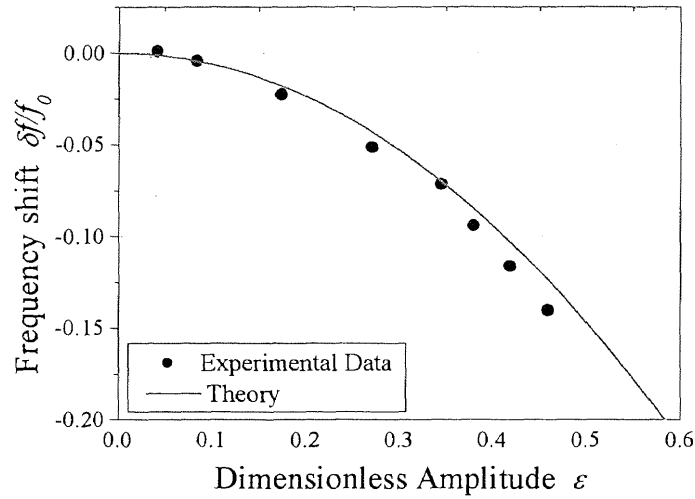


図 4-11 振動振幅と周波数シフトの関係

ここで、液滴の振動振幅が表面張力にどの程度の影響を及ぼすかを(31)式を用いて評価することとした。まず、クーロン力、重力などの外力が働かない場において、液滴半径 1.0 [mm] のプロピレンカーボネートの液滴を浮遊させた場合を仮定する。この時、2 次の軸対称振動における液滴の固有振動数は、(22)式より求まるので、試験流体の物性値、表面張力 42.6[mN/m]、密度 1205.7[kg/m³]を代入すると

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{8 \times (42.6 \times 10^{-3})}{(1.0 \times 10^{-3})^3 \times 1205.7}} \\ &= \sqrt{2.8 \times 10^5} \cong 5.3 \times 10^2 [\text{rad/s}]\end{aligned}$$

と求まる。したがって、外力を受けていない状態での液滴の共振周波数は、 $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 84.6 [\text{Hz}]$ である。

ここで、液滴の振動振幅が $a = 0.1 [\text{mm}]$ ($\varepsilon = 0.1$) であったと仮定すると、この時の液滴共振周波数の減少量 δf は、(31)式より求められる。

$$\begin{aligned}\delta f &= -\frac{1}{2} C \varepsilon^2 \cdot f_0 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (1.17037) \cdot (0.1)^2 \cdot (84.6) = -0.5 [\text{Hz}]\end{aligned}$$

この減少量を(22)式より表面張力に換算すると、表面張力の減少量 $\delta\sigma$ は、次のようになる。

$$\delta\sigma = \frac{\rho r_0^3 \omega_0^2}{8} - \frac{\rho r_0^3 (\omega_0 - \delta\omega)^2}{8}$$

$$\delta\sigma = 42.6 - \frac{1205.7 \times (1.0 \times 10^{-3})^3 (2\pi(84.6 - 0.5))^2}{8} = 0.47 [\text{mN} / \text{m}]$$

これより、 $\varepsilon = 0.1$ の小振幅振動領域では、表面張力の値は、約 1.1% 減少しており、熱物性値測定における振幅の影響は、ほとんどないと言ってよい。しかしながら、 $\varepsilon = 0.5$ の大振幅振動において同じように計算すると、表面張力の値は 31.1 [mN/m] であり、実際の値より約 27% 減少した値になっていた。このことから、振幅に依存せずに、より高精度な表面張力の測定を行うには、(31)式で表された振幅増大に対する周波数シフトを考慮に入れて算出する必要があることが示唆された。

2-4-5 回転による液滴振動への影響

2-4-5-1 実験概要

液滴に軸対称振動を印加させ、正確な熱物性測定を行うためには、液滴に回転を印加し、安定して浮遊させることが必要不可欠である。しかしながら、液滴は表面張力により球形をしているものの、液滴の回転数の増加による遠心力により、液滴が扁平な形状に変化する。この液滴の回転については、Busse⁽¹⁷⁾が、2 次モードの軸対称振動に対し、回転の影響を考慮に入れ、理論解析を行っている。その結果、回転数と液滴の共振周波数の変化量について、次式が提案されている。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{19}{21} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \quad (35)$$

ここで

ω : 液滴の回転数

$\omega_0 = 2pf_0$: 無印加時の固有振動数

(35)式より、液滴の回転数の増加によって、共振周波数は増加することになる。本実験では、液滴の形状の安定性について検討するため、液滴が軸対称形状を保持できる限界の回転数を計測するとともに、回転による液滴形状の変化、ならびに回転液滴の固有振動数の変化を測定した。

2-4-5-2 回転の計測方法

液滴の回転数を計測する方法として、液滴にトレーサー粒子を混入し、液滴から反射する光の強度変化を計測・解析する方法を用いた⁽¹⁸⁾。反射光を CCD カメラでとらえ、画像解析から得られた光の強度変化を FFT 解析することで、液滴の回転に応じた周波数のピークを観察した。本実験では、トレーサー粒子として、比重 1.02 のナイロン粒子をプロピレンカーボネートに混入した。

2-4-5-3 液滴の回転による液滴振動への影響

図 4-12 に、液滴に回転を印加した時の液滴形状の変化を示す。これは、高速カメラで液滴を横から撮影したものである。回転数の増加にしたがって、試料が扁平になり、最終的に軸対称形状が保持されなくなる様子が確認できた。図 4-12(d)~(e)は非軸対称形状の画像であり、棒形状からアレイ形状に変化していくのが観察された。図 4-12(f)は、分裂直後の画像である。

図 4-13 に、液滴に回転を印加したときの回転数と振動数シフトの関係を示す。横軸は、回転数を液滴の回転無印加時の固有振動数で割って無次元化したもの、縦軸は固有振動数のシフト量を同じく回転無印加時の固有振動数で割って無次元化したものである。赤線で示した曲線は、Busse による理論式(35)式である。実験結果から、回転量増加とともに固有振動数が増加し、また、無次元化回転数の値が 0.577 の点を境に、増加傾向であった値が、減少に転じていることが確認された。これは、液滴が軸対称形状から非軸対称形状に移ったことに起因すると考えられ、軸対称形状である領域の固有振動数の増加については、(35)式にほぼ一致していることがわかる。また、R.A.Brown & L.E.Scriven⁽¹¹⁾は、過去に液滴の回転により軸対称形状が破綻することについて有限要素法によって計算を行い、このときの結果では、軸対称形状を保持できる回転数の臨界値は、約 0.559 であった。これより、過去の計算結果と実験による結果が、ほぼ一致することが確認された。

図 4-14 に、液滴の扁平量と振動数シフトの関係を示す。横軸は、液滴の水平方向半径を真球時の半径 R_0 で割って無次元化したもので、縦軸は共振周波数のシフト量を回転無印加時の共振周波数で割って無次元化したものである。図 4-14 より、共振周波数は、扁平量が大きくなるにつれて増加するが、実験データが連続しておらず、2つの領域に分かれていた。これは、液滴形状が軸対称である領域と、非軸対称形状である領域が存在するためであると考えられる。また、液滴の水平方向半径は、軸対称から非軸対称へは非線形的な増加をしているが、共振周波数の増加については、ほぼ線形的に増加していた。この結果より、液滴の非軸対称形状への転移が緩やかに変化していくのではなく、ある回転数を超えると、急激に起こるものであると示唆される。

回転印加の実験結果から、液滴の共振周波数の増加が確認された。今回の実験では、回転のみによる共振周波数の変化を考察したが、今後は、4.4 節で記述した液滴の振動振幅増加による共振周波数減少への影響とともに、回転と振動によって液滴挙動、ならびに共振周波数がどう変化するかを明らかにしていく必要があると考えられる。

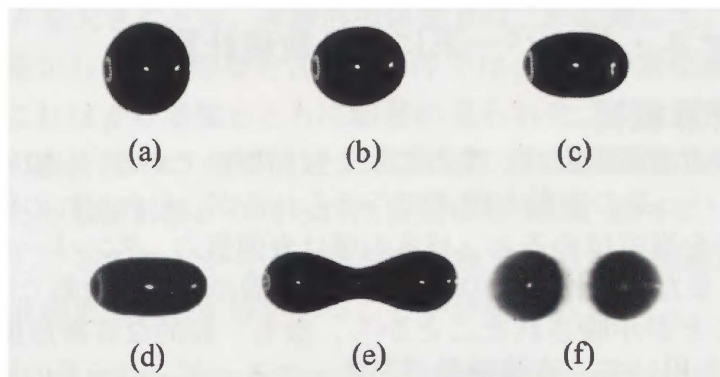


図 4-12 回転による液滴形状の変化

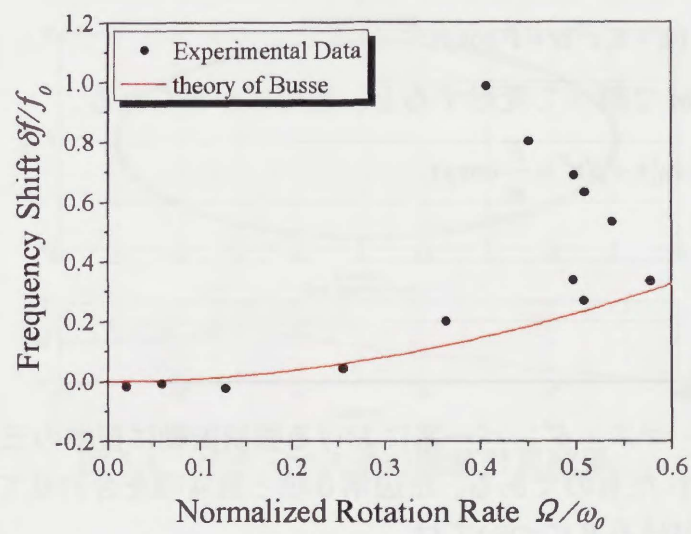


図 4-13 液滴回転量と周波数シフト

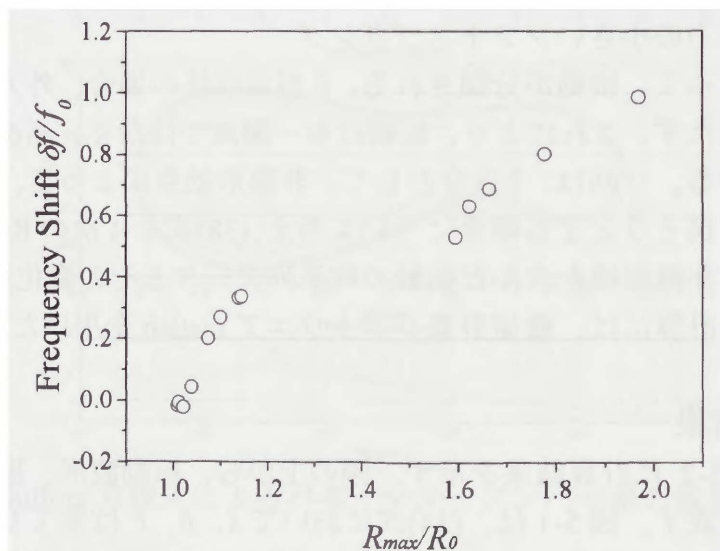


図 4-14 液滴扁平量と周波数シフト

2-5 バネ・マス・ダンパー系による数値計算

2-5-1 数値計算概要

静電浮遊による液滴振動は、外力による強制振動である。一般的に強制振動はバネ・マス・ダンパー系の振動方程式で与えられるが、それぞれの項に液滴振動における物理的意味を当てはめると、バネの項は表面張力、ダンパーの項は粘度を表すと考えられる。また、これまでの考察から、液滴の大振幅振動では、非線形効果が顕著に現れることが示唆されたことから、最も一般的な非線形振動方程式である Duffing 方程式を用いて、液滴振動がバネ・マス・ダンパー系の振動方程式に振幅に依存した非線形効果を持つと仮定した上でモデル化し、数値計算を行った。ここで、Duffing 方程式は、次のように与えられる⁽¹⁵⁾。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2x^2)x = F \cos \gamma t \quad (37)$$

(37)式の両辺を m で割って変形すると、次の式が得られる。

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = \frac{F}{m} \cos \gamma t \quad (38)$$

ここで

λ : 減衰率

ω_0 : 固有振動数

γ : 外力の周波数

(38)式は、バネ・マス・ダンパー系における強制振動に振幅の三乗に依存する非線形項を考慮に入れたものである。左辺第3項と第4項を合わせて、非線形復元力と呼ぶ。(38)式における β については、

- ・ $\beta = 0$ 非線形性が存在しない強制振動
- ・ $\beta > 0$ 復元力の大きいハードスプリング
- ・ $\beta < 0$ 復元力の小さいソフトスプリング

という条件によって、振動が分類される。 β が 0 以外の場合、外力と振幅の間に比例関係が成り立たず、これにより、振動は単一調波ではなく、高次の振動数成分を含んだものとなる。今回は、 $\beta > 0$ として、非線形効果によって、振動子を平衡な状態により強く戻そうとする場合について考え、(38)式を 4 次の Runge-kutta 法により解くことで、非線形項を含んだ振動の時系列データとその変化速度、また、FFT 解析を試みた。計算には、数値計算ソフトウェア matlab を用いた。

2-5-2 計算結果

図 5-1、図 5-2 に計算結果を示す。図の上から、振動波形、振動の変化速度、FFT 解析結果を表す。図 5-1 は、(34)式において λ 、 β 、 F は全て 0 とし、任意の周波数における単振動を仮定したものである。図 5-2 は、同じ周波数において、他のパラメータに任意の値を代入したものである。このとき、大振幅振動を仮定するた

め、外力項係数 F を大きくとり、非線形項係数 β は、 F に対して、非常に小さい値とした。この結果から、非線形項を含んだ条件では、振動の変化速度が大きく歪む結果となった。これは β の増加とともに顕著に見られた。また、FFT 解析結果からは、基本モードの周波数のピークと、その整数倍の周波数を持つ高調波のピークがみられた。これらの数値計算から得られた振動の特徴は、図 4-8、図 4-10 に示す結果に定性的に同じであることから、本研究の対象である大振幅液滴振動において、振幅に依存した非線形効果の影響があることが示唆された。

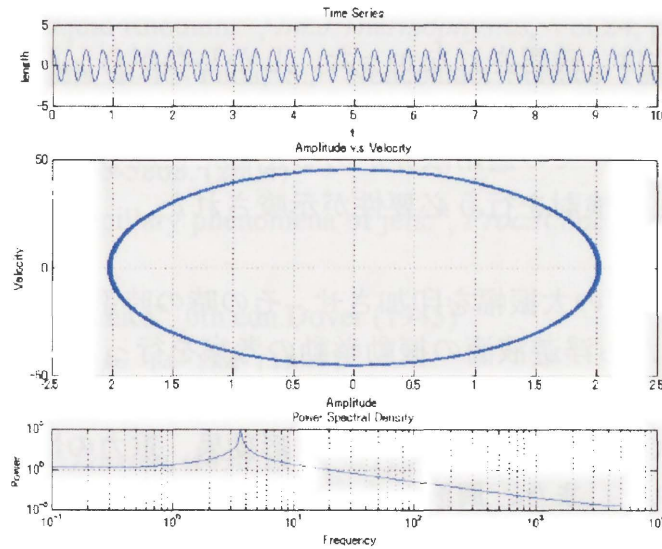


図 5-1 バネ・マス系の数値計算結果

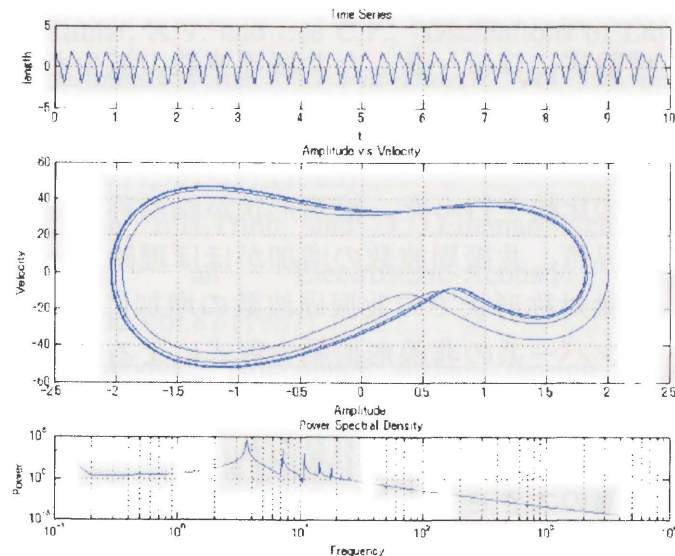


図 5-2 Duffing 方程式によるバネ・マス・ダンパー系の数値計算結果

2-6 まとめ

静電浮遊装置によって、常温・大気圧下において液滴を浮遊させ、液滴振動法を使った表面張力測定を行った。

- ・ 本実験装置で行ったプロピレンカーボネートの表面張力測定、また、測定値に表面電荷による補正、重力による補正を行った結果、重力による補正が最も精度よく表面張力を算出できることが示唆された。
- ・ 液滴直径をパラメータとして、測定を行った結果、表面張力値に対する液滴直径の依存性は、確認されなかった。しかしながら、液滴の表面電荷密度に比例して減少した。これは、表面電荷の非均一分布に起因するものと考えられ、補正式においての適用限界があると考えられる。また、表面電荷算出方法を見直し、再検討を行う必要性が示唆された。

液滴に $\varepsilon = 0.5$ 程度の大振幅を印加させ、その時の時系列データ、FFT 解析、液滴径の変化速度から浮遊液滴の振動挙動の考察を行った。以上の結果より、本実験では以下のことが示された。

- ・ 振動振幅が大きくなるにつれて、非線形効果、重力の影響が顕著に現れることが示唆された。また、周波数を変化させて振動振幅を測定した結果、非線形振動に見られる特徴が確認された。今後は、液滴表面・内部における流れなどについて詳細に調べ、大変形に伴う非線形効果の原因を追究する必要があると考えられる。
- ・ 浮遊液滴に2次の軸対称振動を印加し、共振周波数の振幅依存性について実験した結果、理論式にほぼ一致した共振周波数の減少が確認され、本実験における理論式の妥当性が示唆された。
- ・ 浮遊液滴に回転を印加し、共振周波数の変化、液滴形状の変化について実験を行い、理論との比較を行った。液滴形状が軸対称から非軸対称形状に転移する回転数の臨界値、共振周波数の増加がほぼ理論と一致することが確認された。また、非軸対称形状での共振周波数の増加についても確認された。
- ・ バネ・マス・ダンパー系の非線形振動方程式による液滴振動を模擬した数値計算を行い、実験結果との比較を行った。その結果、非線形項を含んだ場合、実験結果と定性的に類似した傾向が見られた。このことから、大振幅振動液滴に対して、振幅の大きさに依存する非線形効果が存在することが示唆された。今後については、パラメータを液滴のもつ物性値に合わせて計算を行うこと、また、振動振幅、印加周波数のパラメータを増やし、実際の液滴を模擬した計算を行うこと、また、振幅に依存した非線形効果の物理的意味の特定を行う必要性が示唆された。

参考文献

- (1) Rhim, W.-K., Ohsaka, K. and Paradis, P.-F., “Noncontact Technique for Measuring Surface Tension and Viscosity of Molten Materials using High Temperature Electrostatic Levitation.”, *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 70, No. 6, , pp.2796-2801. (1999)
- (2) Paradis, P.-F, Ishikawa, T, Yoda, S, “Thermophysical Property Measurements of Supercooled and Liquid Rhodium.”, *Int.J.Thermophysics*, Vol.24, pp.1121 (2003)
- (3) Ishikawa, T., Paradis, P.-F, Yoda, S., “Noncontact Surface Tension and Viscosity Measurement of Rhenium in the Liquid and Undercooled states.” *Appl. Phys. Let.* , Vol.85, No.24, pp.5866-5868. (2004)
- (4) L.Rayleigh,”On the capillary phenomena of jets.”, *Proc.R.Soc.London*,A29, pp 71-97. (1879)
- (5) H.Lamb, “Hydrodynamics”, 6th edn.Dover (1945)
- (6) L.Rayleigh, *Philos. Mag.* 14, 184. (1882).
- (7) J.Q.Feng and K.V.Beard, “Small-amplitude oscillations of electrostatically levitated drops.”, *Proc.R.Soc.London*, A430,133-150 (1990)
- (8) Tsamopoulos, J.A. and Brown, R.A., “Nonlinear Oscillations of Inviscid Drops and Bubbles,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 127, pp 519-537.(1983)
- (9) Tsamopoulos, J.A., “Nonlinear dynamical Break-up of charged drops.”, In *AIP Conf. Proc.* (1989)
- (10)Wang, T.G., Anilkumar, A.V. and Lee C.P., ”Oscillations of Liquid Drops : Results from USML-1 Experiments in Space,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 308, pp. 1-14. (1996)
- (11)R.A.Brown and L.E.Scriven ,”The shape and stability of rotating liquid drops.”, *Proc.R.Soc.London*, A371,331-357 (1980)
- (12)W.K.Rhim, S.K.Chung, E.H.Trinh, and D.D.Elleman, “charged Drop Dynamics Experiment Using an Electrostatic-Acoustic hybrid System”, *Mat.Res.Soc.Symp.Proc.*Vol.87 (1987)
- (13)W.K.Rhim and T.Ishikawa, “Noncontact surface tension measurement by drop rotation.”, *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 72, No. 9, pp.3572-3575. (2001)
- (14)H.Busse and T.G.Wang, ”Torque generated by orthogonal acoustic waves – Theory.”, *J.Acoust.Soc.Am*, Vol.69, No.6 (1981)
- (15)小野寺博樹、浮遊液滴の振動変形挙動の関する研究、東京工業大学修士論文 (2004)
- (16)ランダウ=リフシッツ理論物理学教程、“力学”，東京図書

- (17)F.H.Busse, "Oscillations of a rotating liquid drop", *J. Fluid Mech.*, Vol. 142, pp. 373-395. (1984)
- (18)石川毅彦、静電浮遊法による高融点金属の熱物性計測に関する研究、東京工業大学博士論文 (2001)

第3章 超音波浮遊実験

3-1 はじめに

宇宙の微小重力環境では、非接触無容器状態で高温物質を浮遊保持できるため、均質核生成を伴う過冷却凝固を用いた高品質材料の製造や超高温材料の高精度物性測定など、新しい様々な研究開発が実現するものと期待されている。これまで、非接触で浮遊させた液滴の界面変形に関する多くの研究がなされてきている⁽¹⁾⁻⁽¹⁰⁾。しかしながら、液滴が大型になった場合、図3-1に例示するように、浮遊液滴の界面には非線形な大変形を伴う非定常でダイナミックな変動や振動挙動が発生する可能性がある。また、浮遊液滴が回転した場合、回転に伴って液滴界面に非線形でダイナミックな変形が発生する可能性もある。更には、浮遊液滴界面の非線形でダイナミックな大変形が液滴内部の流動に影響を与える可能性も考えられる。浮遊状態を利用した無容器過冷却凝固の実現や高精度物性測定のためには、これらの非線形でダイナミックな挙動を科学的に把握し、技術的に制御可能とすることが必要不可欠である。

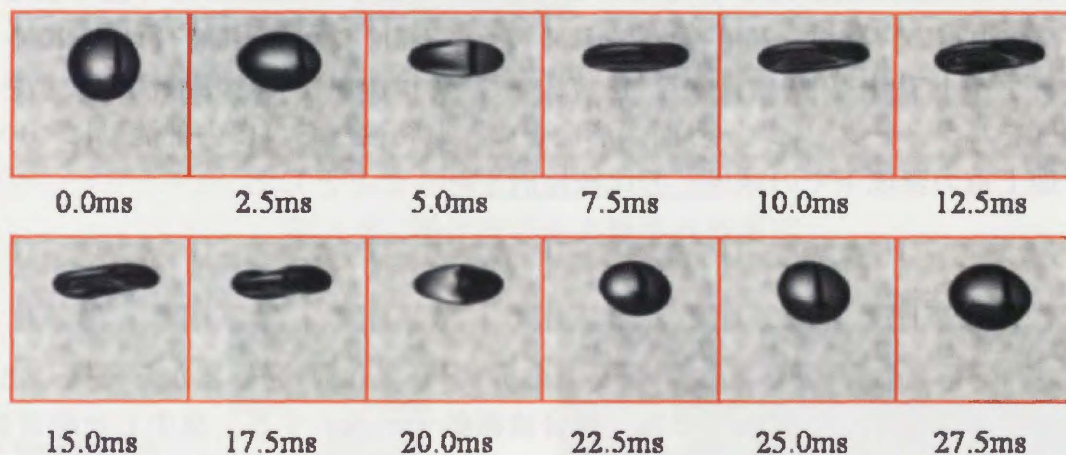


図3-1 浮遊液滴の界面変形挙動の計測結果例

無容器過冷却凝固を用いた材料創生や高温熔融物質の高精度物性測定を行う場合、熔融材料を空中に液滴状態で浮遊させる必要がある。地上の通常重力環境において、液滴を浮遊保持するためには、静電浮遊や超音波浮遊などの浮遊装置を使用する必要がある。液滴を何らかの力によって浮遊保持する場合、重力が、浮遊液滴の界面変形や変形や振動や回転の挙動に影響を及ぼす可能性があるものの、重力の影響がどのように働くかについて調べられてきていなかった。すなわち、地上での

重力に釣り合った浮遊力を試料に印加する場合、重力の影響により大きく偏平した形状になってしまう、という問題が顕在化する。一方、微小重力環境においては、重力に打ち勝つための浮遊力を必要とせず、位置のコントロールのために極わずかな力だけを作用させればよい。そのため、大型で真球に近い液滴を浮遊させることが可能となる。これによって、地上では不可能な大型で真球に近い液滴の大変形による非線形挙動を容易に創出することが可能となる。

これによって、地上では実験不可能な浮遊液滴の非線形でダイナミックな変形挙動を実現するとともに、その可視化観察を行うことができる。この宇宙実験結果と地上研究結果を比較検討するとともに、理論解析ならびに数値解析との対比を行うことによって、無容器化冷却凝固を用いた新材料の創製や高温熔融物質の高精度物性測定に資するための、浮遊液滴の非線形ダイナミクスに関する科学的な知見を構築することができる。

本研究で用いた超音波浮遊システムは、特に、1 cm オーダーの大型の液滴を浮遊させることが可能な浮遊システムとなっている。本章においては、地上重力環境における実験とともに、航空機を用いた微小重力環境下での液滴浮遊実験を行い、液滴の界面変形と内部流動を計測し、特に重力の及ぼす影響について明らかにすることとした。航空機を用いた微小重力実験は、ダイヤモンドエアサービス株式会社が所有する実験用航空機 G-II を使用して、2004 年度ならびに 2005 年度の計 2 回行った。微小重力実験は、2004 年度は 5 フライトで計 72 回の実験を行い、2005 年度は 4 フライトで計 49 回の実験を行った。実験では、保持できる液滴の大きさや音場強度をパラメータとして、界面変形などの浮遊特性ならびに内部流動について調べ、地上重力環境下での結果との比較検討を行うこととした。

3-2 実験装置

図 3-2 に超音波浮遊実験装置の概要図を示す⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁵⁾。関数発信器から発振した正弦信号をアンプを介して増幅した後、超音波振動子へ入力する。発生した超音波は、超音波振動子に接続されたホーンにより振幅を増幅し空間中に伝送される。下側ホーンから発生させた超音波は、上側ホーンからの反射波と重畳によって、上下ホーン間に音響定在波を形成する。この定在波中に注入された液滴は、音響放射圧により定在波中の特定の位置に保持される。実験では、図 3-3 に示す直径約 1mm のプローブマイクロフォン(Bruel&Kjaer 4182)とトラバース装置を用いて、あらかじめ音圧分布を計測し、定在波が形成されているのを確認する。音圧分布の測定は、トラバース装置を用いて、ホーン中心軸上から水平方向に 2mm ずつ、鉛直方向に 1mm ずつのメッシュに区切って計測した。

液滴径ならびに液滴の内部流動は、高速ビデオカメラを用いた画像処理より行う

こととした。図 3-4 に内部流動観測実験の概要図を示す。浮遊させた液滴には、直径 $4\mu\text{m}$ 、比重 1.02 のナイロン粒子をトレーサーとして混入し、浮遊液滴の赤道付近にシートレーザを当て、その水平断面を上方からハイスピードカメラ(Photoron 社製 FASTCAM-MAX)を用いて観測した。

観測実験では、地上での通常重力実験とともに、ダイヤモンドエアサービス社の所有する実験用航空機 Gulfstream-II を使用した微小重力実験を行った。微小重力環境を利用した液滴保持実験結果を地上実験の結果と比較することとした。実験では音響定在波を形成した後、微小重力の間水液滴をシリンジで注入し、保持された液滴の挙動を CCD カメラで撮影し、その液滴径は CCD カメラの画像のより算出することとした。また浮遊液滴の内部流動は通常重力実験と同様に液滴の赤道付近にシートレーザをあて、その水平断面を上方より観測することとした。

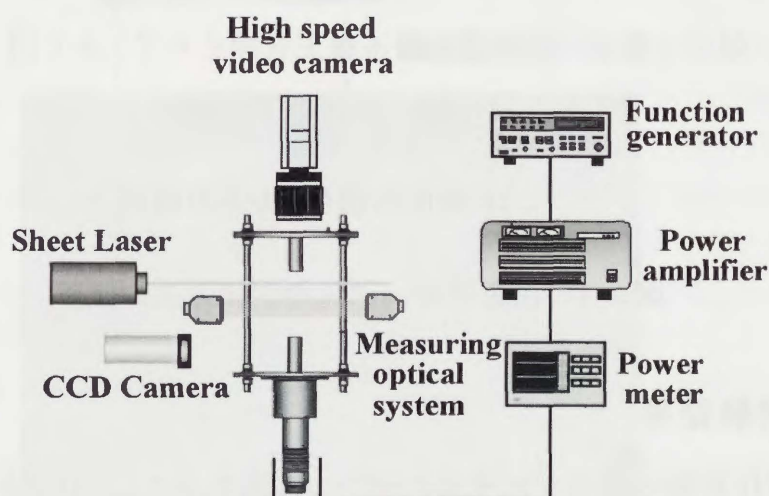


図 3-2 超音波浮遊実験装置概要図

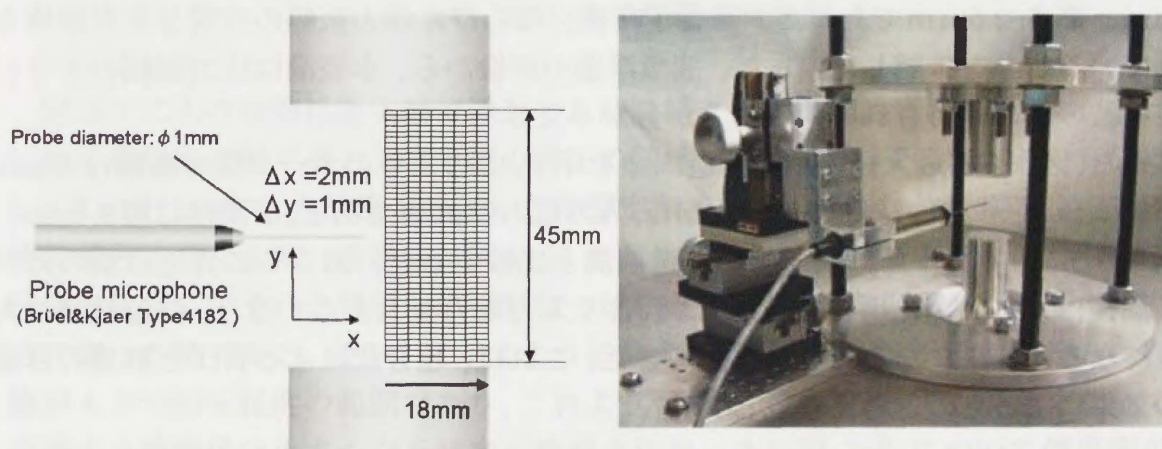


図 3-3 音圧分布計測システム

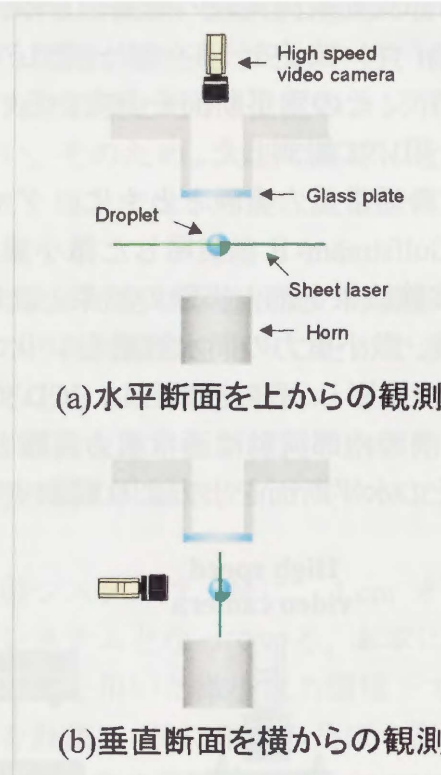


図 3-4 浮遊液滴内部流動観測方法の概要

3-3 地上実験結果

図 3-5 に音圧計測の結果と水液滴の保持の結果を示す。このときのホーン間の距離は 46mm、ホーン直径は 36mm、下側ホーンへの入力周波数は 19.3kHz、入力電力は 15W である。代表液滴径として、画像より下から 2 番目の水液滴径は幅 3.6mm、高さ 2.6mm であった。音響定在波、ならびに圧力振幅の空間分布が形成されていることを確認した。また、液滴浮遊の画像から、水液滴は圧力振幅の小さい定在波の節で保持されていることが分かった。

また、図 3-6 に最大径の液滴浮遊画像を示す。このときのホーン間の距離は 46mm、下側ホーンへの入力周波数は 19.3kHz、入力電力は 30W である。液滴径は幅 9.5mm、高さ 3.5mm であった。図 3-5 の浮遊液滴と比較すると、図 3-6 の浮遊液滴の方が液滴径は大きいが扁平であった。これより入力電力を大きくすると、浮遊液滴は大きくなるが扁平になることが確認できた。これは、超音波による音圧と液滴の自重の効果によるものと考えられる。

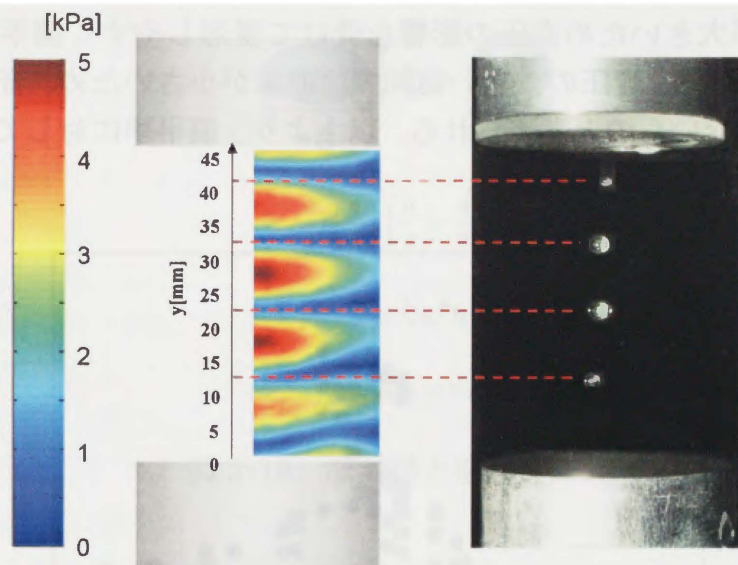


図 3-5 テスト部音圧分布と浮遊液滴の位置の比較

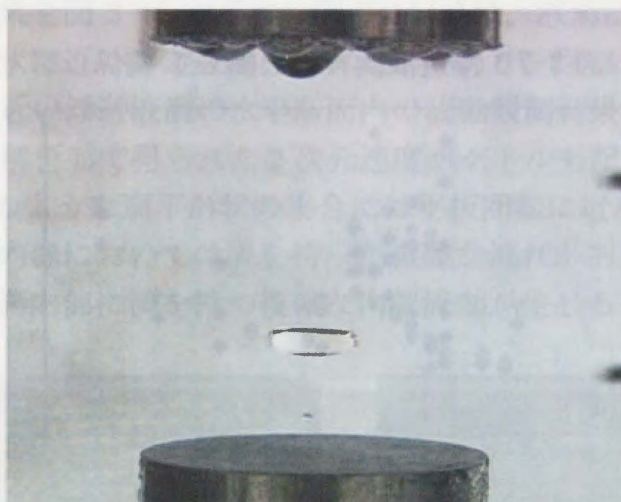


図 3-6 最大径の浮遊液滴画像

図 3-7 に水の液滴浮遊実験で浮遊した液滴径とテスト部の音圧の関係を、図 3-8 には浮遊液滴の扁平率とテスト部の音圧の関係を示す。ここでテスト部の音圧は図 3-9 に示すように、水液滴が浮遊した音響定在波の節の上下に位置する腹の音圧の平均値とした。また、液滴径は図 3-10 に示すように、液滴を上下に扁平な回転楕円体と仮定してそれと等価な体積を持つ球の直径とし、また扁平率は液滴の幅を高さに割った値である。図 3-7 に示すように最大液滴径 7mm 程度が浮遊するのは音圧値が 4.5～6kPa 程度の範囲であり、これより音圧が大きくなっても小さくなっても浮遊する液滴径は小さくなる傾向が確認された。また図 3-8 について扁平率が 1 に近いほど浮遊液滴が球形に近くなることを意味しているが、全体的には音圧が大きくなるにつれて扁平率が大きくなる傾向が確認された。ここで 4.5～6kPa の範囲

の液滴はその径が大きいため音圧の影響を受けて変形しやすく偏平な形状となったと考えられる。一方、音圧の大きい範囲では液滴が小さいため、音圧の影響が小さくあまり変形しないものと考えられる。以上より、偏平率に対しては、音圧と液滴径が影響する可能性が示唆された。

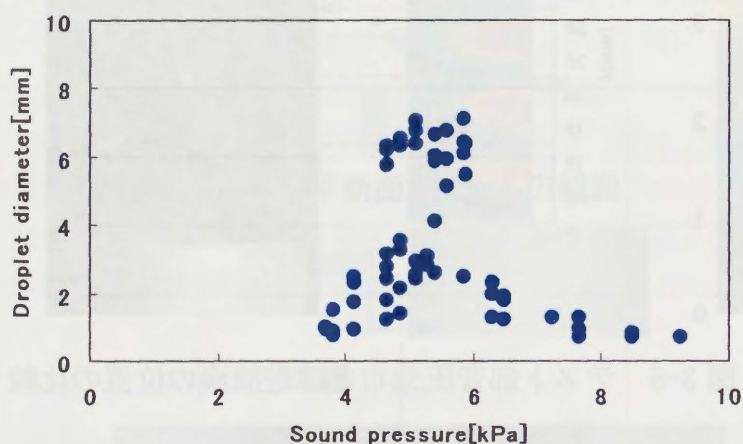


図 3-7 浮遊液滴径と音圧の関係

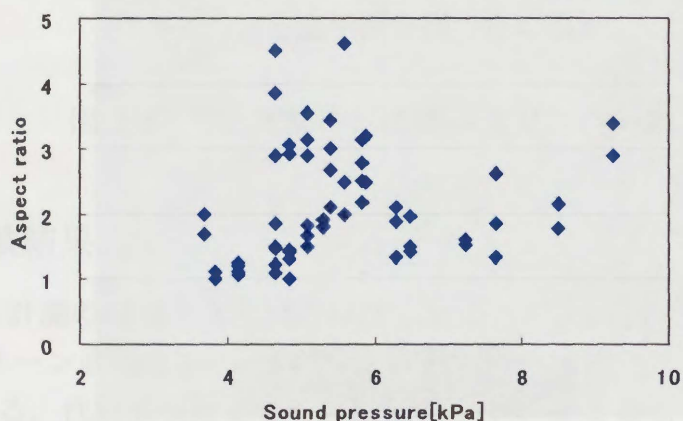


図 3-8 音圧と偏平率の関係

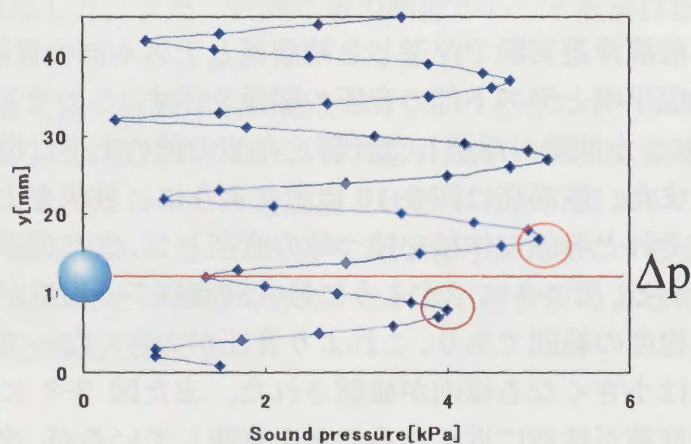
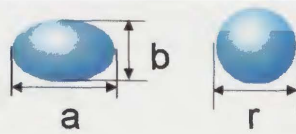


図 3-9 音圧の定義



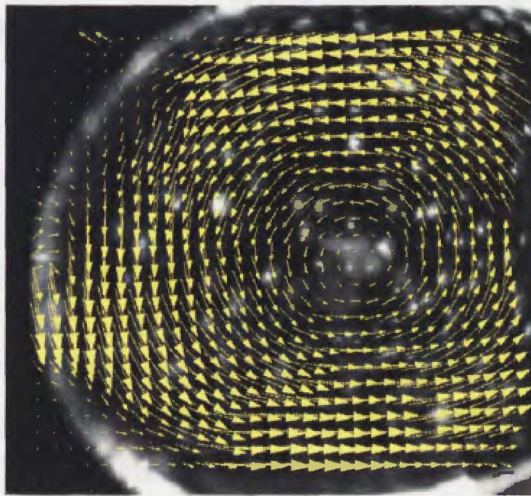
$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3$$

$$r = \sqrt[3]{a^2 b}$$

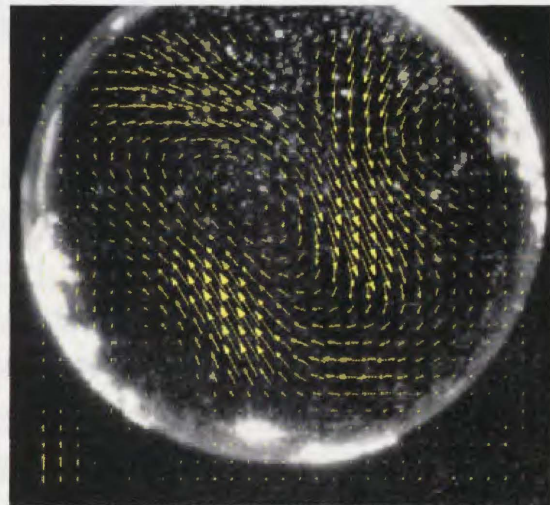
$$\text{Aspect ratio} = \frac{a}{b}$$

図 3-10 液滴径と偏平率の定義

超音波浮遊システムを用いて、地上の実験室で浮遊液滴の水平断面内部流動を上から観測した結果を図 3-11 に示す。図 3-11(a)は、液滴は幅 10.0mm 高さ 3.6mm と扁平な円盤形状に近い浮遊液滴の内部流動であり、図 3-11(b)は幅 4.0mm 高さ 2.9mm と球形に近い浮遊液滴の水平断面内の流動観測結果である。図 3-11 には、内部流動を PIV 解析して得られた 2 次元速度ベクトルも記載している。この結果から、図 3-11(b)のような扁平形状の場合には平板回転に近く、図 3-11(b)のように球形に近い液滴内部においては渦を持った複雑な流れがあることが分り、条件によっては、浮遊液滴内部に渦を持つ複雑な内部流動が生じる可能性が示唆された。



(a) D=10mm, W=3.6mm



(b) D=4.0mm, W=2.9mm

図 3-11 浮遊液滴内部の速度分布の観測結果

3-4 微小重力実験結果

3-4-1 実験の概要

微小重力環境下において液滴浮遊実験を行うことには、地上実験と比較して大きく三つの利点がある。一つ目は、重力がなくなることによって通常重力での実験では得られない大型液滴の浮遊が可能となることである。二つ目は、微小重力下では液滴浮遊に必要となる音圧が小さくために超音波による外乱などの影響が少ない状態での液滴浮遊が可能となることである。三つ目は、地上での液滴浮遊では超音波の音圧と自重の効果により浮遊液滴が扁平になってしまうが、微小重力下では地上で得られないより球形に近い液滴の浮遊が可能となることである。すなわち、液滴浮遊に対しては、将来的に利用が想定される宇宙ステーションなどの微小重力環境などにおいて実験を行うことによって、地上の通常重力環境下では得られない浮遊液滴のデータが得られることが期待される。

航空機の放物線飛行による微小重力実験の重力レベルは10-2G程度と他の方法と比べて低いものの、微小重力継続時間が20秒程度と比較的長く、実験回数も多い。また、実験機器搭載スペースが大きく、実験者が搭乗してオペレーションを行えるといった利点がある。これらの特徴は、本研究の対象とする液滴浮遊実験には最適な環境であることから、本研究においては、航空機による微小重力環境を利用して実験を行うこととした。微小重力実験は、ダイヤモンドエアサービス株式会社が所有する実験用航空機G-IIを使用したパラボリックフライトにより得られる約20秒間の微小重力状態を利用して行った。

微小重力実験における浮遊液滴内部流動観測実験では、まず微小重力状態の開始とともに、シリンジを用いて比重1.02のナイロン粒子をトレーサーとして混入した水液滴をテスト部内に注入し、その特性をCCDカメラによって観測した。またデジタル寸法計を用いて液滴径を計測することとした。そして液滴注入後、ある程度液滴の浮遊が安定した段階で浮遊液滴にシートレーザーを当て、ハイスピードカメラによって内部流動を観測することとした。内部流動観測方法の概要を、図3-4に示している。シートレーザーを浮遊液滴に水平に当て、その水平断面を上から観測する方法と、シートレーザーを浮遊液滴に垂直に当て、その垂直断面を横から観測する方法の2種類で行った。実験環境としては、実験システムを航空機内に設置した状態での通常重力と微小重力の両環境での観測結果の比較検討を行うこととした。

図3-12と図3-13に微小重力中の航空機内の重力加速度を計測した結果を示す。図3-12に示すように、1.8G程度の重力超過の後に約20秒間の微小重力状態が継続していることが分かる。また図3-13に示すように、微小重力状態であっても 10^{-2} G程度の残留重力が振動的に存在していた。

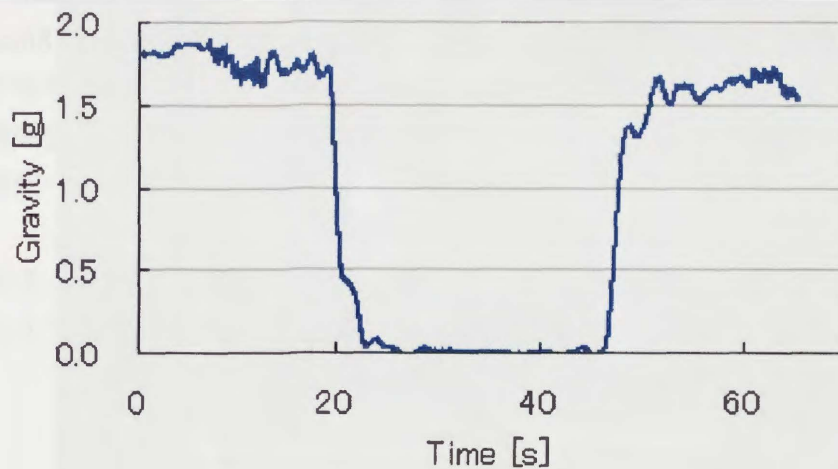


図 3-12 z 軸重力加速度

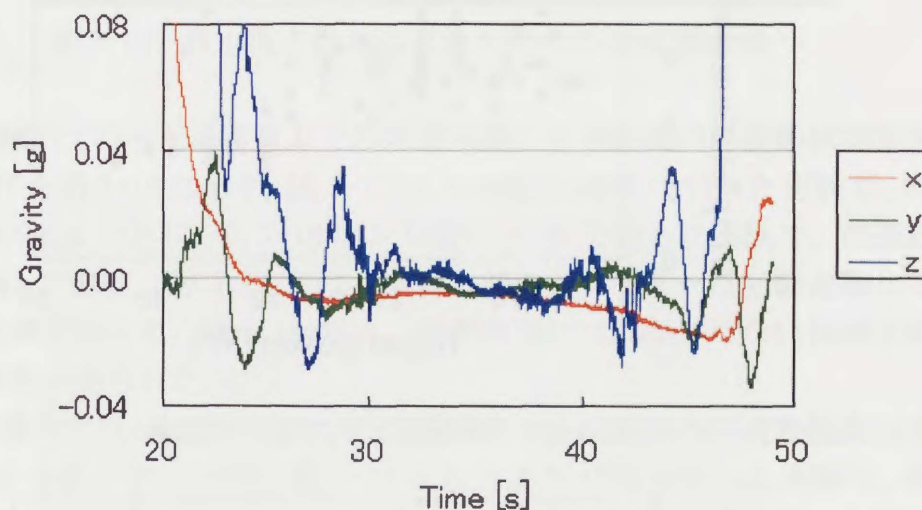


図 3-13 x, y, z 軸重力加速度

3-4-2 手動注入実験結果

表 3-1 に各実験においてパラメータとした入力電力などの実験条件を示す。図 3-14 に航空機内に実験装置を設置し、通常重力と微小重力での両環境で行った実験での浮遊液滴径と入力電力の関係を示す。図 3-15 に浮遊液滴の扁平率と入力電力の関係を示す。図 3-14 より航空機内通常重力実験では 4mm を越えるような液滴を浮遊させることが出来なかったが、微小重力実験では 9.5mm と大型液滴の浮遊が可能であった。図 3-7 で示した地上での液滴浮遊実験においても浮遊した水液滴の最大液滴径は 7.1mm であったので、これと比較しても微小重力では大型の液滴の浮遊が可能であるという事が確認された。また、図 3-15 より浮遊液滴の扁平率が入力電力に比例して大きくなっており、微小重力では航空機内通常重力に比べてよ

り小さな入力電力でより球形に近い水液滴を浮遊させられる事が確認された。

図 3-16 に微小重力実験で浮遊した最も大きい幅 12.1mm、高さ 5.8mm の液滴の画像を示す。このときホーン間の距離は46mm、下側ホーンへの入力周波数は19.3mm、入力電力は 15W であった。図 3-6 の通常重力環境下での最大浮遊液滴との比較からも、微小重力環境下では通常重力環境下よりも大型で球形に近い液滴を浮遊させることが出来る事が確認できる。

以上より、微小重力環境下においても地上で用いた実験システムを用いての水液滴の浮遊が可能である事が確認され、また微小重力環境下ではより小さな入力電力でより大型で球形の液滴の浮遊が可能である事が示された。

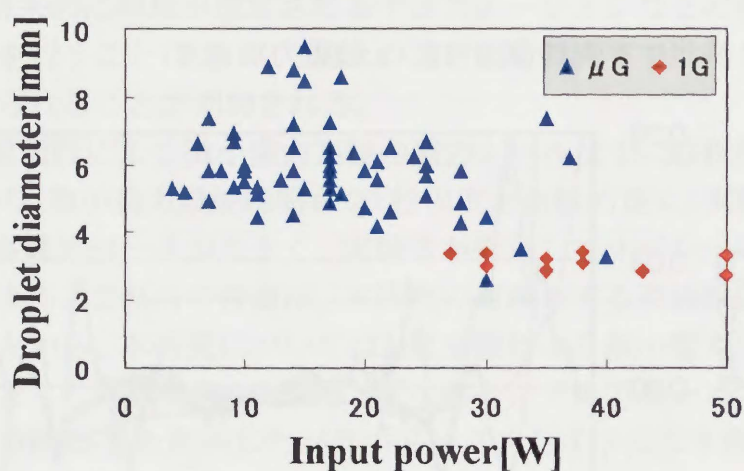


図 3-14 液滴径と入力電力の関係

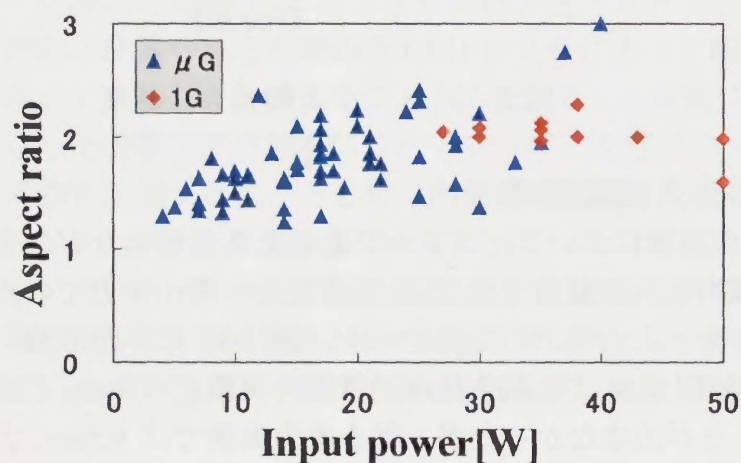


図 3-15 偏平率と入力電力の関係

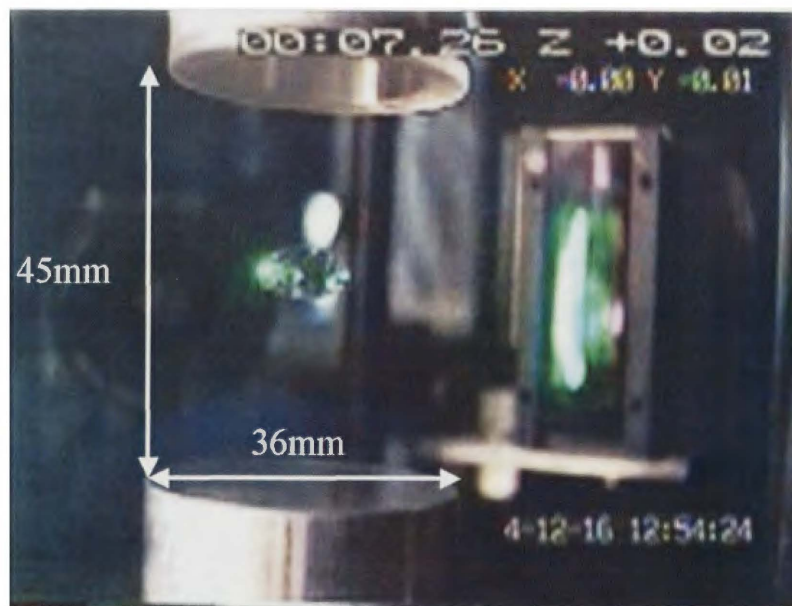


図 3-16 微小重力における最大径の浮遊液滴画像

次に、航空機内で行った通常重力での浮遊液滴の水平断面内部流動観測結果の代表例を図 3-17 と図 3-18 に示す。図 3-17 は入力電力 50W で行った実験で、浮遊液滴の径は幅 3.9mm であり、図 3-18 は入力電力 30W で行った実験で、浮遊液滴の径は幅 3.8mm である。図 3-17 では、液滴内部のトレーサーは回転運動しているような観測結果となった。図 3-18 では、液滴内部には回転ではない複雑な流れが観測された結果が得られた。

次に、航空機内で行った微小重力での浮遊液滴の水平断面内部流動観測結果の代表例を図 3-19 と図 3-20 に示す。図 3-19 は入力電力 17W で行った実験で、浮遊液滴の径は幅 7.1mm、高さ 5.5mm であり、図 3-20 は入力電力 33W で行った実験で、浮遊液滴の径は幅 4.2mm、高さ 2.4mm である。図 3-19 では微小重力のために 17W と通常重力での実験に比べて小さい入力電力で行い、図 3-20 では微小重力であるが 33W と通常重力での実験と同程度の大きい入力電力で実験を行った。航空機内微小重力においても、図 3-19 のような液滴が回転運動し、内部のトレーサーもその回転運動に伴って回転しているような観測結果が得られた。また、図 3-20 では液滴の並進運動が大きいためにトレーサーも横方向に動いているように見えるが、その内部は複雑な流動が観測された。

これら航空機内の通常重力と微小重力で浮遊液滴の水平断面内部流動を観測した結果より、入力電力の小さい超音波の場合においては渦を持つ内部流動は生じず、入力電力の大きい超音波の場合においてのみ渦を持つ内部流動が生じる可能性が示唆されたが、液滴を音場中に注入する際の注入方式が手動であったことによる初期条件が内部流動に及ぼす影響についての不確実性が残った。

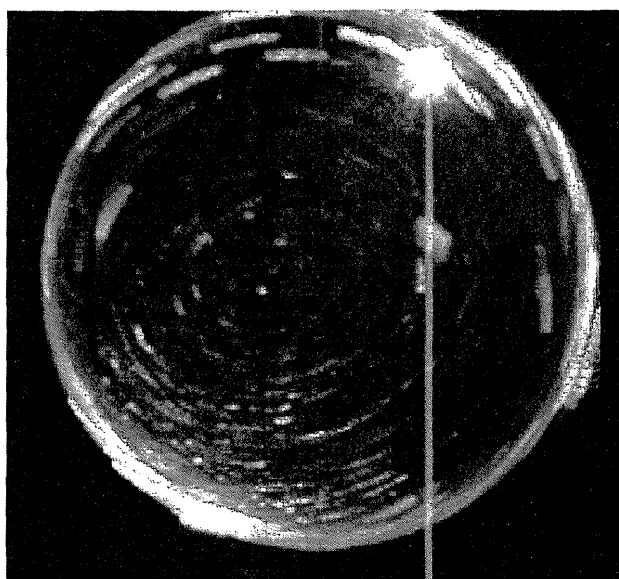


図 3-17 航空機内通常重力での水平断面内部流動観測
(入力電力 50W、液滴幅 3.9mm)

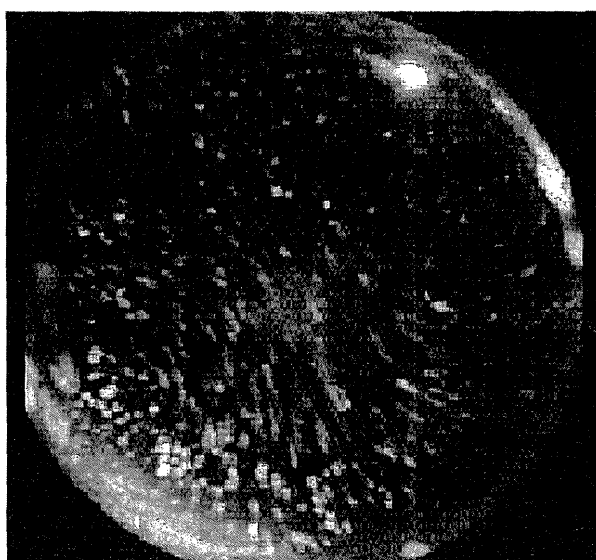


図 3-18 航空機内通常重力での水平断面内部流動観測
(入力電力 30W、液滴幅 3.8mm)

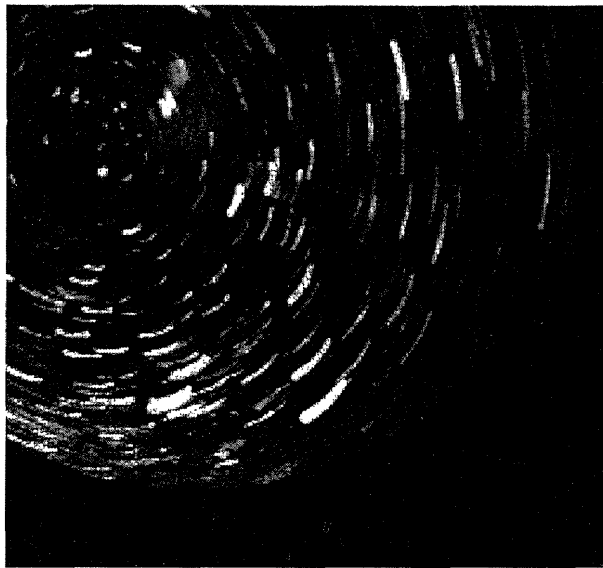


図 3-19 航空機内微小重力での水平断面内部流動観測
(入力電力 17W、液滴幅 7.1mm、高さ 5.5mm)

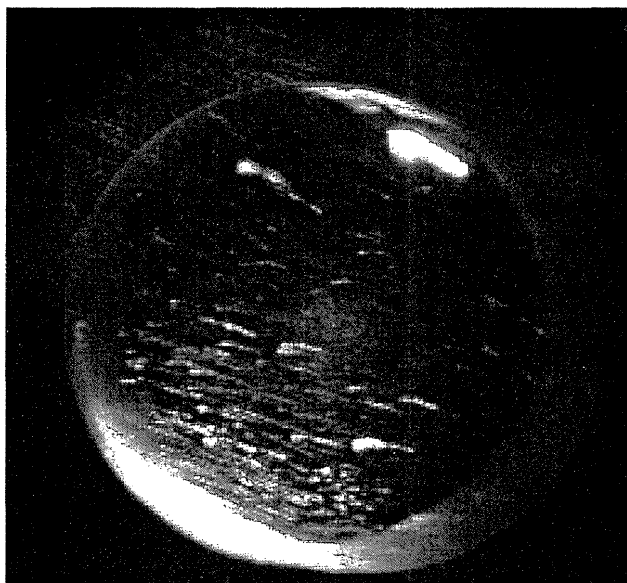


図 3-20 航空機内微小重力での水平断面内部流動観測
(入力電力 33W、液滴幅 4.2mm、高さ 2.4mm)

3-4-3 固定注入実験結果

以上の実験結果より、液滴を音場中に注入する際の注入方式による初期条件が内部流動に及ぼす影響についての不確定性が残った。そこで、実験装置は、図 3-2 に示すものと同様のものではあったが、液滴を注入する際の不確定性を小さくするために、液滴注入用のシリンジを図 3-23 に示すようなトラバース装置に固定して、テ

スト部ホーン間の音響定在波の所定の節に注入するとともに、図 3-22 に示すように液滴の内部流動を、上方ならびに横方向から 2 台のハイスピードカメラによって同期撮影することによって、液滴の界面変形と内部流動の関係をより関連させて計測することとした。

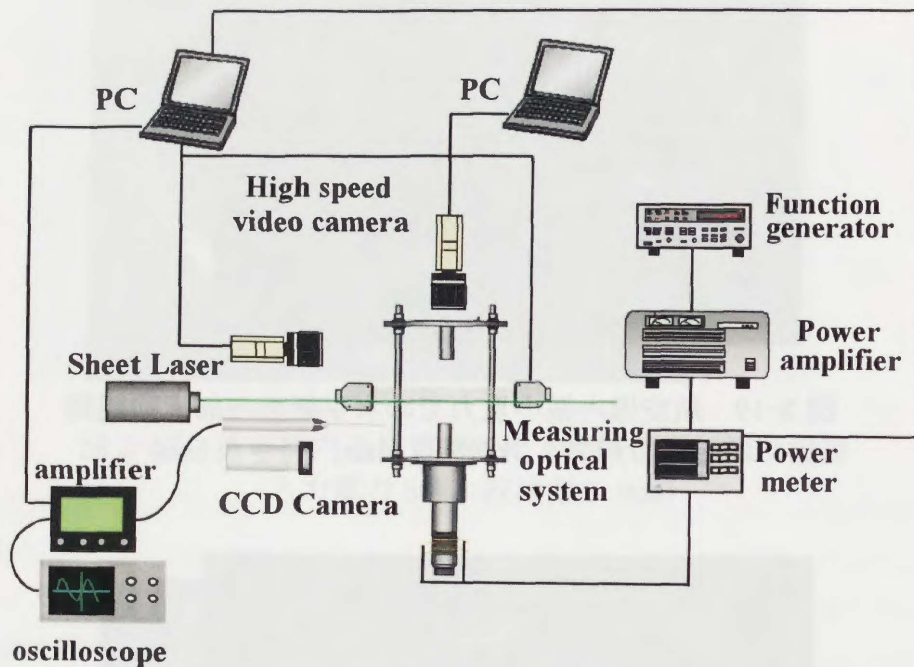


図 3-22 水平・垂直方向同期観測システム

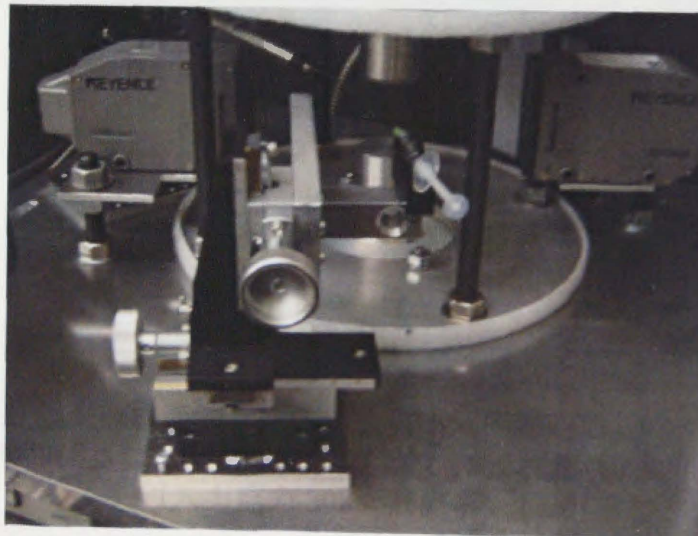


図 3-23 液滴注入装置

図 3-24 に航空機内微小重力環境における浮遊液滴の画像を示す。液滴径は幅 9.8mm、高さ 7.0mm であり、地上重力環境下における浮遊液滴より大型で真球に近い液滴の保持を確認した。図 3-25 に浮遊液滴径と音圧の関係、図 3-26 に浮遊液滴の扁平率と音圧の関係を示す。図 3-25 より、保持される液滴の大きさは音圧の大きさに反比例する傾向が見られた。また図 3-26 より、保持される液滴の扁平率は音圧の大きさに比例する傾向が見られた。



図 3-24 微小重力環境下における最大径の浮遊液滴画像

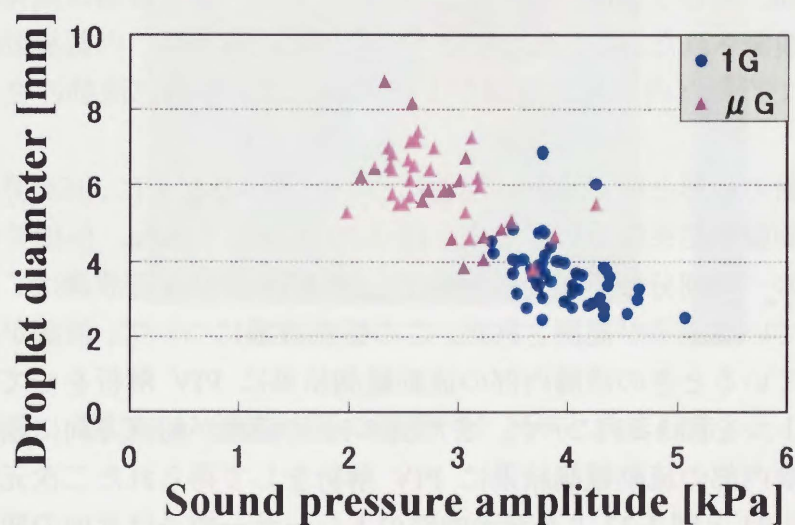


図 3-25 液滴径と音圧の関係

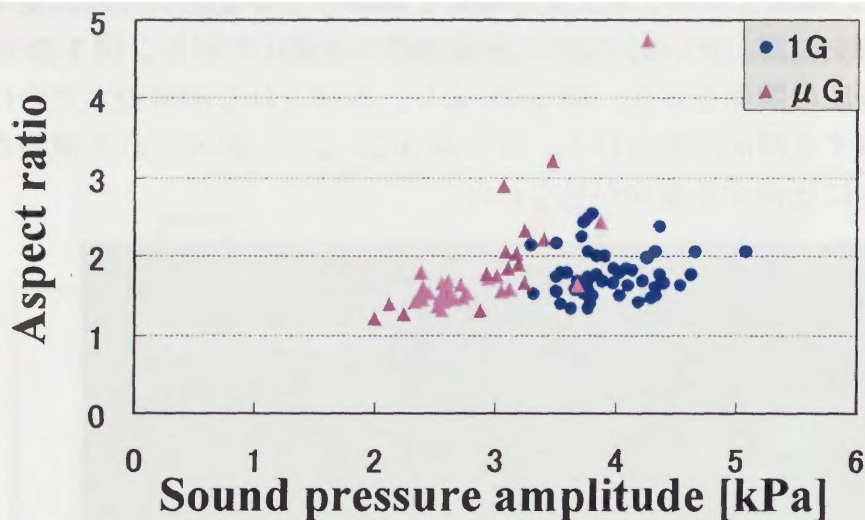


図 3-26 扁平率と音圧の関係

図 3-27 に通常重力環境下浮遊液滴の内部流動観測結果に PIV 解析をして得られた二次元速度ベクトルを示す。この時音圧は 3.8kPa、液滴径は幅 4.3mm、高さ 2.8mm であった。この内部流動をより詳細に調べるために算出した液滴内部の渦度分布を図 3-28 に示す。図 3-27 と図 3-28 より、浮遊液滴内部に渦を有する内部流動が生じる可能性が示唆された。また図 3-29 に航空機内微小重力環境下で行った内部流動観測結果に PIV 解析をして二次元速度ベクトルを示す。この時音圧は 2.6kPa、液滴径は幅 8.4mm、高さ 5.2mm であった。図 3-29 より、浮遊液滴は剛体的に回転している様子が観測された。微小重力環境下で行った浮遊液滴の内部流動観測では地上重力環境下で行った内部流動観測のように渦を有する内部流動の発生は確認されなかった。

次に液滴界面の変形と内部流動の関係について調べるために、液滴界面が振動する時の内部流動観測結果について示す。図 3-30 に音圧 3.4kPa、体積等価直径 4.9mm の振動液滴の一周分の界面変形を示す。図 3-30 より浮遊液滴は二次の振動モードで振動している様子が観測された。この振動液滴について、液滴が鉛直方向に伸びようとしているときの液滴内部の流動観測結果に PIV 解析をして得られた二次元速度ベクトルを図 3-31 に示す。また図 3-32 に液滴が鉛直方向に縮もうとしているときの液滴内部の流動観測結果に PIV 解析をして得られた二次元速度ベクトルを示す。図 3-31 と図 3-32 より液滴内部のトレーサ粒子は界面の変形に伴って動く様子が観測された。またそれと同時に、非対称で複雑な流れも観測された。

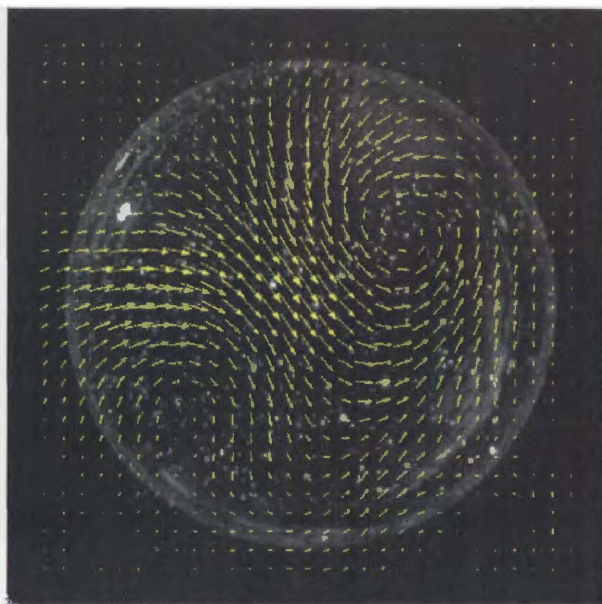


図 3-27 浮遊液滴内部流動の PIV 解析による 2 次元速度ベクトル

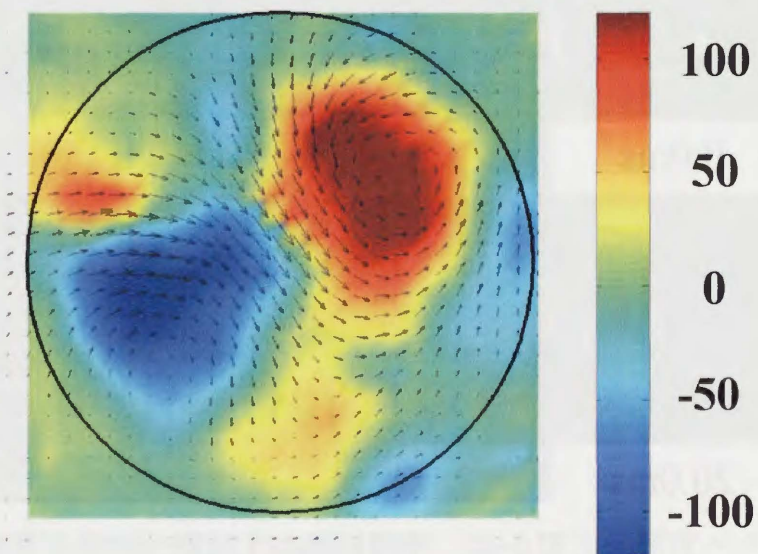


図 3-28 浮遊液滴の速度ベクトルと渦度分布

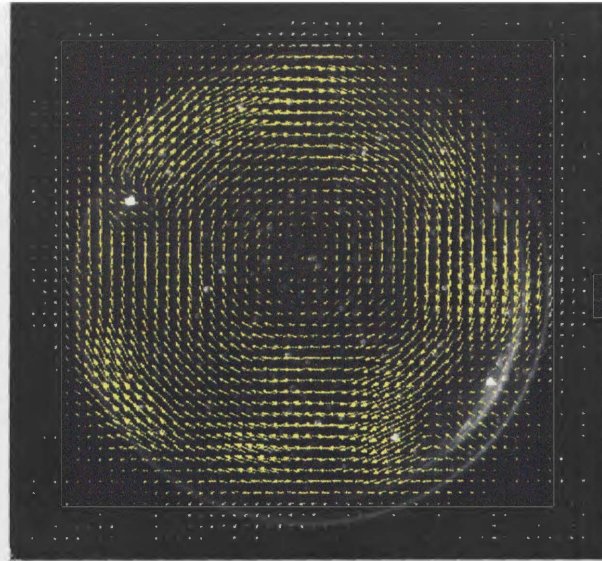


図 3-29 界面振動のない液滴内部流動の PIV 解析による 2 次元速度ベクトル

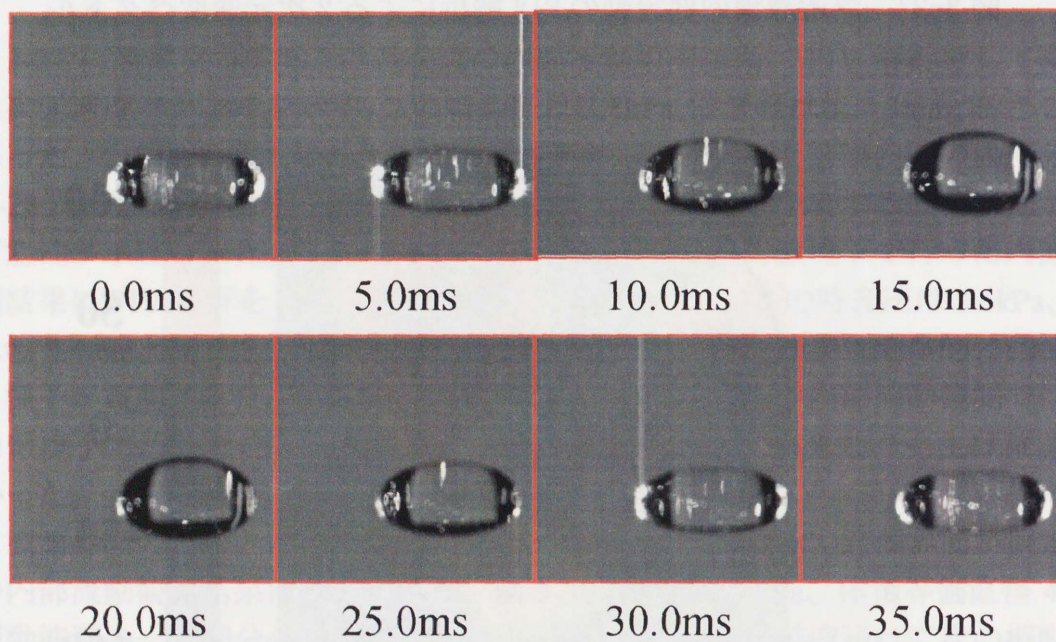


図 3-30 浮遊液滴の 1 周期分の界面変形

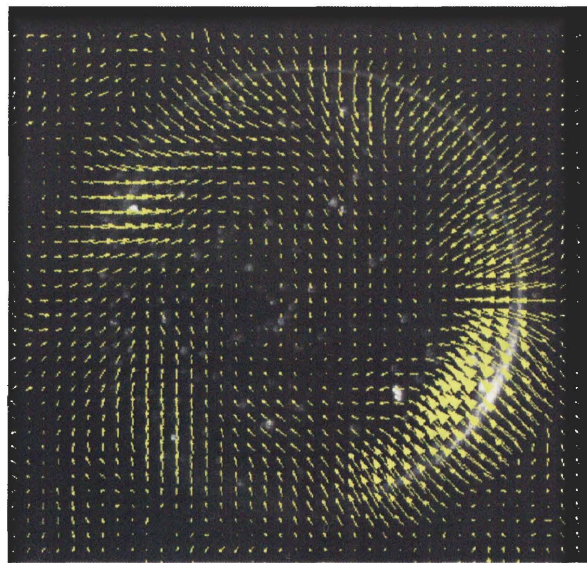


図 3-31 界面振動する液滴内部流動の PIV 解析による 2 次元速度ベクトル

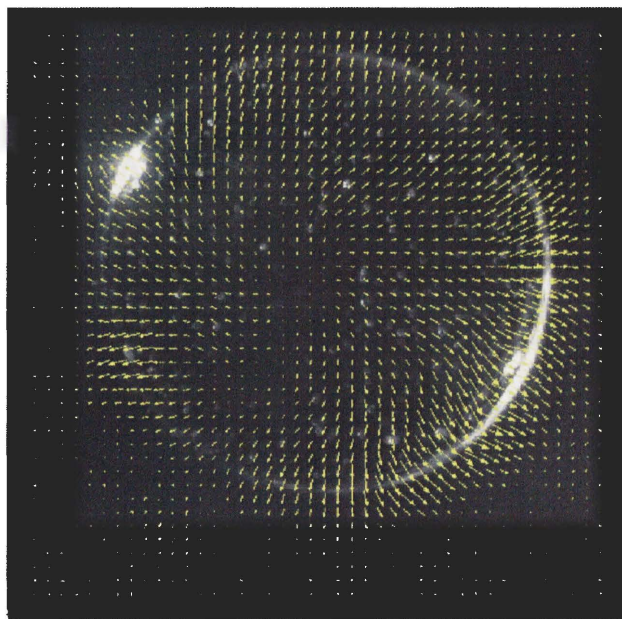


図 3-32 界面振動する液滴内部流動の PIV 解析による 2 次元速度ベクトル

3-5 まとめ

強力超音波を用いた超音波浮遊システムを用いて空中に浮遊させた透明大粒径液滴の変形挙動や内部ならびに外部流動挙動を可視化観察することによって大粒径の浮遊液滴の界面変形挙動と内部および外部流動との関連を明らかにするための液滴浮遊実験を実施した。

- ・超音波浮遊実験によって、大型浮遊液滴の内部に複雑な渦を有する内部流れの発生する場合のあることを通常重力環境と微小重力環境の両方において確認することができた。
- ・浮遊液滴の界面変形に対しては、保持力との関係で扁平形状になるなど重力の影響が大きく関与している。本研究により、界面変更と内部流動の関係を調べるためには、重力の影響を排除することができる微小重力実験が極めて有効であることが示された。

参考文献

- (1) A. V. Anilkumar, C. P. Lee, and T. G. Wang, "Stability of an acoustically levitated and flattened drop: An experimental study," *Phys. Fluid A*, Vol. 5, No. 11, November 1993, pp. 2763-2774
- (2) C. P. Lee, A. V. Anilkumar, and T. G. Wang, "Static shape and instability of an acoustically levitated liquid drop," *Phys. Fluid A*, Vol. 3, No. 11, November 1991, pp. 2497-2515
- (3) E. H. Trinh, "Compact acoustic levitation device for studies in fluid dynamics and material science in the laboratory and microgravity," *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 56, No. 11, November 1985, pp. 2060-2065
- (4) Eugene H. Trinh and Chaur-jian Hsu, "Equilibrium shapes of acoustically levitated drops," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 79, No. 5, May 1986, pp. 1335-1338
- (5) Sang K. Chung and Eugene H. Trinh, "Internal flow of an electrostatically levitated droplet undergoing resonant shape oscillation," *Phys. Fluid*, Vol. 12, No. 2, February 2000, pp. 249-251
- (6) E. Trinh, A. Zwern and T. G. Wang, "An experiment study of small-amplitude drop oscillations in immiscible liquid systems," *J. Fluid Mech.* (1982), Vol. 115, pp. 453-474
- (7) E. Trinh and T. G. Wang, "Large-amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations," *J. Fluid Mech.* (1982), Vol. 122, pp. 315-338

- (8) K. Ohsaka, A. Rednikov, and S. S. Sadhal, "Noncontact technique for determining the thermal diffusivity coefficient on acoustically levitated liquid drops," *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 74, No. 2, February 2003, pp. 1107-1112
- (9) Hisao Azuma and Shoichi Yoshihara, "Three-dimensional large-amplitude drop oscillations: experiments and theoretical analysis," *J. Fluid Mech.* (1999), Vol. 393, pp. 309-332
- (10) A. B. Pandit, J. Varley, R. B. Thorpe and J. F. Davidson, "Measurement of bubble size distribution: an acoustic technique," *Chemical Engineering Science*, Vol. 47, No. 5, 1992, pp. 1079-1089
- (11) Yutaka Abe, Masahiro Kawaji, and Tadashi Watanabe, "Study on the bubble control by ultrasonic wave," *Japanese Journal of Multiphase Flow*, Vol.13, No.4 1999, pp.372-386 (in Japanese)
- (12) Yutaka Abe, Masahiro Kawaji, Tadashi Watanabe, "Study on the bubble motion control by ultrasonic wave," *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26(2002), pp. 817-826.
- (13) Y. Abe, T. Watanabe, K. Adachi, and N. Yamamoto "Development of the Translational Motion Control System for Bubble in Liquid by Acoustic Standing Wave," *Journal of Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.66, No.644, B, 2000, pp. 238-244 (in Japanese)
- (14) Yutaka Abe, Norikazu Yamamoto, Fumihito Nakatani, and Kazunari Adachi, "Study on the bubble motion control by acoustic standing wave," *Journal of Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.71, No.705, B, 2005, pp. 77-84 (in Japanese)
- (15) Yutaka Abe and Kazuyoshi Aoki, "Study on levitated droplet control by ultrasonic wave," *Journal of Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 70, No.692, B, 2004, pp. 242-247 (in Japanese)

第4章 理論解析

4.1 はじめに

4.1.1 概要

現在多くの生き物が住んでいる地球は、北極と南極を結ぶ軸の周りにたえず自転を行っている。そしてその自転によって地球は完全な球体ではなく少し扁平した形状をとっている。これと同じことは空中に浮遊する液滴にも言える。液滴を空中で回転させるとその形状は地球と同様次第に扁平楕円体となっていき、液滴のように構造上もろいものであれば回転数を上げすぎるといつか分裂してしまうであろう。

ではいつ液滴は分裂してしまうのか。その答えに少しでも近づくことが本研究の目的である。物質の挙動をあらわす支配方程式として流体力学の基礎方程式であるオイラー方程式を、また液滴の表面を一般的な曲面として取り扱うために微分幾何をそれぞれ用いることで、平衡状態にある回転液滴の形状について考察した。



図 4.1: 宇宙から見た地球



図 4.2: 水滴

4.1.2 研究の背景

純度の高い溶融液滴を非常にゆっくり冷却させた場合（徐冷），図 4.3 に示すように核の発生が抑制されて，溶融物は凝固点温度以下でも凝固しない過冷却現象がおこる．過冷却された溶融液滴はいったん核生成が始まると極めて速い速度で均質に凝固し，均質で高品位の結晶が合成されることが期待されている．

一方溶融液滴を空中に保持する無容器状態で冷却する場合，急速冷却であっても核の発生が抑制され，過冷却状態が実現される可能性がある．また無容器冷却の場合，異物の混合など容器からの影響を排除できることから，高温環境下での高精度物性測定などこれまでにできなかった計測が可能となる．

ここで問題となるのが空中に浮遊させたときの液滴の挙動である．浮遊しているとき液滴の表面は自由界面として振舞うことになり，そのような自由界面の変形挙動やそれによって誘起される内部流動や外部環境の影響などは，過冷却状態の達成や高精度物性測定などに大きな影響を与える可能性がある．そのため自由界面の挙動や内部流動について理論的考察を加えることは工学的に見て非常に重要な意味を持っているといえる．

ほかにも車などのエンジンにおける燃料噴霧を制御することで燃費の向上につながる可能性も示唆されているし，インクジェットプリンタのインク噴きつけ技術の向上にもつながってくると思われる．よって浮遊液滴の変形挙動について議論することは今後さまざまな分野での技術向上にむけて大きな意義を持っているといえる．本研究の目的は，それらの問題を解決する第一歩として，浮遊液滴を回転させたときに自由界面である表面がどのように変形を行うのかを理論的に取り扱うことにある．

4.2 曲面の微分幾何

4.2.1 序

本論で曲面の平均曲率などを取り扱うので，ここで曲面の微分幾何の基礎について述べておく．

4.2.2 空間内の曲面の概念

平面曲線が

$$y = f(x), \quad (4.2.1)$$

$$F(x, y) = 0, \quad (4.2.2)$$

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (4.2.3)$$

と表せるように，空間内の曲面も下のような 3 通りに表現できる：

$$z = f(x, y), \quad (4.2.4)$$

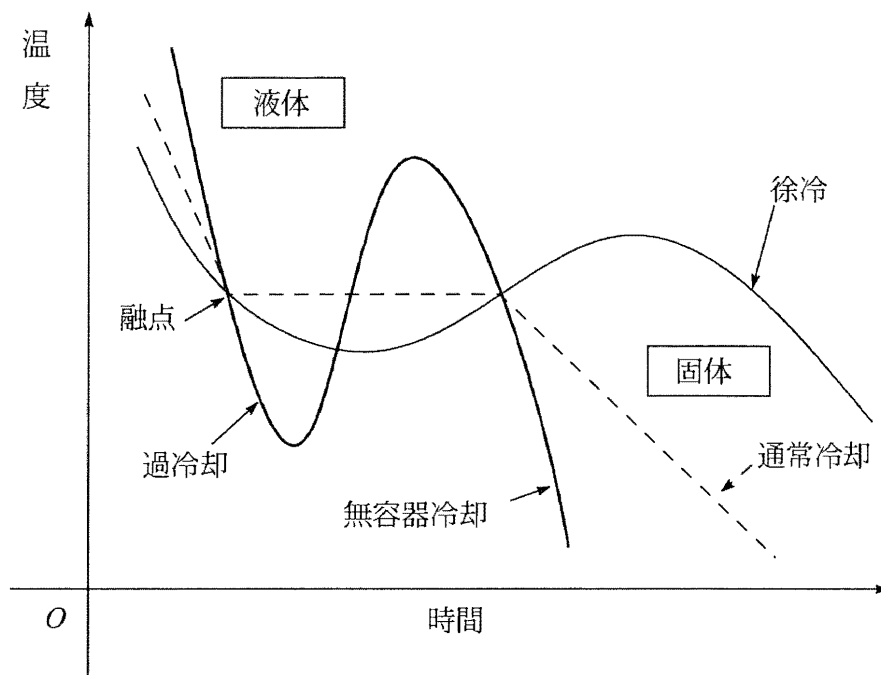


図 4.3: 過冷却

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4.2.5)$$

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (4.2.6)$$

ここで, $z = f(x, y)$ のグラフは f が微分可能なら滑らかな曲線になるが, (4.2.5) や (4.2.6) の場合にこれらの式がちゃんと曲面になっているためにはこれから述べる条件を満たす必要がある.

まず曲面が (4.2.5) の形で表されているときを考える. この曲面の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面は

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (4.2.7)$$

で与えられる (図 4.4). しかし $F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z(x_0, y_0, z_0)$ がすべて 0 のとき, (4.2.7) は平面を表してはいない. つまり点 (x, y, z) で (4.2.5) が曲面を表しているための条件はその点に接平面が存在する条件と同値であり, その条件はベクトル (F_x, F_y, F_z) が 0 でないことである.

次に (4.2.6) の場合を考える. 微積分学によると点 $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ における接

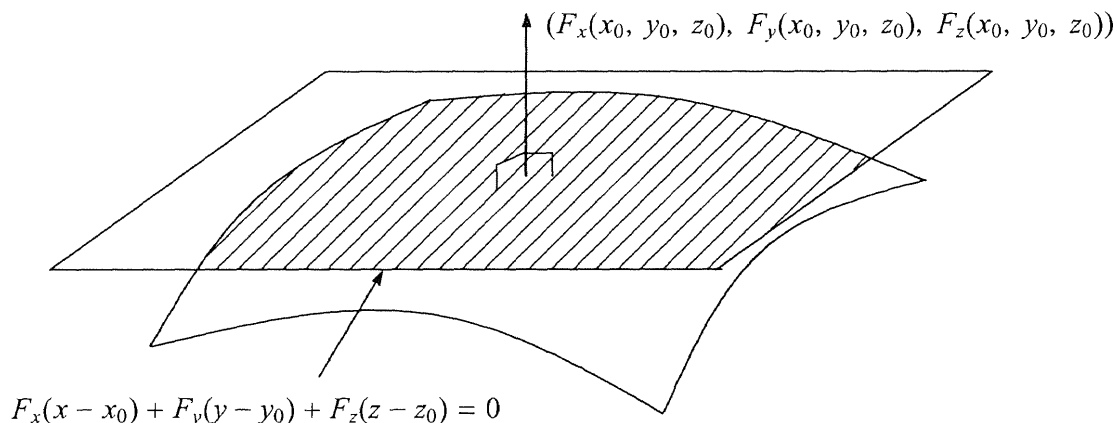


図 4.4: 接平面と接ベクトル

平面は次の形に書ける:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2.8)$$

ただし

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad z_0 = z(u_0, v_0). \quad (4.2.9)$$

(4.2.8) を展開してみると, この式が平面を表現しているための条件は (4.2.7) のときと同様,

$$\begin{vmatrix} y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u(u_0, v_0) & x_u(u_0, v_0) \\ z_v(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \quad (4.2.10)$$

の 3 つの行列式が同時に 0 にならないことである. 言い換えれば Jacobi 行列

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

がパラメータ平面 (u, v) のある領域 D 上の至るところで階級 2 のとき, (4.2.6) は空間内に曲面片を定義するという. ここで曲面片とは無限に続く曲面のうちの一部のことである. さらにこのとき線形代数によると, 2 つのベクトル $(x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v)$ は線形独立であるが, このことについては後で詳しく述べる.

4.2.3 曲面のパラメータ表示例

ここではいくつかの空間曲面のパラメータ表示について述べる.

例 1.1 球面 : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

このパラメータ表示として主に次の2つが考えられる:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}. \quad (4.2.12)$$

または

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v, \\ y &= a \cos u \sin v, \\ z &= a \sin u. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

(4.2.13) によるパラメータ表示では, (u, v) が領域 $\{(u, v); |u| < \pi/2\}$ を動くとき, (x, y, z) は球面から南北両極を除いた部分を動く. ただしこのとき v については 2π の任意性があるので, 対応は一对一ではない.

例 1.2 楕円面 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

このとき

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v, \\ y &= b \cos u \sin v, \\ z &= c \sin u \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

とすれば, 楕円面の南北両極以外のすべての面を覆うことができる. ただしここでも $\{(u, v); |u| < \pi/2\}$ である.

例 1.3 一葉双曲面 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

この場合には

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v, \\ y &= b \cosh u \sin v, \\ z &= c \sinh u \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

とすれば (u, v) がパラメータ平面上を制限なく動くとき (x, y, z) は一葉双曲面を完全に覆う. しかし v には 2π の任意性があるので対応は一对一ではない.

例 1.4 二葉双曲面 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

この場合には

$$\begin{aligned} x &= a \sinh u \cos v, \\ y &= b \sinh u \sin v, \\ z &= c \cosh u \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

で $D = \{(u, v); u > 0\}$ とすると二葉双曲面の上半分の曲面から頂点をのぞいた部分と対応 (一对一ではない) がつく. 下半分を表すなら $z = -c \cosh u$ とすればよい.

例 1.5 楕円放物面 : $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

このときは

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

が最も簡単なパラメータ表示である.

例 1.6 双曲放物面 : $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

の場合も

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

とする.

例 1.7 回転面 :

(x, z) 平面上に z 軸と交わらない曲線

$$x = f(u), \quad z = g(u)$$

を考え, それを z 軸の周りに回転すると

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u) \quad (4.2.19)$$

で表示される曲面が得られる.

4.2.4 基本形式

これからはパラメータ表示された曲面 (4.2.6) を考える. このとき曲面上の点をベクトルの記号を使って

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (4.2.20)$$

と書く. まず $v = b$ と固定して u だけ変化させると曲面上に曲線 $\mathbf{r}(u, b)$ が描かれる. このとき点 (a, b) におけるこの曲線の速度ベクトルは

$$\mathbf{r}_u(a, b), \quad \left(\text{ただし } \mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \quad (4.2.21)$$

で与えられる (図 4.5). 同様に u を $u = a$ に固定して v だけを変化させてできる曲線 $\mathbf{r}(a, v)$ の点 $\mathbf{r}(a, b)$ における速度ベクトルは

$$\mathbf{r}_v(a, b), \quad \left(\text{ただし } \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \quad (4.2.22)$$

となる. これら 2 つの速度ベクトルの成分は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(a, b) &= (x_u(a, b), y_u(a, b), z_u(a, b)), \\ \mathbf{r}_v(a, b) &= (x_v(a, b), y_v(a, b), z_v(a, b)) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

となるから, 曲面の存在条件において Jacobi 行列 (4.2.11) の階級が 2 であるということは, ベクトル $\mathbf{r}_u(a, b)$ と $\mathbf{r}_v(a, b)$ が線形独立ということに他ならない. したがって曲面が定義される場合には, その接平面は $\mathbf{r}_u(a, b)$ と $\mathbf{r}_v(a, b)$ で張られることになる.

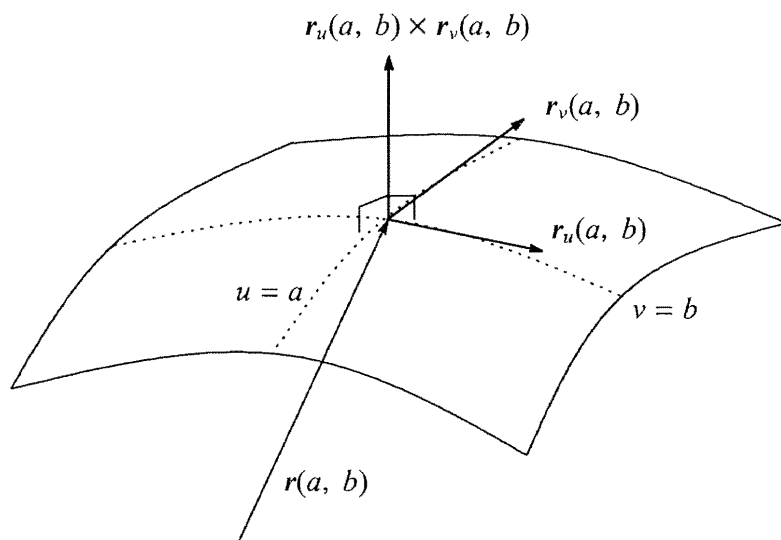


図 4.5: 接ベクトルと法ベクトル

ここで \mathbf{r}_u と \mathbf{r}_v の間の内積を考え

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \quad (4.2.24)$$

とおく. さらに対称行列

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

を便宜上考えておく.

いま, (u, v) 平面上の領域内に曲線

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (4.2.26)$$

をとり, それに対応して曲面上に曲線

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad (4.2.27)$$

を考える. このとき, この曲線 \mathbf{r} の各点における接ベクトルは

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt} \quad (4.2.28)$$

であるから, その長さの 2 乗は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \quad (4.2.29)$$

となる. (4.2.29) から

$$I = E du du + 2F du dv + G dv dv \quad (4.2.30)$$

というものを考えて, 曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ の第一基本形式と呼ぶ. このとき $\mathbf{r}(u, v)$ の微小変化 $d\mathbf{r}$ は

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \quad (4.2.31)$$

と書けるので, 第一基本形式 I は

$$I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2.32)$$

と書いてもよい. つまり, 第一形式は微小ベクトル $d\mathbf{r}$ の長さの 2 乗であるから常に正であることがわかる. よって (4.2.30) を 2 次形式と考えると, 第一基本形式 I が正値 2 次形式であるということがわかる.

接平面の法線ベクトル \mathbf{N} を

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (4.2.33)$$

と定義する. この法線ベクトルを用いて曲面の第二基本形式 II を

$$II = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} \quad (4.2.34)$$

と定義する.

\mathbf{N} は \mathbf{r}_u および \mathbf{r}_v と直交しているから

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (4.2.35)$$

この式を u, v で偏微分して

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u &= 0, & \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_v &= 0, \\ \mathbf{r}_{vu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u &= 0, & \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_v &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

ここで関数 L, M, N を

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_v, \\ M &= \mathbf{r}_{vu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_v \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

と定義する. (4.2.37) を用いると, Π は

$$\begin{aligned}\Pi &= -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} \\ &= -(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot (N_u du + N_v dv) \\ &= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndvdv.\end{aligned}\tag{4.2.38}$$

曲面の各点で $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}$ は一次独立であるから, 空間内のいかなるベクトルもこの3つのベクトルの一次結合で表される. このことを用いて次の6式を証明する.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{r}_v + L\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{r}_v + M\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{vu} &= \Gamma_{vu}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{vu}^v \mathbf{r}_v + M\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{r}_v + N\mathbf{N}, \\ N_u &= \frac{FM - GL}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} \mathbf{r}_v, \\ N_v &= \frac{FN - GM}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} \mathbf{r}_v.\end{aligned}\tag{4.2.39}$$

ただし上の4つの式は係数 Γ を定義するための式で, 証明すべき式は下の2つである. 上に定義された $\Gamma_{uu}^u, \dots, \Gamma_{vv}^v$ は Christoffel の記号と呼ばれる. (4.2.39) の最初の4式は Gauss の式, 最後の2式は Weingarten の式と呼ばれる.

Gauss の式で \mathbf{N} の係数がそれぞれ L, M, M, N になることは (4.2.37) からわかる. Weingarten の式について, まず $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ を u で偏微分して, $\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N} = 0$. つまり \mathbf{N}_u は \mathbf{N} に直交するので

$$\mathbf{N}_u = A\mathbf{r}_u + B\mathbf{r}_v$$

の形に書けるはずであり, この式と \mathbf{r}_u および \mathbf{r}_v との内積をとり, (4.2.37) と (4.2.24) を用いると

$$-L = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u = EA + FB,$$

$$-M = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u = FA + GB$$

を得る. この式を A, B について解いて

$$A = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \quad B = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

となる. 同様に \mathbf{N}_v についても証明できる.

ここで第二基本形式 Π の幾何学的意味を考える. そのためにまず1つの単位ベクトル \mathbf{a} を固定して, 曲面上の関数 f を

$$f(u, v) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(u, v)\tag{4.2.40}$$

と定義する. このとき f はベクトル \mathbf{r} の \mathbf{a} 方向の高さを表す関数である.

いま, 曲面上の点 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ を1つ固定し, \mathbf{a} をそこでの法ベクトル $\mathbf{a} = \mathbf{N}(u_0, v_0)$ とする.
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = 0$ であるから

$$df = d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u du + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v dv \quad (4.2.41)$$

は点 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ で0になる. このことは曲面の \mathbf{a} 方向の高さ f が \mathbf{r}_0 で臨界値に達していることからわかる. 点 \mathbf{r}_0 で df が0であるから, あとは f の Hesse の行列を調べることで f の \mathbf{r}_0 近傍での様子がわかる. ここで Hesse の行列とは f の2階偏微分係数により作られる対称行列

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix} \quad (4.2.42)$$

のことである. (4.2.37) と (4.2.40) および $\mathbf{a} = \mathbf{N}(u_0, v_0)$ を使うと

$$H_f(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} L(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) \end{bmatrix} \quad (4.2.43)$$

となる. したがって, 第二基本形式

$$II = Ldu du + 2Mdudv + Ndv dv \quad (4.2.44)$$

が $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ において正値2次形式になるとすると (4.2.43) より Hesse の行列 H_f が $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ で正値行列 (つまりその行列の固有値がすべて正), したがって微積分学より関数 f は $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ において上に凹になる. つまり, 曲面は $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ で法ベクトル \mathbf{a} の方向に窪んでいる. 同様に (4.2.44) の II が $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ で負値2次形式 (Hesse の行列の固有値がすべて負) になっていれば $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ において \mathbf{a} の方向に凸である.

一方 II が不定値, すなわち $LN - M^2 < 0$ のときに, 曲面は鞍状になっている. $LN - M^2 = 0$ のときには一般に何も言えない. 以上をまとめて

定理 4.2.1 第二基本形式 $II = Ldu du + 2Mdudv + Ndv dv$ が定値 (正値あるいは負値) になる点, つまり $LN - M^2 > 0$ となる点では曲面は凸になり, 不定値すなわち $LN - M^2 < 0$ となる点では鞍状になる.

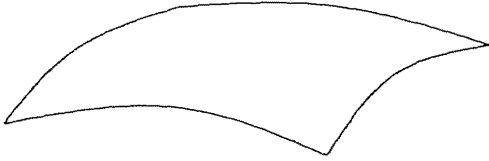


図 4.6: II が定値

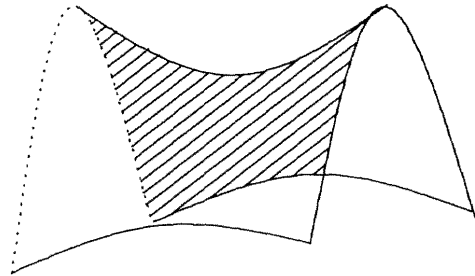


図 4.7: II が不定値

4.2.5 曲面における曲率

曲面の曲率を考える前に, まず曲面上にのった曲線の曲率を計算する. $(u(s), v(s))$ で与えられる曲線を空間曲線 $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ と考えて, その曲率 κ を求める. このとき速度が 1, つまり $|\mathbf{dr}/ds| = 1$ となるパラメータ s が入っているとす. $\mathbf{r}'(s)$ は曲線 $\mathbf{r}(s)$ の接ベクトルであるから曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ に接しているが, $\mathbf{r}''(s)$ は一般に曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ に接してはいないから

$$\mathbf{r}''(s) = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n \quad (4.2.45)$$

のように曲面の接ベクトル \mathbf{k}_g と法ベクトル \mathbf{k}_n に分解する. このとき \mathbf{k}_g は曲面上の曲線 $\mathbf{r}(s)$ の測地的曲率ベクトル, \mathbf{k}_n は法曲率ベクトルと呼ばれる. \mathbf{k}_n は法ベクトルであるから曲面の単位法ベクトル \mathbf{N} を用いて

$$\mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{N} \quad (4.2.46)$$

と書ける. κ_n を曲面上の曲線の法曲率と呼ぶ. このとき法曲率 κ_n は正負どちらの値も取り得ることを注意する. (4.2.46), (4.2.45), (4.2.36) (あるいは (4.2.38)) から,

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa_n \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{r}'' - \mathbf{k}_g) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{r}' \cdot \mathbf{N}' \\ &= -\left(r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} \right) \cdot \left(N_u \frac{du}{ds} + N_v \frac{dv}{ds} \right) \\ &= L \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds} \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

を得る.

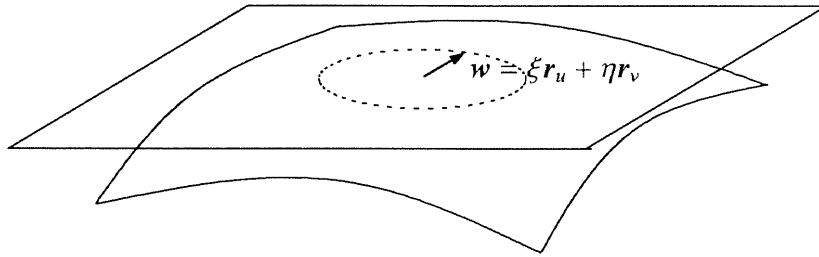


図 4.8: 接平面上の単位ベクトル \mathbf{w}

ここで曲面の代表的な曲率を決めるために, まず新しい記号を導入する. 曲面上の 1 点 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ での単位接ベクトル

$$\mathbf{w} = \xi \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \eta \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \quad (4.2.48)$$

に対して

$$\mathbb{H}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 \quad (4.2.49)$$

を定義する. この記号を使うと, (4.2.47) は

$$\kappa_n(s) = \Pi(\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}'(s)) \quad (4.2.50)$$

と書ける. この式から, 法曲率 κ_n は速度ベクトル $\mathbf{r}'(s)$ だけから決まることがわかる. $\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ において \mathbf{w} を \mathbf{r}_0 での接平面内の単位円上を動かしたときの最大, 最小値を求める. これは

$$|\mathbf{w}|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1 \quad (4.2.51)$$

という条件の下で (4.2.49) の最大, 最小値を求めることであるが, この問題は $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ という条件の下で, 関数

$$\lambda = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \quad (4.2.52)$$

の最大, 最小を求める問題に書き換えることができる.

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 - \lambda(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) = 0 \quad (4.2.53)$$

として, ξ および η で偏微分し, さらに λ の最大・最小を求める問題なので $\partial\lambda/\partial\xi = \partial\lambda/\partial\eta = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} (L - \lambda E)\xi + (M - \lambda F)\eta &= 0, \\ (M - \lambda F)\xi + (N - \lambda G)\eta &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

となる. ここで $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ となる解 λ を求める代わりに, $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ となる解が存在するような λ を求めることにすると, 特性方程式

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.55)$$

を解く問題になる. この方程式を整理して

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0 \quad (4.2.56)$$

とし, その解を $\lambda = \kappa_1, \kappa_2$ とすると, 解と係数の関係から

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}, \quad (4.2.57)$$

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (4.2.58)$$

と書き, K を Gauss の曲率, H を平均曲率と呼ぶ. $K \equiv 0$ のとき曲面は平坦であるといい, $H \equiv 0$ となる曲面を極小曲面と呼ぶ. また κ_1 と κ_2 を主曲率と呼び, $\Pi(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = \kappa_1$, $\Pi(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) = \kappa_2$ となる単位ベクトル $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ の方向を, 点 \mathbf{r}_0 における主方向と呼ぶ.

主方向の性質を調べてみる. (4.2.54) で主曲率を $\lambda = \kappa_i$ とし, 対応する主方向の単位ベクトル \mathbf{w}_i の成分を (ξ_i, η_i) とすると

$$\begin{aligned} L\xi_i + M\eta_i &= \kappa_i(E\xi_i + F\eta_i), \\ M\xi_i + N\eta_i &= \kappa_i(F\xi_i + G\eta_i). \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (4.2.59)$$

これを行列を使って

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} = \kappa_i \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} \quad (4.2.60)$$

と書き,これを使って

$$\begin{aligned} & \kappa_2(\xi_1, \eta_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\ &= (\xi_1, \eta_1) \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = (\xi_2, \eta_2) \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \\ &= \kappa_1(\xi_2, \eta_2) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \kappa_1(\xi_1, \eta_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

を得る. したがって $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ならば

$$(\xi_1, \eta_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.2.62)$$

これは, $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ならば, 2つの主方向は互いに直角であることを示している.

次に $\kappa_1 = \kappa_2$ のとき, κ_n の最大値と最小値が等しくなっていることになるので, 言い換えると $\Pi(w, w)$ は w が点 r_0 での接平面内の単位円上を動くときに, 定数 $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ になる. すなわち (4.2.53) が r_0 ですべての $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ に対して κ になる. 分母を払って

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \kappa(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) \quad (4.2.63)$$

が r_0 ですべての (ξ, η) について成り立つといえる. $\kappa_1 = \kappa_2$ になるような点 r_0 を曲面の臍点と呼ぶ. そこではすべての方向が主方向となり, 特別な2方向をもたない.

一方, $K > 0$ となる点を楕円点, $K < 0$ となる点を双曲点, そして $K = 0$ となる点を放物点と呼ぶ.

ここで, 第一基本形式 I は常に正値であるから (4.2.30) より $EG - F^2 > 0$ で, (4.2.57) により K は $LN - M^2$ と同じ符号をもつ. したがって定理 (4.2.1) を次のように言い換えることができる.

定理 4.2.2 Gauss の曲率 K が正になる点, すなわち楕円点では曲面は凸になり, 負になる点, すなわち双曲点では鞍状になる.

曲面上の曲線 $r(s) = r(u(s), v(s))$ に対し, (4.2.45) により k_g を $r'(s)$ の接成分として定義したが, $k_g \equiv 0$ となると $r(s)$ を測地線と呼ぶ. すなわち $r(s)$ の加速度ベクトル $r''(s)$ が曲面に常に垂直になるときに, 曲線 $r(s)$ を測地線と呼ぶ.

平面曲線のとときと同様, 空間曲面の単位法ベクトル N を使って Gauss の曲面表示を考える. (4.2.33) で定義された単位法ベクトル N を, 空間内の原点を中心とする単位球上の点だと考えることにより, 曲面の各点 $r(a, b)$ に単位球面の点 $N(a, b)$ を対応させる. この対応を Gauss

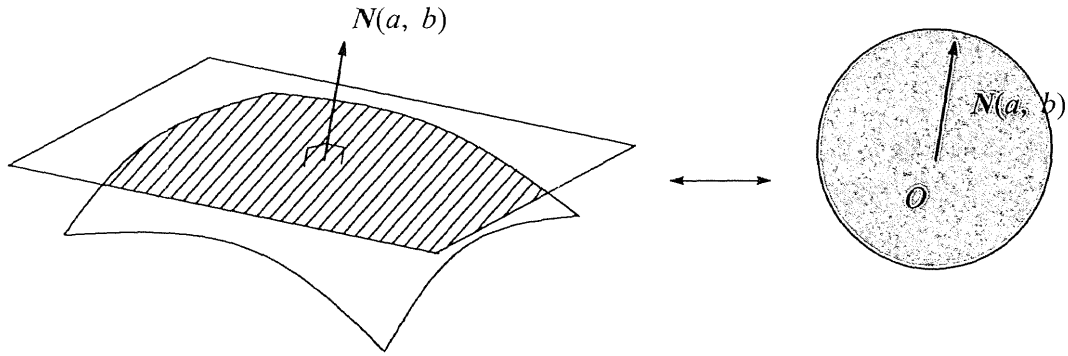


図 4.9: Gauss の曲面表示

の球面表示と呼ぶ(図 4.9). このとき, Gauss の曲率 K と, $\mathbf{r}(a, b)$ での曲面の面積要素と $N(a, b)$ での球面表示の面積要素との比の関係を調べる.

まず点 $\mathbf{r}(a, b)$ における接平面上にベクトル $\mathbf{r}_u(a, b)$, $\mathbf{r}_v(a, b)$ で張られる平行四辺形を考える. その面積は

$$|\mathbf{r}_u(a, b) \times \mathbf{r}_v(a, b)| \quad (4.2.64)$$

で与えられる. 同様に Gauss の単位球面上の対応する点 $N(a, b)$ で対応する接ベクトル $N_u(a, b)$, $N_v(a, b)$ で張られる平行四辺形を考えると, その面積は

$$|N_u(a, b) \times N_v(a, b)| \quad (4.2.65)$$

で与えられる. (4.2.39) の最後の 2 つの式 (Weingarten の式) を使うと

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= \left(\frac{FM - GL}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} \mathbf{r}_v \right) \times \left(\frac{FN - GM}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} \mathbf{r}_v \right) \\ &= \frac{(FM - GL)(FM - EN) - (FN - GM)(FL - EM)}{(EG - F^2)^2} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v. \end{aligned} \quad (4.2.66)$$

したがって (4.2.57) から

$$N_u \times \mathbf{r}_v = K(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \quad (4.2.67)$$

となる. これから

$$|N_u \times N_v| = |K| \cdot |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \quad (4.2.68)$$

となり, 2 つの平行四辺形の面積の比は $|K|$ となるのがわかる. これだと K の符号をまったく考慮していないので, 符号も考慮に入れたときの解釈を考える. K が正のとき, N_u , N_v が張る平行四辺形の面積と \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v が張る平行四辺形の面積の比は K となり, $N_u \times N_v$ と $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ の向きが等しくなる. 一方 K が負の場合, 平行四辺形の面積比は $|K|$ となり, $N_u \times N_v$ と $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ の向きが逆になる.

(u, v) 平面上に図 4.10 のような小さな長方形をとり, 曲面上の対応する部分を考えると, その面積は $r(u, v)$ における接平面上に 2 つの接ベクトル $r_u(u, v)\Delta u$, $r_v(u, v)\Delta v$ で張った平行四辺形の面積 $|r_u \times r_v|\Delta u\Delta v$ にほとんど等しいので

$$|r_u \times r_v|du dv \quad (4.2.69)$$

を曲面の面積要素という. (u, v) が領域 R を動くとき対応する曲面上の領域の面積は

$$\iint_R |r_u \times r_v| du dv \quad (4.2.70)$$

となり, Gauss の表示によりそれに対応する単位球面上の領域の面積は次のようになる.

$$\iint_R K \cdot |r_u \times r_v| du dv. \quad (4.2.71)$$

なお, 曲面の面積要素 (4.2.69) は第一基本形式 I を使って次のように書き表せる.

$$|r_u \times r_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (4.2.72)$$

これは空間ベクトル w, x, y, z に対する Lagrange の公式

$$(w \times x) \cdot (y \times z) = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y) \quad (4.2.73)$$

において $w = y = r_u$, $x = z = r_v$ とすると得られる.

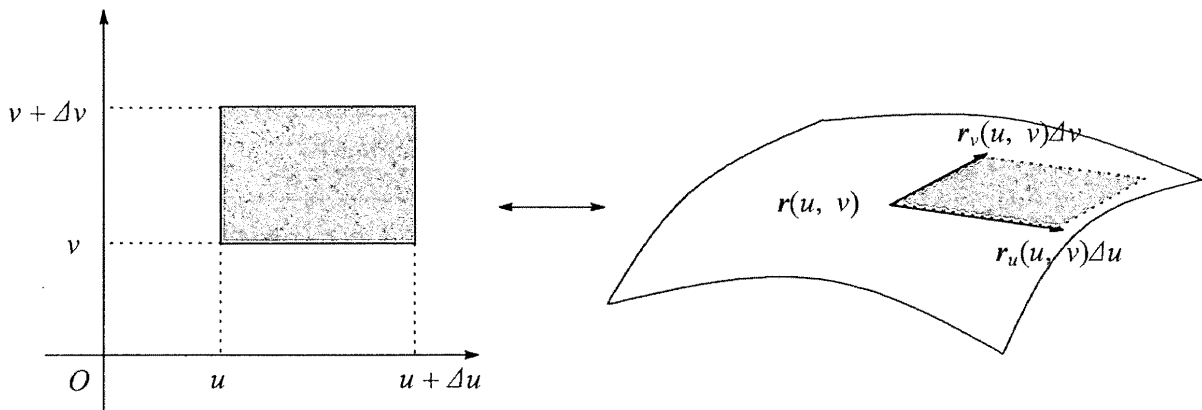


図 4.10: 面積要素 $|r_u \times r_v|\Delta u\Delta v$

4.3 球面調和関数

4.3.1 球調和関数

3次元の偏微分方程式

$$\Delta\psi = 0 \quad (4.3.1)$$

の解を調和関数という. この Laplace 方程式を極座標に変換したもの

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.3.2)$$

の解は体球関数と呼ばれ, ψ_n を n 次の体球関数であるとして

$$\psi_n = r^n Y_n(\theta, \phi) \quad (4.3.3)$$

とおく. このとき Y_n を球面調和関数と呼ぶ. これを (4.3.2) に代入することで $Y_n(\theta, \phi)$ に関する方程式

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)Y_n = 0 \quad (4.3.4)$$

を得る. さらにここで

$$\mu = \cos \theta \quad (4.3.5)$$

とおくと (4.3.4) は次のように変わる.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial Y_n}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)Y_n = 0. \quad (4.3.6)$$

まず軸対称のときを考えると, $\partial/\partial\phi$ の項は消え (4.3.6) は

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dY_n}{d\mu} \right\} + n(n+1)Y_n = 0 \quad (4.3.7)$$

となる. この方程式を級数の形で積分すると

$$\begin{aligned} Y_n(\mu) = & A \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \dots \right\} \\ & + B \left\{ \mu - \frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mu^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 - \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

を得る. このとき各項は (4.3.7) のそれぞれ独立な解であり, これらの無限級数は n が偶数のとき第一項が, n が奇数のときには第二項が切れる. よって n が偶数のとき第一項を, n が奇数のとき第二項を採用することによって (4.3.7) の解 Y_n を有限級数の場合に制限することになると n が偶数奇数の両方について, 級数の順番を変えることにより

$$\begin{aligned} Y_n(\mu) &:= P_n(\mu) \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left\{ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

と表される. つまり $P_n(\mu) = P_n(\cos \theta)$ は (4.3.6) および (4.3.7) の解である. このとき P_n をルジャンドルの多項式という.

つぎに軸対称性を除いたときの (4.3.6) の解 $Y_n(\theta, \phi)$ を求める. $Y_n(\theta, \phi)$ が ϕ の 1 価関数のとき複素 Fourier 展開より

$$Y_n(\theta, \phi) = c_0(\theta) + \sum_{m=1}^n c_m(\theta) e^{im\phi} = c_0(\mu) + \sum_{m=1}^n c_m(\mu) e^{im\phi} \quad (4.3.10)$$

とできる. ここでいう $c_0(\theta)$ が $P_n(\cos \theta)$ である. 次に, $c_m(\mu)e^{im\phi}$ も (4.3.6) を満たさなければいけないので, これを代入して次の式を得る.

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dc_m}{d\mu} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\} c_m = 0. \quad (4.3.11)$$

ここで $c_m = (1 - \mu^2)^{m/2} v$ とおけば

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 v}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{dv}{d\mu} + (n-m)(n+m+1) = 0. \quad (m \leq n) \quad (4.3.12)$$

これを解くと

$$\begin{aligned} v(\mu) = & A \left\{ 1 - \frac{(n-m)(n+m+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 \right. \\ & + \frac{(n-m-2)(n-m)(n+m+1)(n+m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \dots \left. \right\} \\ & + B \left\{ \mu - \frac{(n-m-1)(n+m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mu^3 \right. \\ & + \frac{(n-m-3)(n-m-1)(n+m+2)(n+m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 - \dots \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

を得る. ただし各項は (4.3.12) の独立な解で, $n-m$ が偶数のとき第一項が, 奇数のとき第二項がそれぞれ切れる. よって $n-m$ が偶数のとき第一項を, 奇数のとき第二項を採用することで $v(\mu)$ が有限級数となるように限定すると, 級数の順番を逆にして

$$\begin{aligned} c_m &= (1 - \mu^2)^{m/2} := P_n^m(\mu) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n-m)!n!} (1 - \mu^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ \mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-m-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-m-4} - \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

このとき $P_n^m(\mu) = P_n^m(\cos \theta)$ をルジャンドルの陪関数とよび, $P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi}$ は (4.3.6) および (4.3.11) の解である.

以上より, 方程式 (4.3.6) の一般解は任意定数を用いて次のように書き表される.

$$Y_n(\theta, \phi) = a_n^{(0)} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n a_n^{(m)} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (4.3.15)$$

4.3.2 球面調和関数の直交性

球面上の2つの関数 $f(\theta, \phi)$, $g(\theta, \phi)$ について内積を

$$\begin{aligned} (f(\theta, \phi), g(\theta, \phi)) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \phi) g(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \iint_{r=1} f g dS \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

と定義すると, 次数の異なる球面調和関数は互いに直交することが計算することによって分かる. ここで $dS = \sin \theta d\theta d\phi$ は半径 1 の球面の面素である. つまり前節で求めた 2 つの球面調和関数

$$P_n(\cos \theta), \quad P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi} \quad (4.3.17)$$

は異なる次数 n, m について互いに直交する. よって球面上の任意関数 $\psi(\theta, \phi)$ は $P_n(\cos \theta)$, $P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi}$ を用いて級数に展開され,

$$\begin{aligned} \psi(\theta, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n a_n^{(m)} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n^{(0)} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n a_n^{(m)} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

つまり

$$\psi(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \phi), \quad (4.3.19)$$

$$Y_n(\theta, \phi) = a_n^{(0)} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n a_n^{(m)} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.3.20)$$

と級数展開される. このとき各係数は次のようにして決められる.

$$a_n^{(0)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \psi(\theta, \phi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.3.21)$$

$$a_n^{(m)} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \psi(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) e^{-im\phi} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4.3.22)$$

4.3.3 楕円体調和関数

序

前節では体球調和関数を求めたが, ここでは楕円体座標で表した調和関数である楕円体調和関数について述べる.

扁長回転楕円体の場合

初めに楕円体が扁長である場合からはじめ,

$$\begin{aligned} z &= k \cosh u \cos \theta = k\xi\mu, \quad x = \omega \cos \phi, \quad y = \omega \sin \phi, \\ \omega &= k \sinh u \sin \theta = k(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

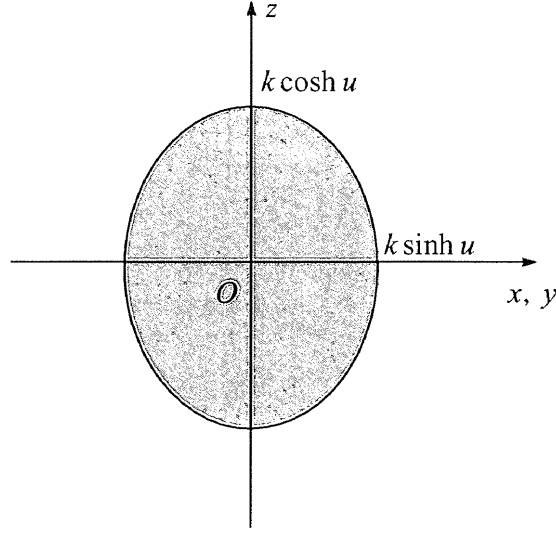


図 4.11: 扁長回転楕円体

とおく. このとき Laplace 方程式 (4.3.1) は新しい座標を用いて次のように書き表される.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}. \quad (4.3.24)$$

ここで球面調和関数 $P_n(\mu)$, $P_n^m(\mu)e^{im\phi}$ の直交性を用いると, (4.3.24) の n 次の解 $\psi_n = Y_n(\xi, \mu, \phi)$ は (4.3.20) 同様これら 2 つの球面調和関数の級数で表され,

$$Y_n(\xi, \mu, \phi) = a_n^{(0)}(\xi)P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n a_n^{(m)}(\xi)P_n^m(\mu)e^{im\phi} \quad (4.3.25)$$

となる. ここで級数の係数が ξ の関数になっていることに注意する. このうちまず第一項 $a_n^{(0)}(\xi)P_n(\mu)$ について, これが (4.3.24) を満たすからこれに代入して次の式を得る.

$$a_n^{(0)}(\xi) \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right\} = P_n(\mu) \frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{da_n^{(0)}(\xi)}{d\xi} \right\}. \quad (4.3.26)$$

ここでルジャンドルの多項式 $P_n(\mu)$ は方程式 (4.3.7) の解であることから

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \right\} + n(n+1)P_n = 0 \quad (4.3.27)$$

が成り立つ. この式を使って (4.3.26) の P_n を消去してやると次の式を得る.

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{da_n^{(0)}}{d\xi} \right\} + n(n+1)a_n^{(0)} = 0. \quad (4.3.28)$$

よく見るとこの方程式 (4.3.28) は (4.3.27) と一致するので, (4.3.28) の解は用意に求まる.

$$a_n^{(0)} = P_n(\xi). \quad (4.3.29)$$

つぎに (4.3.25) の第二項 $a_n^{(m)}(\xi)P_n^m(\mu)e^{im\phi}$ について, これも (4.3.24) を満たさなければいけないので, 代入して整理すると

$$a_n^{(m)} \left[\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} \right\} - \frac{m^2}{1 - \mu^2} P_n^m \right] = P_n^m \left[\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{da_n^{(m)}}{d\xi} \right\} - \frac{m^2}{1 - \xi^2} a_n^{(m)} \right]. \quad (4.3.30)$$

ここでルジャンドルの陪関数 P_n^m は方程式 (4.3.11) の解であることから

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\} P_n^m = 0 \quad (4.3.31)$$

が成り立つ. この式を使って (4.3.30) の P_n^m を消去すると次の式を得る.

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{da_n^{(m)}}{d\xi} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right\} a_n^{(m)} = 0. \quad (4.3.32)$$

これは (4.3.31) と一致するのでこの方程式の解 $a_n^{(m)}(\xi)$ はすぐに求めることができる.

$$a_n^{(m)}(\xi) = P_n^m(\xi) \quad (4.3.33)$$

以上と (4.3.19), (4.3.25) より扁長回転楕円体での Laplace 方程式 (4.3.1) の解 ψ , つまり調和関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi, \theta, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ P_n(\xi)P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\xi)P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

扁平回転楕円体の場合

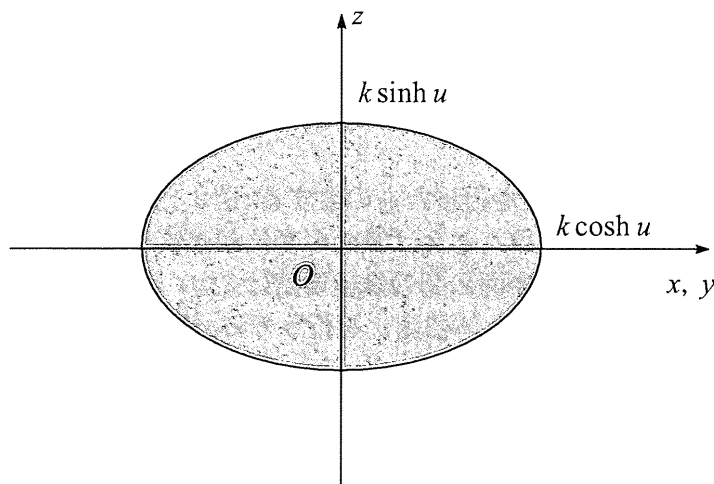


図 4.12: 扁平回転楕円体

次に扁平回転楕円体の場合を考える. このとき

$$\begin{aligned} z &= k \sinh u \cos \theta = k\xi\mu, & x &= \omega \cos \phi, & y &= \omega \sin \phi, \\ \omega &= k \cosh u \sin \theta = k(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

とおく. このとき Laplace 方程式 (4.3.1) は新しい座標系で次のように書き直される.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\xi^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{\xi^2 + 1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}. \quad (4.3.36)$$

これは (4.3.24) と比べると, (4.3.24) で ξ を $i\xi$ に変えただけであることが見て取れる. よってその解も同じ変換をすることによって求まり,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ P_n(i\xi) P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(i\xi) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right\} \quad (4.3.37)$$

となる. よって扁平回転楕円体における Laplace 方程式 $\Delta \psi = 0$ の解の一つは A を定数として

$$\psi = A P_n^m(i\xi) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.3.38)$$

とすることができる.

4.4 表面波

4.4.1 序

この論文の主なテーマである液滴の表面にはたらく張力（表面張力）と表面を伝わる波（表面波）の固有振動数について述べる.

4.4.2 ラプラスの式

この節では2つの連続媒質の境界近傍で起こる現象について述べる。2つの媒質を区切っている境界面が曲面であるばあい、その2つの媒質の境界面近傍の圧力は異なっている。その圧力差（表面圧）を、曲面の曲率（特に平均曲率）を使って表す。ただしこのとき2媒質は熱力学的に平衡状態にあるとする。

境界面がある無限小の変位 $\delta\zeta$ を行ったものとする（図4.13）。このときの変位の方向は境界面の各点での法線方向とし、 $\delta\zeta$ はたとえば表面の変位が媒質2に向かった場合を正にとることにする。変化前と後の2つの表面の間の体積要素は $\delta\zeta df$ と書ける。ここで df は面積片である。この場合に上に述べたような体積変化を行うのに必要な仕事は

$$\int (-p_1 + p_2) \delta\zeta df$$

である。

表面を変位させるのに要する全仕事 δR は、この仕事に表面積を変化させるのに必要な仕事を加えて得られる。後者の仕事は表面積の変化 δf に比例し、表面張力係数 α を使って $\alpha\delta f$ と表される。よって全仕事は

$$\delta R = - \int (p_1 - p_2) \delta\zeta df + \alpha \delta f \quad (4.4.1)$$

である。この変形が熱力学的に平衡であるための条件は、 δR が0となることである。

つぎに、 κ_1 および κ_2 を表面上のある点の主曲率とする。このとき境界面が媒質2の方向に凸であるとき曲率を正と定義する。主曲率断面の表面の線素 dl_1 , dl_2 は、表面が微小な変位を行う場合にそれぞれ $\kappa_1 \delta\zeta dl_1$ および $\kappa_2 \delta\zeta dl_2$ だけ増加する。よって表面の面積片 $df = dl_1 dl_2$ は変形後

$$dl_1 (1 + \kappa_1 \delta\zeta) dl_2 (1 + \kappa_2 \delta\zeta) \approx dl_1 dl_2 (1 + \kappa_1 \delta\zeta + \kappa_2 \delta\zeta)$$

となる。すなわち表面積は $\delta\zeta df (\kappa_1 + \kappa_2)$ だけ増加する。よって境界面の面積の全増加量は

$$\delta f = \int \delta\zeta (\kappa_1 + \kappa_2) df = 2 \int \delta\zeta H df \quad (4.4.2)$$

である。ここで $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ はある点での平均曲率である。この式を(4.4.1)に代入して全仕事を0とおけば、平衡状態の条件は次のように書ける。

$$\int \delta\zeta \{ (p_1 - p_2) - 2\alpha H \} df = 0.$$

この条件が任意の $\delta\zeta$ についても成り立たなくてはいけないので、表面では次の式が成り立たなければならない。

$$p_1 - p_2 = 2\alpha H. \quad (4.4.3)$$

この式がラプラスの式であり、これによって表面圧 $p_1 - p_2$ が求まる（図4.14）。

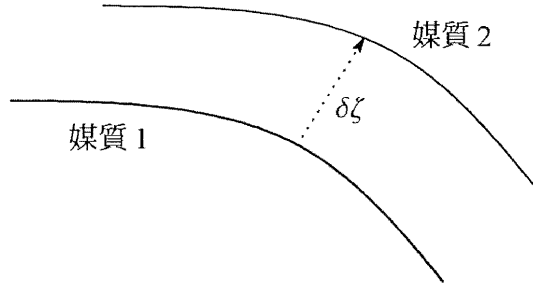


図 4.13: 曲面の微小変位 $\delta\zeta$

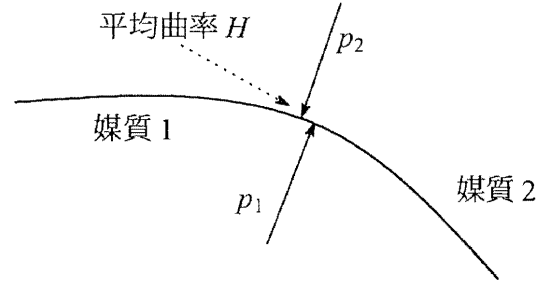


図 4.14: ラプラスの式

たとえば 2 媒質が接しており, 境界面にも媒質にも外力がいつさいはたかかないとすると, 媒質内の圧力はどこも一定 $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$ であるので, (4.4.3) より

$$H = \text{const.} \quad (4.4.4)$$

よって平均曲率は任意の自由境界面上で一定でなければいけない. さらに, 全表面が自由表面である場合, (4.4.4) は表面が球状でなければいけないことを表している.

次に重力場中にある媒質の表面における平衡条件を考える. 簡単のため媒質 2 は大気でありその圧力が表面上で一定とみなすことができるとする. さらに媒質 1 は非圧縮流体であるとする. この場合 $p_2 = \text{const}$ であり, 流体の圧力 p_1 は $p_1 = \text{const} - \rho g z$ と書くことができる. 座標 z は鉛直上方に向けてとるものとする. よってこのとき平衡条件 (4.4.3) は次のようになる.

$$2H + \frac{g\rho z}{\alpha} = \text{const.} \quad (4.4.5)$$

だが実際に流体の表面の平衡条件の形を求めるときには (4.4.5) の形ではなく直接全自由エネルギーを最小にするという平衡条件を使って, 変分法を使って解くのが便利である. 流体が非圧縮性であれば内部自由エネルギーは流体の体積のみに依存し, その表面の形には依存しない. 内部自由エネルギーのほかには表面自由エネルギー $\int \alpha df$ と重力のポテンシャルエネルギー $g\rho \int z dV$ が存在し, この 2 つのエネルギーが流体の表面の形に影響する. 以上より平衡条件は次のように書ける.

$$\int \alpha df + g\rho \int z dV = \min. \quad (4.4.6)$$

ただし非圧縮性流体であるので次の条件を満たさなければいけない.

$$\int dV = \text{const.} \quad (4.4.7)$$

(4.4.3) から表面の形を求めるには, ある与えられた表面の形からその (平均) 曲率を求める式が必要である. それは 4.2 章で述べた曲面の微分幾何を用いて得られる.

表面の方程式を $z = \zeta(x, y)$ とする. 簡単のため ζ はどこでも微小量であると仮定する. すなわち表面は平面 $z = 0$ からほんのわずかしかなずれていない. この曲面の平均曲率を \bar{H} とすると, (4.2.57), (4.2.58) より

$$\bar{H} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (4.4.8)$$

から得られる. ここで曲面 z 上の点 \mathbf{r} は

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \zeta(x, y)) \quad (4.4.9)$$

で表されるから, (4.2.24) より

$$\begin{aligned} E = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_x &= \left(1, 0, \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 1 + p^2, \\ F = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y &= \left(1, 0, \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) \cdot \left(0, 1, \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = pq, \\ G = \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{r}_y &= \left(0, 1, \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \cdot \left(0, 1, \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = 1 + q^2 \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

と表される. ただし簡単のため p, q, r, s, t をそれぞれ

$$p = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad (4.4.11)$$

とする. この曲面の法ベクトル \mathbf{N} は (4.2.33) を使うと

$$\mathbf{N} = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \quad (4.4.12)$$

と計算できる. よって, (4.2.37) を使って

$$\begin{aligned} L = -\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{N}_x &= \cdots = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ M = -\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{N}_y &= -\mathbf{r}_y \cdot \mathbf{N}_x = \cdots = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ N = -\mathbf{r}_y \cdot \mathbf{N}_y &= \cdots = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

以上 (4.4.8), (4.4.10), (4.4.13) より曲面 $z = \zeta(x, y)$ の平均曲率 \bar{H} が求まる.

$$\begin{aligned} 2\bar{H} &= \cdots = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} \simeq r + t \\ &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

媒質 1 を非圧縮性流体, 媒質 2 を大気としたとき, この節の最初で行った曲率 κ_1, κ_2 の定義によると平均曲率 H の符号は正となり, (4.4.14) では \bar{H} の符号は負であるから, 求めたい平均曲率 H は (4.4.14) より

$$2H = -2\bar{H} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (4.4.15)$$

となり, これが求めたい式である. この式はわずかに曲がった表面の平均曲率を与える.

4.4.3 表面張力波

流体の表面は、重力と表面張力の作用のもとで平衡状態の形をとるように向かう。波動の振幅は波長にくらべて小さいとする。流体の速度ポテンシャル ϕ についてはラプラスの方程式 $\Delta\phi = 0$ が成り立つ。ただし境界条件は前節で述べたラプラスの式から求める。この節では平面に近い表面を伝わる波について調べてみる。

表面上の点の z 座標を ζ とすると ζ は微小量であるから (4.4.15) を用いることができる。よってラプラスの式は次のように書ける。

$$p - p_0 = -\alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right).$$

ここで p は流体の表面近くの圧力であり、 p_0 は一定の外力である。 p は流体力学より

$$p = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

と表されるので、これをラプラスの式に代入して

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0$$

を得る。このとき ϕ を定義しなおすことにより定数 p_0 を除くことができる。ただし

$$\phi \longrightarrow \phi + \frac{p_0}{\rho} t$$

と定義しなおした。上の関係式を t に関して微分し、速度に関する境界条件（表面付近では、表面の z 方向の速度と流体の z 方向の速度が一致する）より $\partial \zeta / \partial t$ と $\partial \phi / \partial z$ が等しいことを使うと、ポテンシャル ϕ に関する境界条件を得る。

$$\rho g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (z = 0) \quad (4.4.16)$$

ここで平面波が x 軸方向に伝播しているものとする。速度ポテンシャルを $\phi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$ と置いて解を求める。境界条件 (4.4.16) から波数 k と周波数 ω との関係式（分散関係式）が得られる。

$$\omega^2 = gk + \alpha \frac{k^3}{\rho}. \quad (4.4.17)$$

波長が短い場合 ($k \gg 1$) に (4.4.17) は次のように近似される。

$$\omega^2 \simeq \alpha \frac{k^3}{\rho}. \quad (4.4.18)$$

このような波は表面張力波あるいはさざなみ波と呼ばれる。一方波長が長い場合 ($k \ll 1$) に (4.4.17) は次のように近似される。

$$\omega^2 = gk.$$

このような波は重力波と呼ばれる。さらにこれらの中間の場合は表面張力重力波と呼ばれる。

4.4.4 表面張力波の固有振動数

前節は平面に近い表面を伝わる表面張力波を考えたが、この節では球滴の表面を伝わる表面張力波の性質を求める。振動により滴の表面は球形からずれる。振動の振幅は波長に比べて小さいとする。

まず球から少しはずれた表面での平均曲率を求めてみる。ここでは微分幾何を使わずに平均曲率を求める。曲座標 r, θ, ϕ により関数 $r = r(\theta, \phi)$ で与えられる表面の面積は

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2} r \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.4.19)$$

と表される。球面からの微小なずれを ζ とすると、球面に近い表面は $r = R + \zeta$ と表される。(4.4.19) にこれを代入し

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ (R + \zeta)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)^2 \right] \right\} \sin \theta d\theta d\phi$$

を得る。 ζ が変化した場合の面積変化 δf は上の式から

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 2(R + \zeta) \delta \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \phi} \right\} \sin \theta d\theta d\phi$$

と求まる。第2項を θ について部分積分し、第3項を ϕ について部分積分すると

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 2(R + \zeta) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right\} \delta \zeta \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.4.20)$$

を得る。これと (4.4.2) とを比較することで平均曲率を求めることができる。今回の場合、面積片 df は

$$df = (R + \zeta) \sin \theta d\phi \times (R + \zeta) d\theta \simeq R(R + 2\zeta) \sin \theta d\theta d\phi$$

となるので、(4.4.20) の $\{ \}$ の中身を $R(R + 2\zeta)$ で割って得られる式が (4.4.2) より主曲率の和 $2H$ になる。 ζ についての1次近似を求めると次の式ようになる。

$$2H = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right\}. \quad (4.4.21)$$

流体内の速度ポテンシャルを ψ とすると、 ψ はラプラスの方程式 $\Delta \psi = 0$ を満たす。境界条件は平面の表面の場合（前節）と同じように $r = R + \zeta$ で

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \right\} + p_0 = 0$$

である。今回の場合も定数 $p_0 + 2\alpha/R$ はポテンシャル ψ の取り方を変えることで消すことができる。時間に関して微分して速度に関する境界条件 $\partial \zeta / \partial t = v_r = \partial \psi / \partial r$ を代入すれば、結局 ψ に関する境界条件として次の式を得る。

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{R^2} \left\{ 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \right\} = 0. \quad (r = R + \zeta) \quad (4.4.22)$$

この方程式の定常波解を速度ポテンシャル $\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \phi)$ の形で求めてみる. ただしここで関数 f はラプラスの方程式 $\Delta f = 0$ を満たすものとする. ラプラスの方程式の任意の解は球調和関数 $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ の一次結合によって表される. ここで $Y_{lm}(\theta, \phi)$ はラプラスの球調和関数であり, $Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ である. ここで $P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta d^m P_l(\cos \theta) / d(\cos \theta)^m$ はルジャンドル陪関数と呼ばれ, $P_l(\cos \theta)$ は l 次のルジャンドル関数である. このとき l は 0 以上の整数をとり, m は $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ をとる.

よって (4.4.22) の特解を次の形に置くことができる.

$$\psi = A e^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (4.4.23)$$

振動数 ω は境界条件である (4.4.22) を満たさなければならないから, (4.4.23) を代入して, さらに球調和関数 Y_{lm} について成り立つ次の関係式

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0$$

を用いて ψ を消去すると最終的に次の式を得る.

$$\rho \omega^2 + \frac{l\alpha[2 - l(l+1)]}{R^3} = 0.$$

あるいは

$$\omega^2 = \frac{\alpha l(l-1)(l+2)}{\rho R^3}. \quad (4.4.24)$$

上の式から球滴の表面張力振動の固有振動数が求められる. このとき, $l = 2$ に対応する滴の可能な最小振動数は

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho R^3}} \quad (4.4.25)$$

である. 最後に (4.4.23) と $\partial \xi / \partial t = \partial \psi / \partial r$ から ξ を求め, それを $r = R + \xi$ に代入することで液滴の固有振動モードの形状を求めたものを付録に載せる. モードとしては l を最低次である 2 次から 4 次まで取り, それに対応する $m (\leq l)$ について各振動モード (l, m) を求めた.

4.5 浮遊液滴の形状

4.5.1 序

この章では, 無重力空間内に浮遊している液滴をある軸周りに回転したときにどのように変形するか, 理論的に求めてみる.

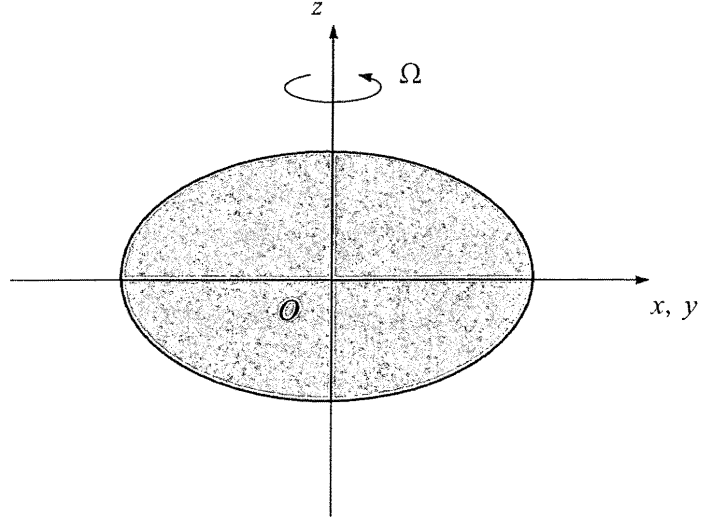


図 4.15: 回転する液滴

4.5.2 支配方程式

流体力学の基礎方程式であるオイラー方程式の慣性系での形は

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad (4.5.1)$$

である. ここで P は流体の圧力, ρ はその流体の密度, そして \mathbf{V} は慣性系から見たときの粒子の速度である. 液滴が z 軸周りに一定の角速度 Ω で回転しているとする. そこで慣性系に対し z 軸周りに Ω で回転している液滴固定座標系からオイラー方程式を記述することを考える. 回転座標系 (x, y, z) の基底を $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする. まず (4.5.1) を流体微分 d/dt を使って書き直すと

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P. \quad (4.5.2)$$

ここで \mathbf{X} は流体要素の位置ベクトルで

$$\mathbf{X} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (4.5.3)$$

である. (4.5.3) を時間 t で一階微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) + \left(x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) + (x\Omega \times \mathbf{i} + y\Omega \times \mathbf{j} + z\Omega \times \mathbf{k}) \\ &:= \frac{d^* \mathbf{X}}{dt} + \Omega \times \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

ただし d^*X/dt は回転座標系から見たベクトル X の時間微分を表しているとし

$$\frac{d^*X}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (4.5.5)$$

であるとする. (4.5.4) をもう一階微分して次の式を得る.

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^*V}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times V + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times X). \quad (4.5.6)$$

ただしここで $\boldsymbol{\Omega}$ は時間によらず一定とし, d^*V/dt は回転座標系から見たベクトル V の時間微分を表している. 以上より, (4.5.6) を (4.5.2) に代入して

$$\frac{d^*V}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times V + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times X) = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P \quad (4.5.7)$$

を得る. ここでベクトル V の時間微分 d^*V/dt について成分で考えると

$$\frac{d^*V}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dV_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dV_z}{dt}\mathbf{k} \quad (4.5.8)$$

となる. V_x, V_y, V_z の時間変化について次の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}, \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}, \\ \frac{dV_z}{dt} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

よって (4.5.9) を (4.5.8) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{d^*V}{dt} &= \left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\mathbf{k} \right) + \left(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\mathbf{k} \right) + (V \cdot \text{grad})V \\ &:= \frac{\partial^*V}{\partial t} + (V \cdot \text{grad})V \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

を得る. ただしここで $\partial^*V/\partial t$ は回転座標系から見たベクトル V の時間偏微分であり

$$\frac{\partial^*V}{\partial t} = \frac{\partial V_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\mathbf{k} \quad (4.5.11)$$

であるとする. また (4.5.10) の1つ目の等号は

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial y} = \cdots = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (4.5.12)$$

を使った. よって (4.5.11) を (4.5.7) に代入することにより, 回転座標系から見たオイラー方程式が得られる.

$$\frac{\partial^*V}{\partial t} + (V \cdot \text{grad})V + 2\boldsymbol{\Omega} \times V + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times X) = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P. \quad (4.5.13)$$

4.5.3 表面での境界条件

液滴が剛体回転しているとする、角速度 Ω で回転する座標系から見るとどこでも速度はゼロである。つまり回転座標系から見れば液滴内の流れはポテンシャル流であると考えることができる。つまり ψ をポテンシャルとして

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} \\ &:= \text{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

$$\iff V_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.5.15)$$

とすることができる。このときベルヌーイの式を導くことを考える。

まず (4.5.13) の第 1 項について (4.5.15) を使うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial^* \mathbf{V}}{\partial t} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

次に第 2 項はベクトル解析の公式を使って次のように書き換えることができる。

$$(\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = \frac{1}{2} \text{grad} V^2 - \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V}. \quad (4.5.17)$$

最後に第 4 項について、角速度ベクトル Ω は z 方向を向いているとする、つまり $\Omega = \Omega \mathbf{k}$ とすると

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{X}) = -\Omega^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (4.5.18)$$

となる。以上より (4.5.13) は次のように書き換えることができた。

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \text{grad} V^2 - \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V} + 2\Omega \times \mathbf{V} - \Omega^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P. \quad (4.5.19)$$

つぎに (4.5.19) と速度ベクトルに沿った単位ベクトル \mathbf{l} との内積を考える。(4.5.19) の左辺第 1, 2 項と右辺についてはベクトル解析の定理

$$\text{grad} A \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial A}{\partial l} \quad (4.5.20)$$

を使って次のようになる。

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad \frac{1}{2} \text{grad} V^2 \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} V^2 \right), \quad -\frac{1}{\rho} \text{grad} P \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(-\frac{P}{\rho} \right). \quad (4.5.21)$$

(4.5.19) の左辺第 3, 4 項についてはベクトル l と内積をとるとゼロになる. なぜならこれら 2 つのベクトルはともに速度ベクトル V に垂直だからである. 最後に左辺第 5 項について, ベクトル l を

$$l = l_x i + l_y j + l_z k = \frac{dx}{dl} i + \frac{dy}{dl} j + \frac{dz}{dl} k \quad (4.5.22)$$

と表すと, l と第 5 項の内積は

$$\begin{aligned} -\Omega^2(x i + y j) \cdot \left(\frac{dx}{dl} i + \frac{dy}{dl} j + \frac{dz}{dl} k \right) &= -\Omega^2 \left(x \frac{dx}{dl} + y \frac{dy}{dl} \right) \\ &= -\frac{d}{dl} \left[\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

以上より (4.5.19) は次のように書き表せる.

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad} \psi|^2 + \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) \right] = 0. \quad (4.5.24)$$

この式は一回積分して

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad} \psi|^2 + \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const} \quad (4.5.25)$$

とできる. ここでいう const とは流線に沿って一定であるということである. 特に平衡状態で液滴が剛体回転を行っているとすると (4.5.25) は

$$P = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + y^2) + A \quad (4.5.26)$$

と書ける. このとき A は液滴内部のあらゆる点で同じ値となる定数である. さらにいえば, A は液滴内部の回転軸上での圧力である.

ここでラプラスの式 (4.4.3) を考える. 今回は p_1 として液滴表面付近の圧力 P , p_2 として一定の大気圧 P_0 を考えると (4.5.26) は次のように書き換えられる.

$$2\alpha H = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + y^2) + C. \quad (4.5.27)$$

ここで H は液滴表面の平均曲率を, x, y は表面上の各点の x, y 座標を表しており, $C = A - P_0$ は新しい定数である. つまりこの (4.5.27) は液滴表面での力学的境界条件となっている.

4.5.4 表面のパラメータ表示方法

これから液滴表面をパラメータ表示することを考える. 一般に曲面を表示するために必要なパラメータの数は 2 つで, それらを u, v とする. また 1 つの曲面をパラメータを用いて表示する方法は何通りか考えられる. ここでは具体的にどのようなパラメータ表示方法があるか検討する. 曲面をパラメータ表示したのちに, 先に述べた微分幾何 (第 4.2 章) の知識を使って平均曲率 H をそれらのパラメータで表すことがこの節の最終的な目標である.

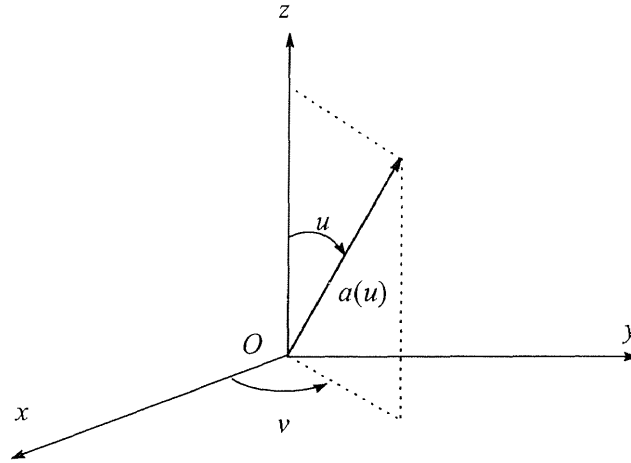


図 4.16: 方法 1

方法 1 $x = a(u) \sin u \cos v$, $y = a(u) \sin u \sin v$, $z = a(u) \cos u$.

このようにパラメータをとった場合, 平均曲率 H (の 2 倍) をパラメータ u , v の関数として表すと次のようになる.

$$2H = \frac{aa'' - 2(a')^2 - a^2}{[a^2 + (a')^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 - \frac{a'}{a} \cot u}{\sqrt{a^2 + (a')^2}}. \quad (4.5.28)$$

ダッシュはパラメータ u での微分を表しており, ここにいたるまでの微分幾何を用いた計算過程は本質ではないので付録にまわした. (4.5.28) を見て分かるように, このパラメータのとり方では今後の計算が思いやられる. 他のパラメータのとり方を試してみる.

方法2 $x = R(u) \cos v, y = R(u) \sin v, z = u.$

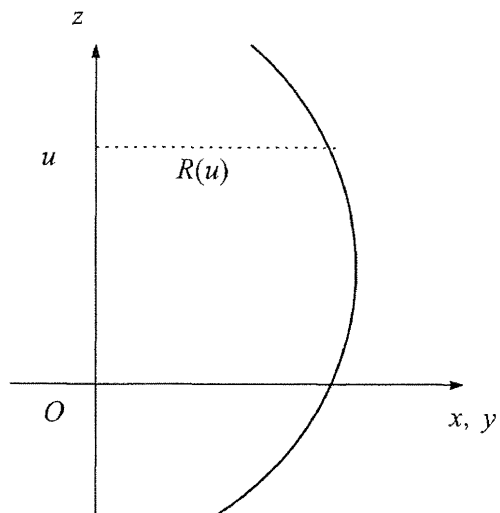


図 4.17: 方法2

このパラメータのとり方だと平均曲率 H (の2倍) は次の式で表される.

$$2H = \frac{1 + (R')^2 - RR''}{R[1 + (R')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.5.29)$$

(4.5.29) は (4.5.28) に比べてかなり形がまともで, これなら期待が持てる. しかしこのパラメータのとり方だとおそらく近似解を得るのがやっとであろう.

方法3 $x = f(u) \cos v, y = f(u) \sin v, z = g(u).$

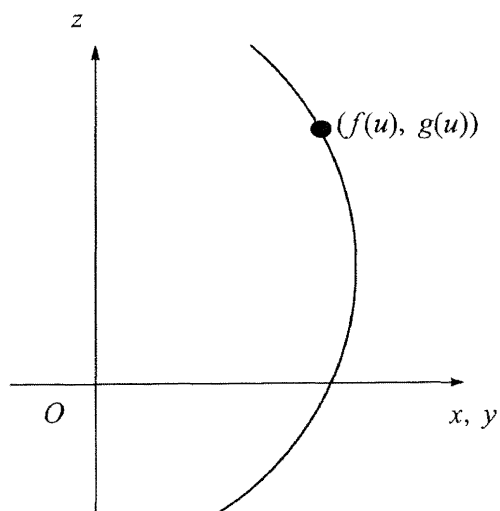


図 4.18: 方法3

このとき平均曲率は次の式で表される.

$$2H = \frac{g'}{f[(f')^2 + (g')^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{f'g'' - f''g'}{[(f')^2 + (g')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.5.30)$$

これは一般的な回転面を表すパラメータのとり方で, (4.5.30) の特別な場合が (4.5.29) となっていることも分かる. つまり, (4.5.30) で $f(u) = R(u)$, $g(u) = u$ とすれば完全に (4.5.29) と一致する. だがこのままだと式は簡単とは言えない. 実はここに規格化条件を付け加えるとこの式がかなり簡単な形になる.

方法4 $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \sin v$, $z = g(u)$ かつ $(f')^2 + (g')^2 = 1$.

つまり方法3に規格化条件

$$(f')^2 + (g')^2 = 1 \quad (4.5.31)$$

を加えると, 平均曲率 H は

$$2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} \quad (4.5.32)$$

となり, 極めて簡単になる. (4.5.31) の意味は, 曲線に沿ったパラメータ u の刻みを x, y, z 軸のそれと一致させるということである.

4.5.5 回転する液滴形状の厳密解

4.5.4 節でパラメータによる平均曲率 H の表示方法を4通り示した. この節では実際に曲率の式を (4.5.27) に代入して液滴の表面での力学的境界条件の式を完成させる. 4通りのパラメータのとり方のうち最も簡単と思われる方法4を採用する. (4.5.32) を (4.5.27) に代入して次の式を得る.

$$\alpha \left(\frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} \right) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 f^2 + C. \quad (4.5.33)$$

以上より, (4.5.31) と (4.5.33) を同時に満たす $f(u)$, $g(u)$ が求まればそれが求めたい回転液滴の形状である. つまりこれは非線形連立常微分方程式の問題である.

まず (4.5.31) をパラメータ u で微分して

$$f'f'' + g'g'' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f''}{g'} = -\frac{g''}{f'}. \quad (4.5.34)$$

これを (4.5.33) の左辺に代入して

$$\alpha \left(\frac{g'}{f} + \frac{g''}{f'} \right) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 f^2 + C. \quad (4.5.35)$$

ここで (4.5.35) の左辺の括弧の中について

$$\begin{aligned} \frac{g'}{f} + \frac{g''}{f'} &= \frac{f'g' + fg''}{ff'} \\ &= \frac{(fg')'}{\frac{1}{2}(f^2)'} \end{aligned} \quad (4.5.36)$$

となるのでこれを (4.5.35) に代入して分母を払うと

$$2\alpha(fg')' = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 f^2 (f^2)' + C(f^2)'. \quad (4.5.37)$$

この式を u で積分して

$$2\alpha fg' = \frac{1}{4}\rho\Omega^2 f^4 + Cf^2 + D. \quad (4.5.38)$$

ただし D は積分定数である. ここで境界条件として

$$f = 0 \quad \text{のとき} \quad g' = 0, \quad f' = \pm 1 \quad (4.5.39)$$

を用いると $D = 0$ が得られる. よって (4.5.38) は両辺 f で割ることができて,

$$2\alpha g' = \frac{1}{4}\rho\Omega^2 f^3 + Cf. \quad (4.5.40)$$

よって (4.5.31) と (4.5.40) から f だけの方程式にすると

$$\frac{df}{du} = \sqrt{1 - \frac{C^2}{4\alpha^2} f^2 \left(1 + \frac{\rho\Omega^2}{4C} f^2\right)^2}. \quad (4.5.41)$$

ここで符号は便宜的に正のときのみを考える. さらに変数変換

$$f^2 = \zeta \quad (4.5.42)$$

を施すと (4.5.41) は次のような積分になる.

$$\frac{d\zeta}{du} = \sqrt{\zeta \left[4 - \frac{C^2}{\alpha^2} \zeta \left(1 + \frac{\rho\Omega^2}{4C} \zeta \right)^2 \right]}. \quad (4.5.43)$$

これは楕円積分であり, 解析的に解くことも可能である.

4.5.6 数値シミュレーション

(4.5.43) は楕円関数を用いれば解くこともできるが, ここでは前節で得た微分方程式をルンゲ・クッタ法により数値的に解析する. 液滴としては次の 3 種類のことを考え, それぞれ回転数 Ω が変化するときの形状を調べてみた. 以下に 3 種類の液体の密度 ρ [kg/m³] と表面張力係数 α [mN/m] を示した.

	ρ [kg/m ³]	α [mN/m]
水	997.1	72.74
エチレングリコール	1110	48.4
プロピレンカーボネート	1205.7	44

表 4.1: 物性値

各物性値を使って (4.5.41) から数値的に回転液滴の形状を求める. このとき回転体を z 軸を含む平面で切ったときの断面は楕円かそれが発展した形状であり, その長半径を f_0 とする. そこでは

$$g = 0, f' = 0, g' = 1 \quad (4.5.44)$$

であるから, この境界条件を (4.5.40) に代入することで定数 C の値が求まる.

$$C = \frac{2\alpha}{f_0} - \frac{1}{4}\rho\Omega^2 f_0^2. \quad (4.5.45)$$

以上よりシミュレーションに用いる方程式は (4.5.45) を (4.5.40) に代入してできた式と (4.5.31) の2つである.

$$\frac{dg}{du} = \frac{f}{f_0} - \frac{\rho\Omega^2 f_0^2}{8\alpha} f \left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right), \quad (4.5.46)$$

$$\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2 = 1. \quad (4.5.47)$$

次の節には, 具体的に行った3種類の液滴によるシミュレーション結果を載せる. 3種類とは水, エチレングリコール, そしてプロピレンカーボネートである. ただし計算は数値が発散したところで止めて, 液滴としての形状を維持できていないものは載せなかった. グラフの横軸は回転角速度 Ω を, 縦軸は液滴の扁平率 a をそれぞれあらわしている. ここで扁平率とは液滴断面形状で長半径と短半径の比である.

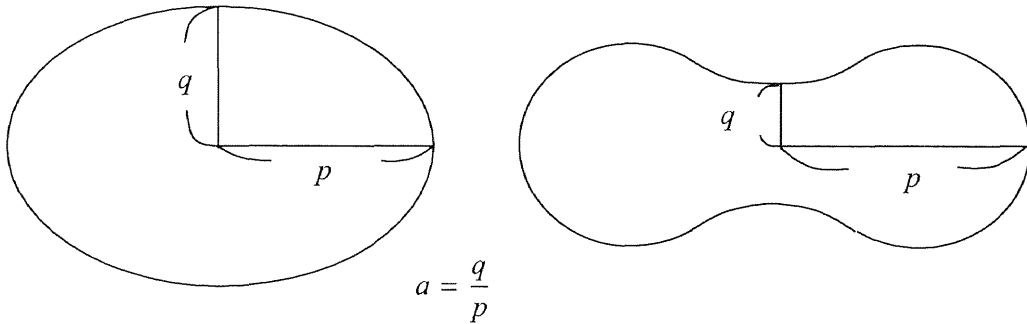


図 4.19: 扁平率 a の定義

4.5.7 水滴の形状変化

水滴の形状変化をシミュレートする. シミュレーションの条件は以下のとおり.

回転前の半径 : 1.0 [cm]
表面張力係数 : 72.74 [mN/m]
密度 : 997.1 [kg/m³]

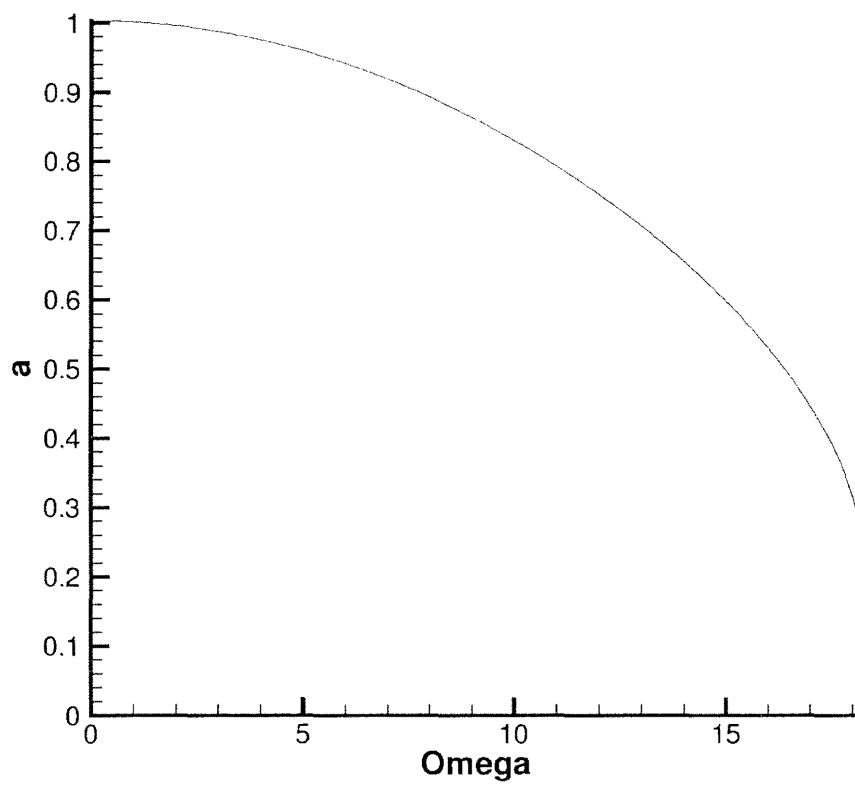


図 4.20: Ω と扁平率 a の関係 (水)

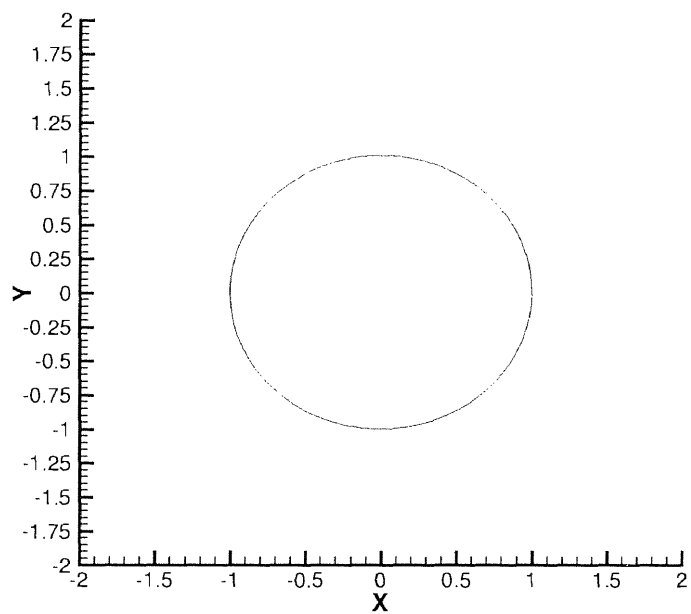


图 4.21: $\Omega = 0.00\text{rad/s}$

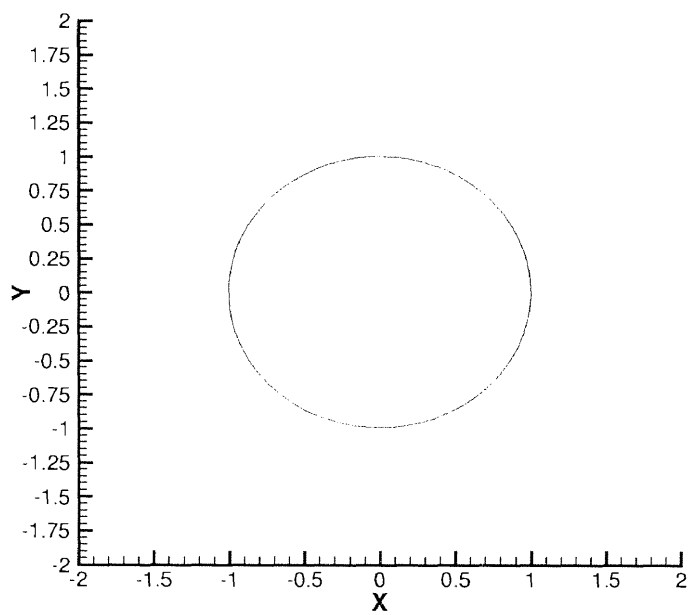
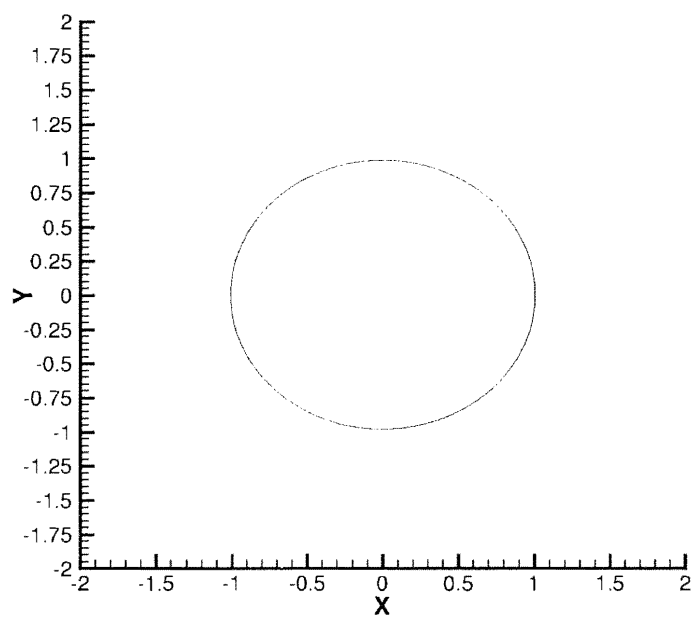
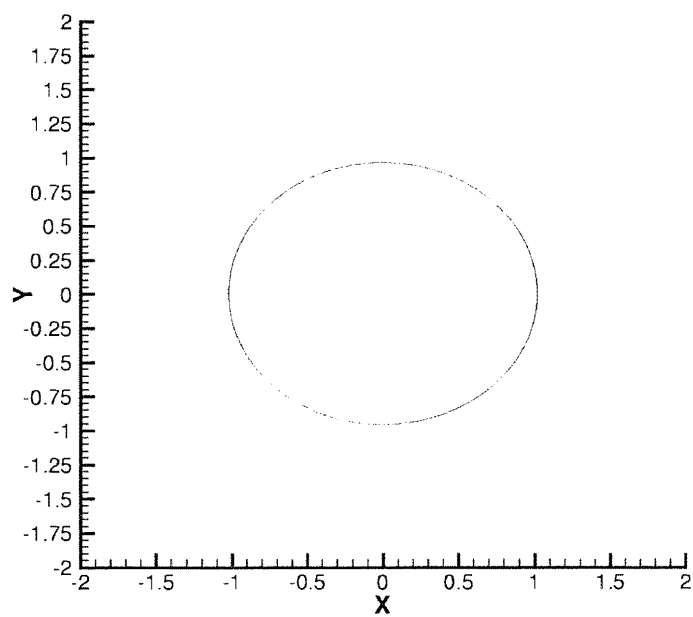


图 4.22: $\Omega = 2.00\text{rad/s}$



⊠ 4.23: $\Omega = 4.00\text{rad/s}$



⊠ 4.24: $\Omega = 6.00\text{rad/s}$

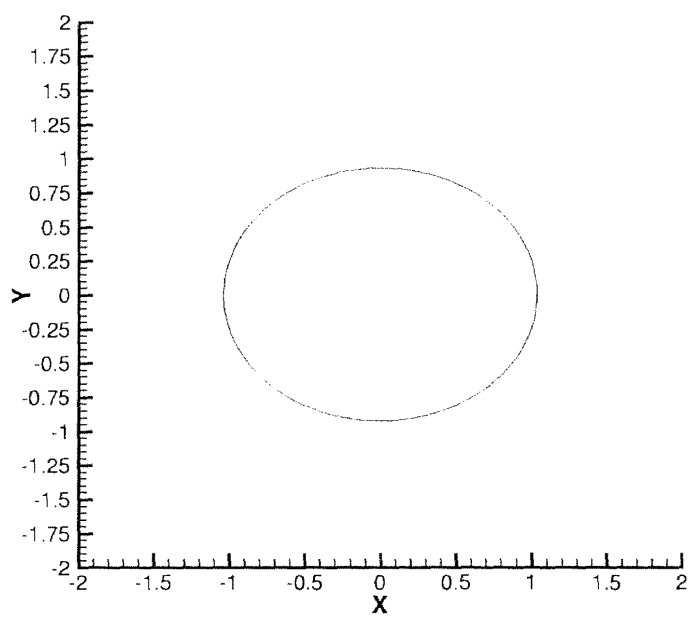


Fig. 4.25: $\Omega = 8.00 \text{ rad/s}$

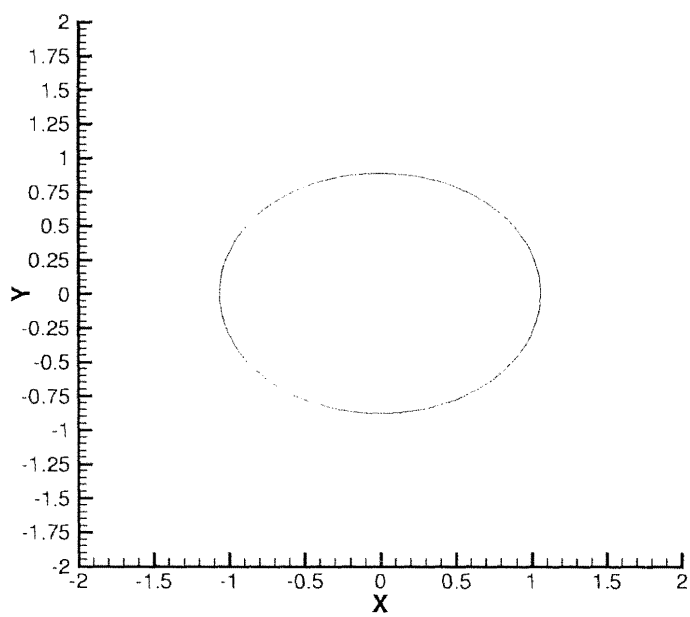


Fig. 4.26: $\Omega = 10.0 \text{ rad/s}$

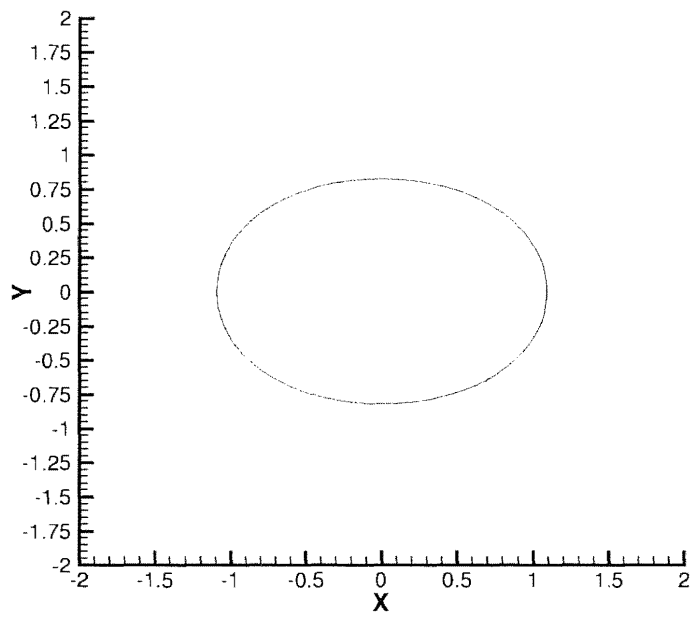


Fig 4.27: $\Omega = 12.0 \text{ rad/s}$

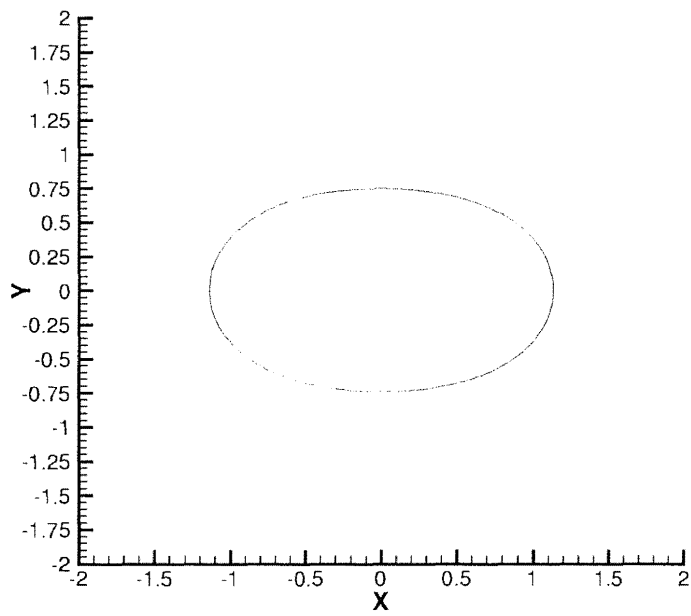


Fig 4.28: $\Omega = 14.0 \text{ rad/s}$

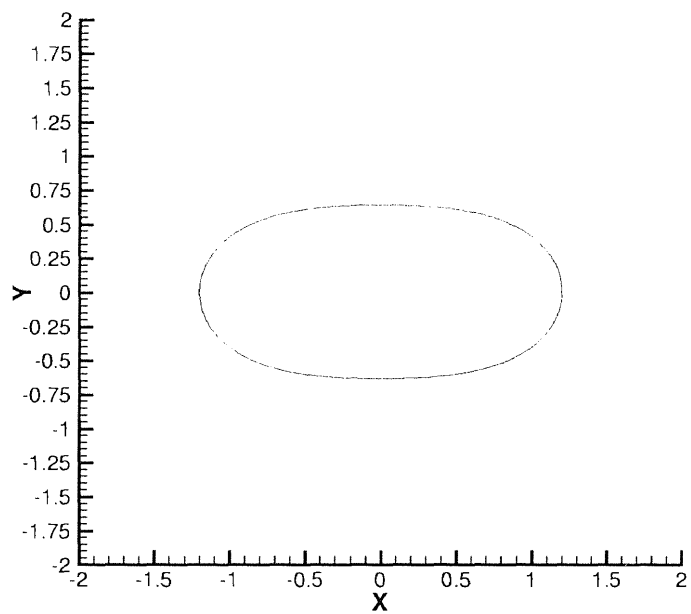


图 4.29: $\Omega = 16.0 \text{ rad/s}$

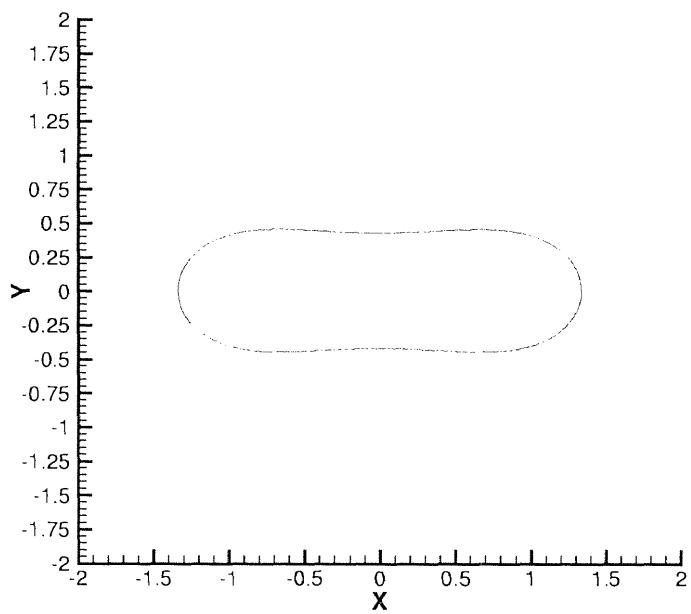


图 4.30: $\Omega = 18.0 \text{ rad/s}$

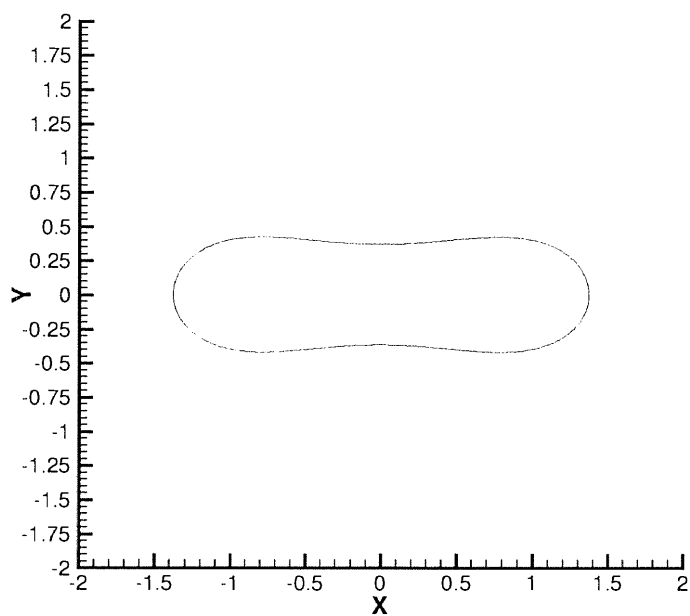


图 4.31: $\Omega = 18.2 \text{ rad/s}$

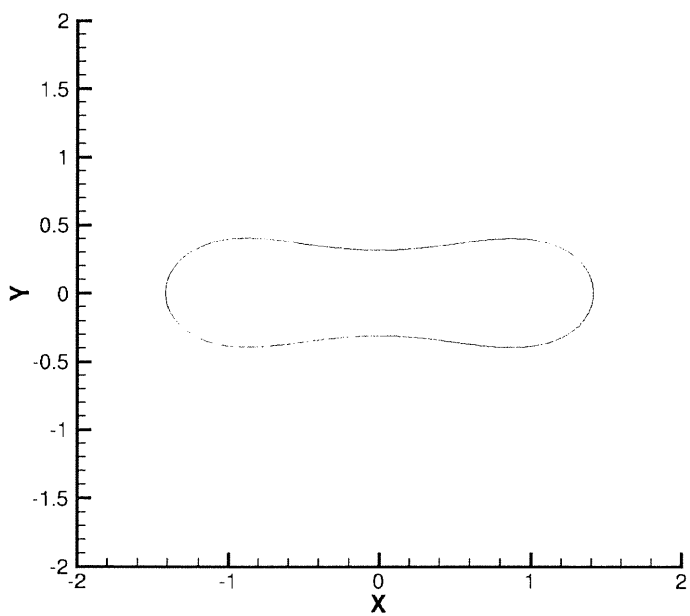


图 4.32: $\Omega = 18.28 \text{ rad/s}$

4.5.8 エチレングリコール液滴の形状変化

回転前の半径 : 1.0 [cm]
表面張力係数 : 48.4 [mN/m]
密度 : 1110 [kg/m³]

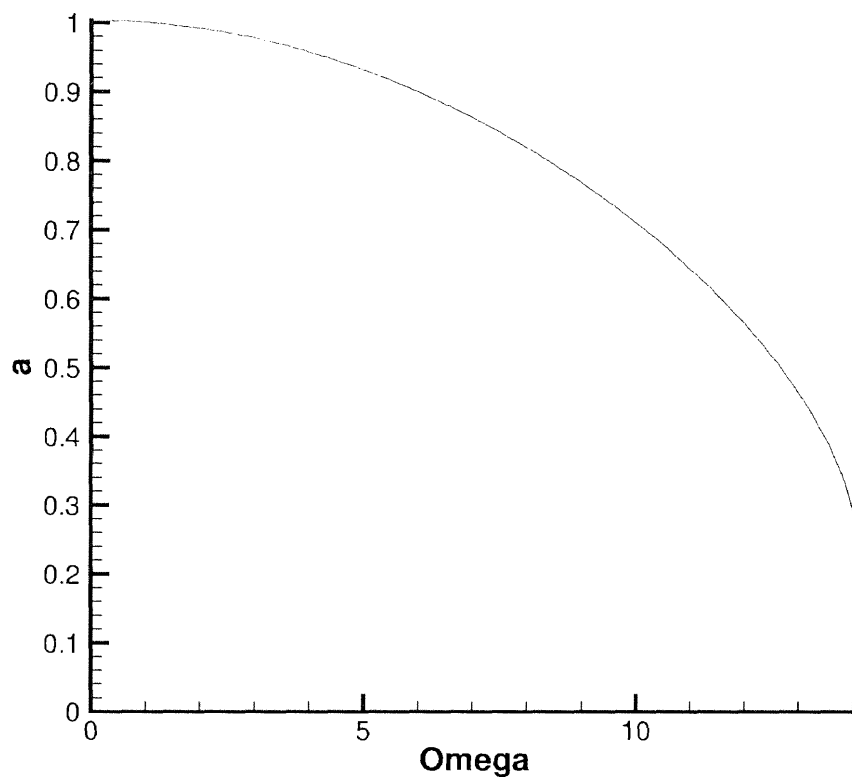
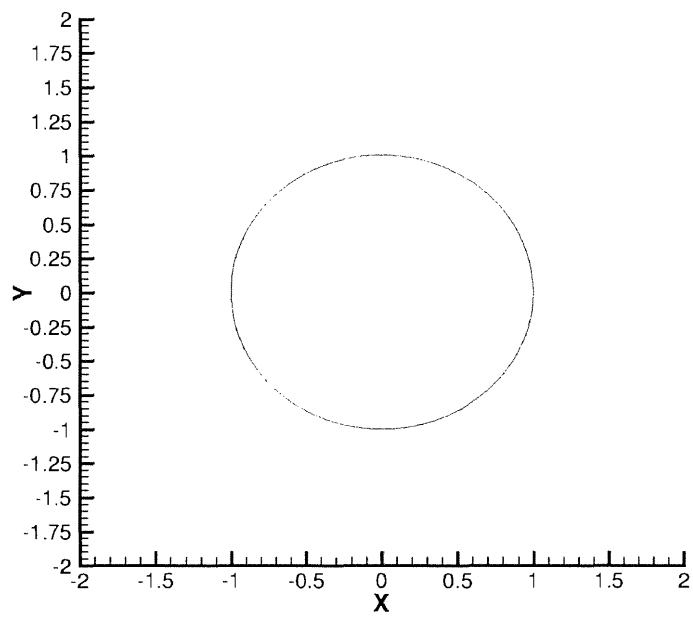
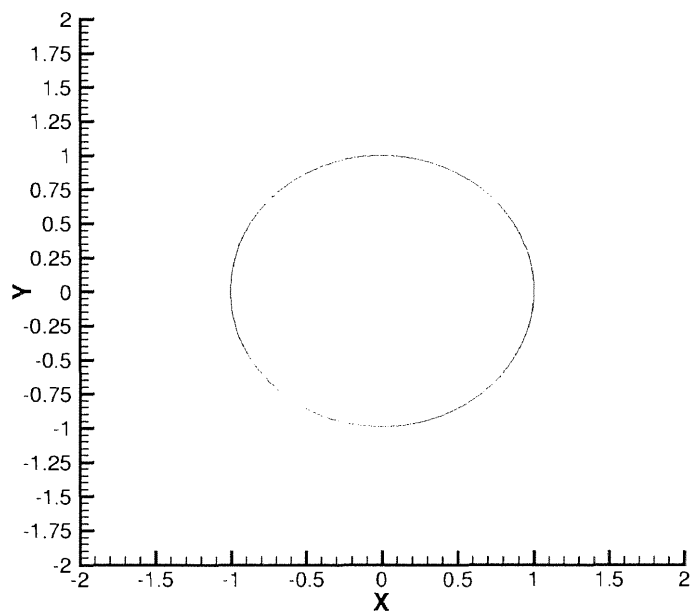


図 4.33: Ω と扁平率 a の関係 (エチレングリコール)



☒ 4.34: $\Omega = 0.00rad/s$



☒ 4.35: $\Omega = 2.00rad/s$

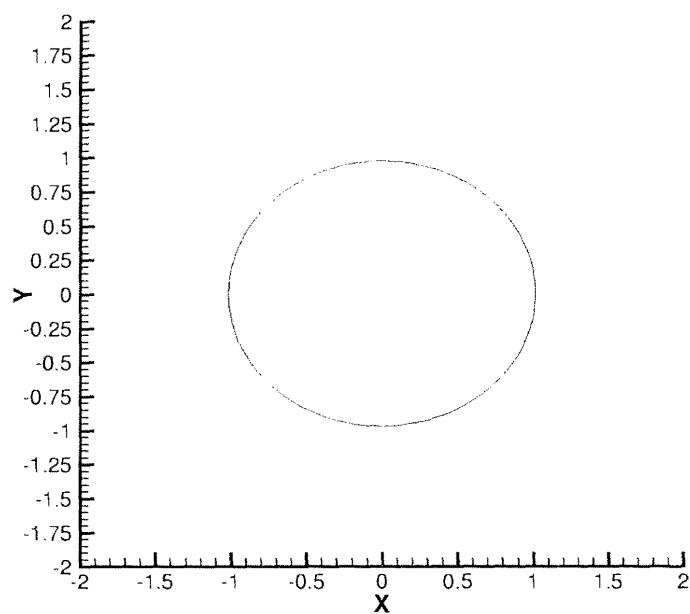


图 4.36: $\Omega = 4.00\text{rad/s}$

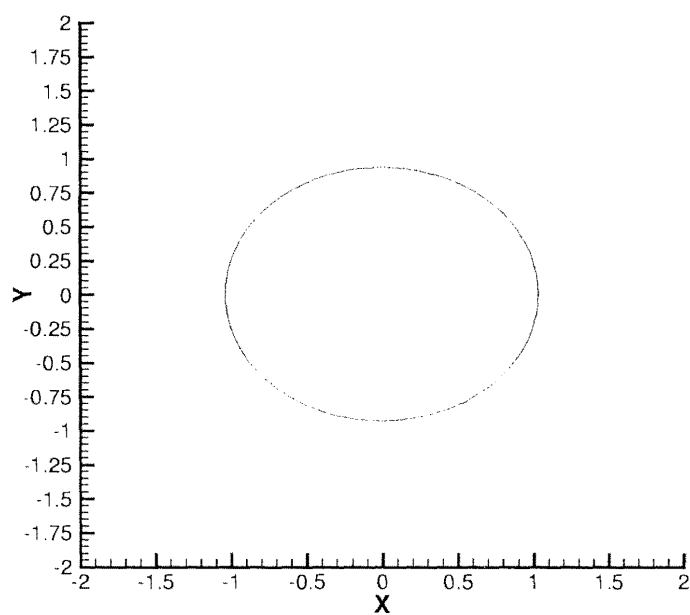
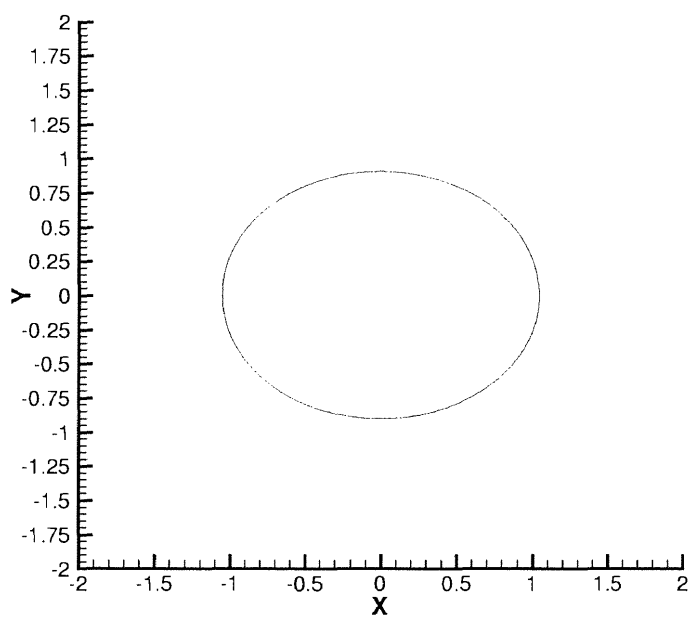
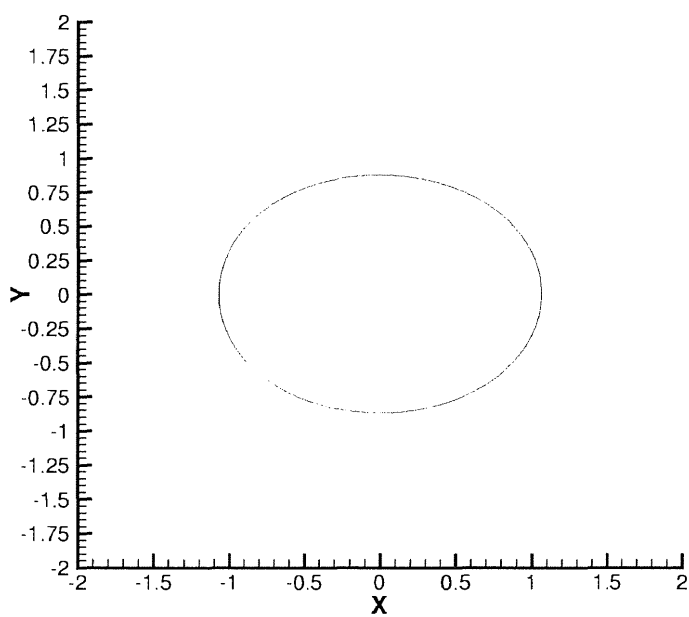


图 4.37: $\Omega = 6.00\text{rad/s}$



⊠ 4.38: $\Omega = 7.00\text{rad/s}$



⊠ 4.39: $\Omega = 8.00\text{rad/s}$

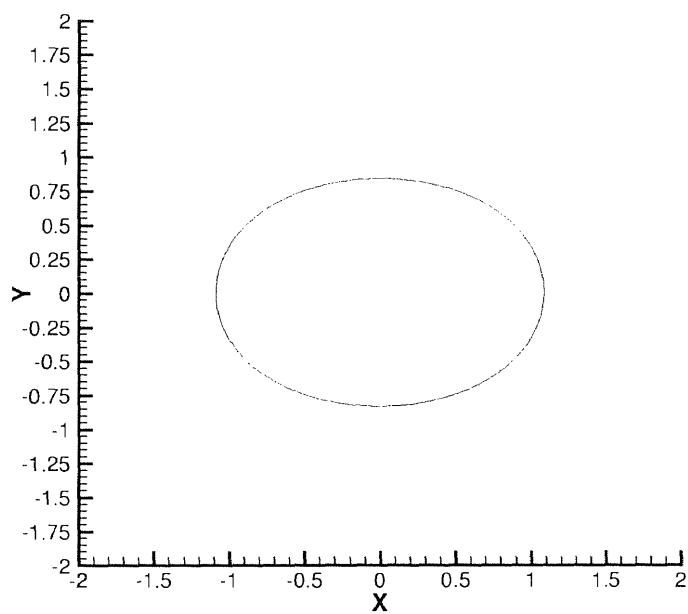


图 4.40: $\Omega = 9.00 \text{ rad/s}$

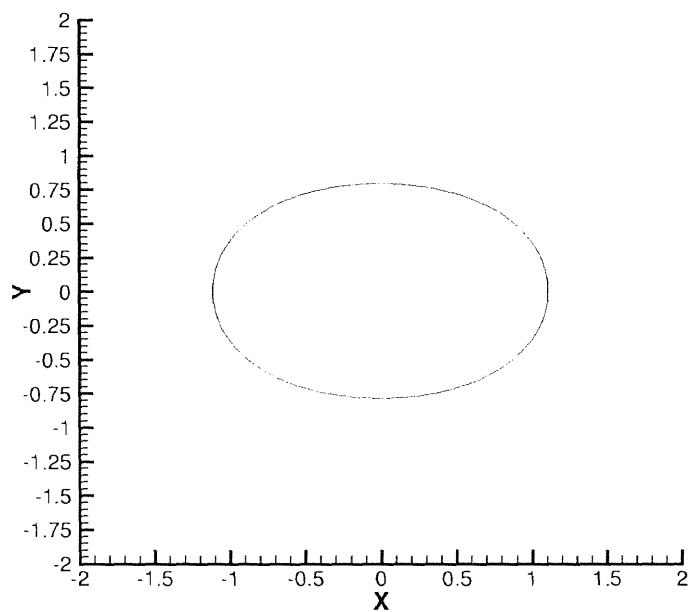
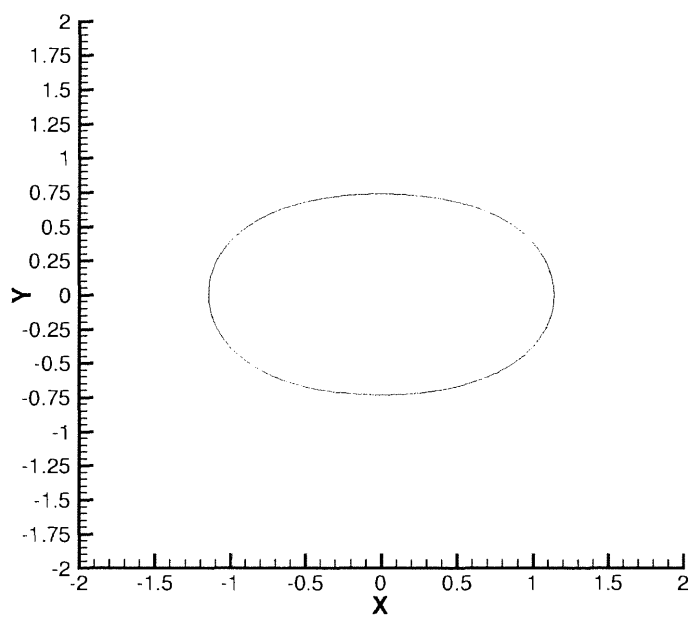
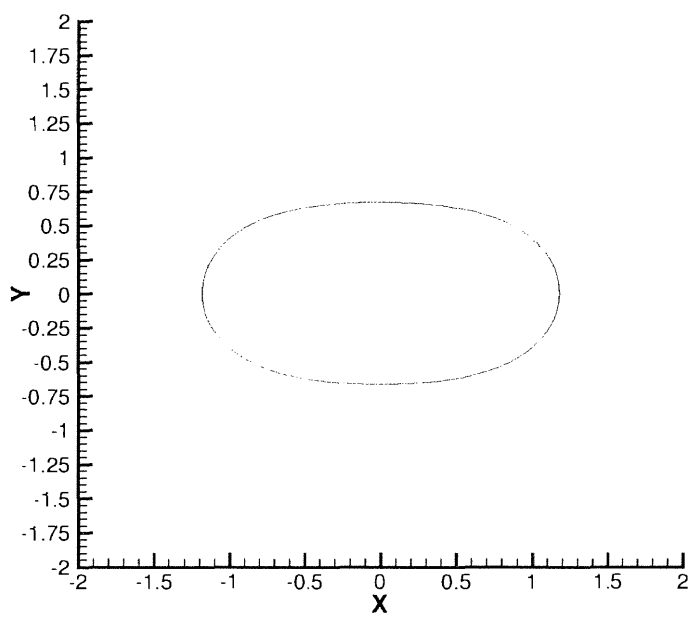


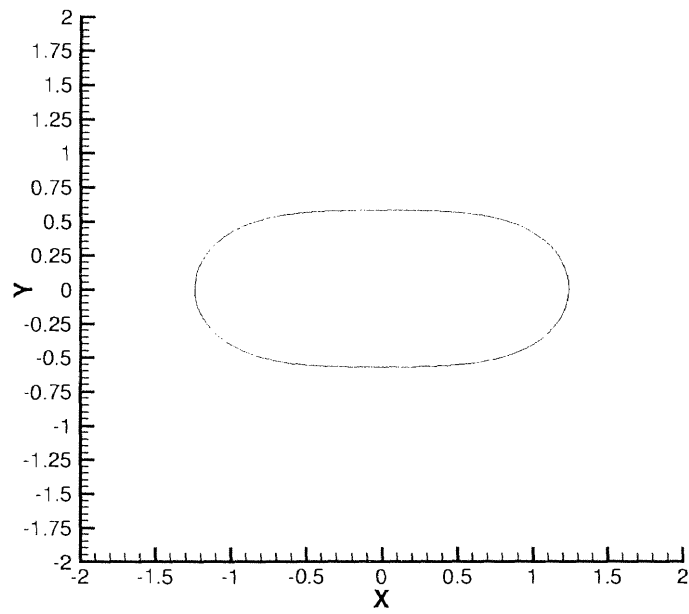
图 4.41: $\Omega = 10.0 \text{ rad/s}$



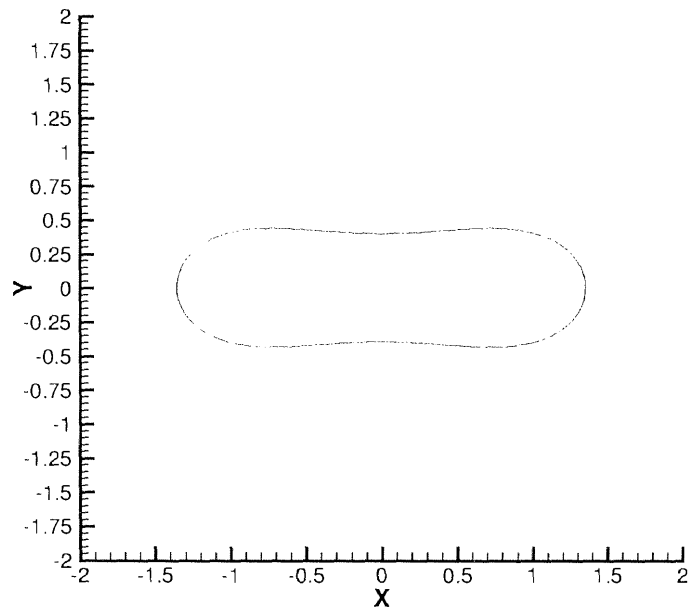
⊠ 4.42: $\Omega = 11.0 \text{ rad/s}$



⊠ 4.43: $\Omega = 12.0 \text{ rad/s}$



⊠ 4.44: $\Omega = 13.0 \text{ rad/s}$



⊠ 4.45: $\Omega = 14.0 \text{ rad/s}$

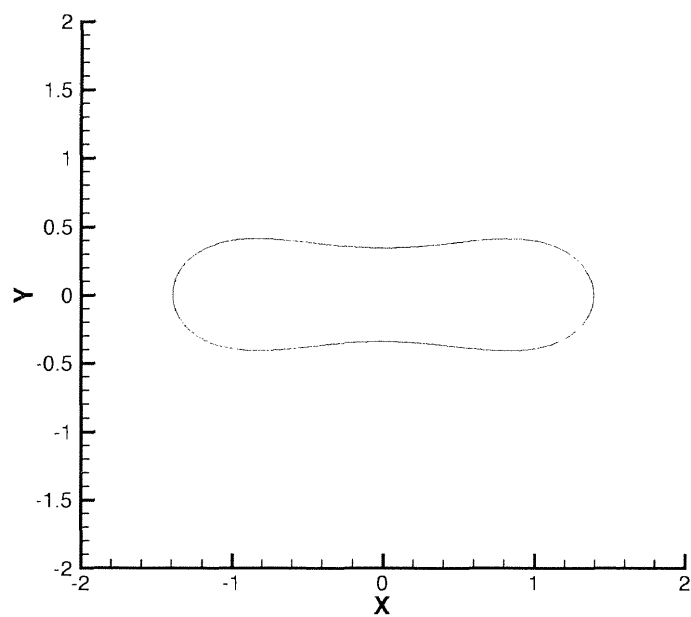


Fig. 4.46: $\Omega = 14.11 \text{ rad/s}$

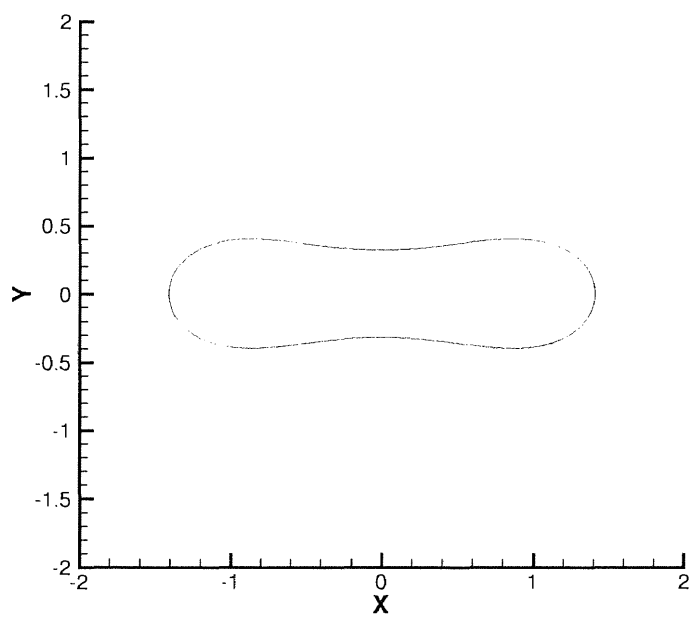


Fig. 4.47: $\Omega = 14.13 \text{ rad/s}$

4.5.9 プロピレンカーボネートの形状変化

回転前の半径 : 1.0 [cm]
表面張力係数 : 44 [mN/m]
密度 : 1205.7 [kg/m³]

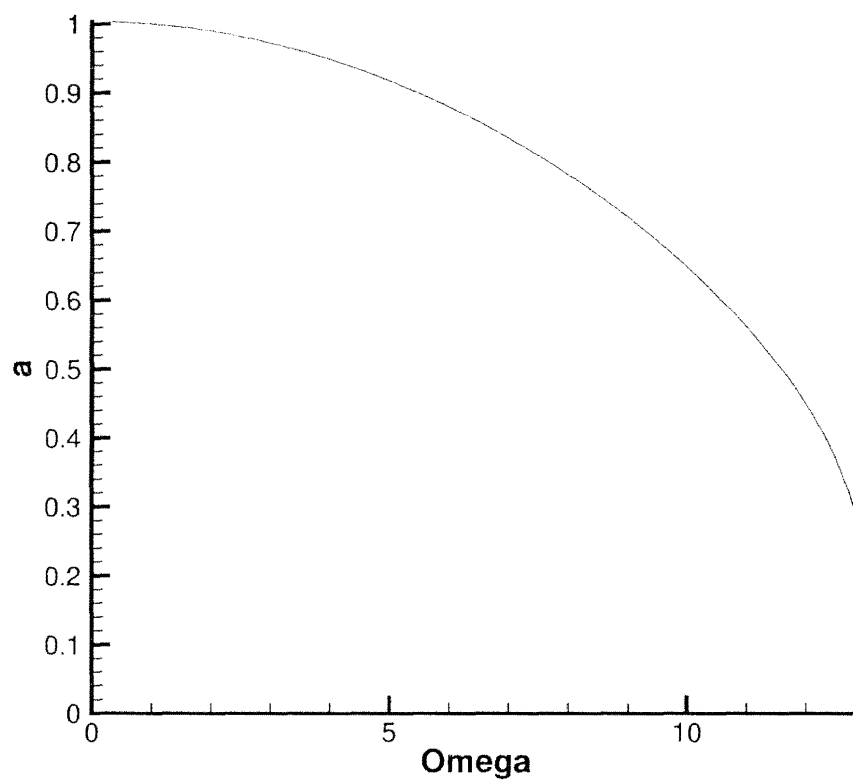


図 4.48: Ω と扁平率 a の関係 (プロピレンカーボネート)

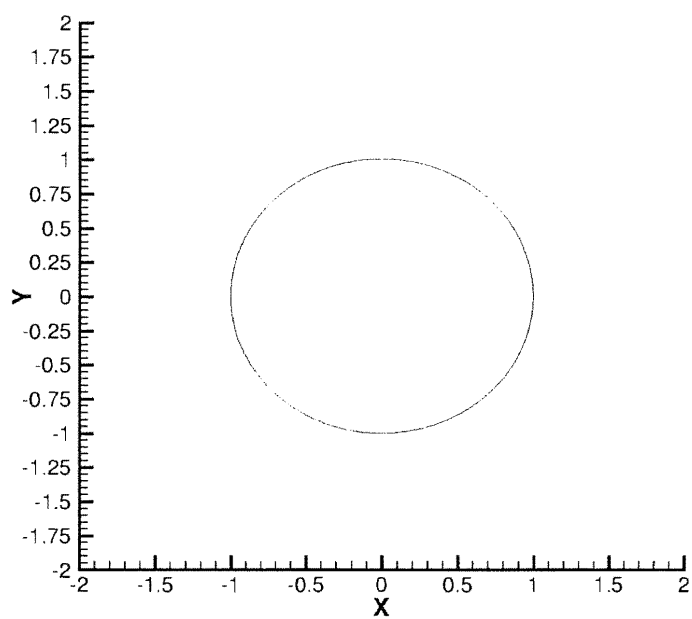


图 4.49: $\Omega = 0.00\text{rad/s}$

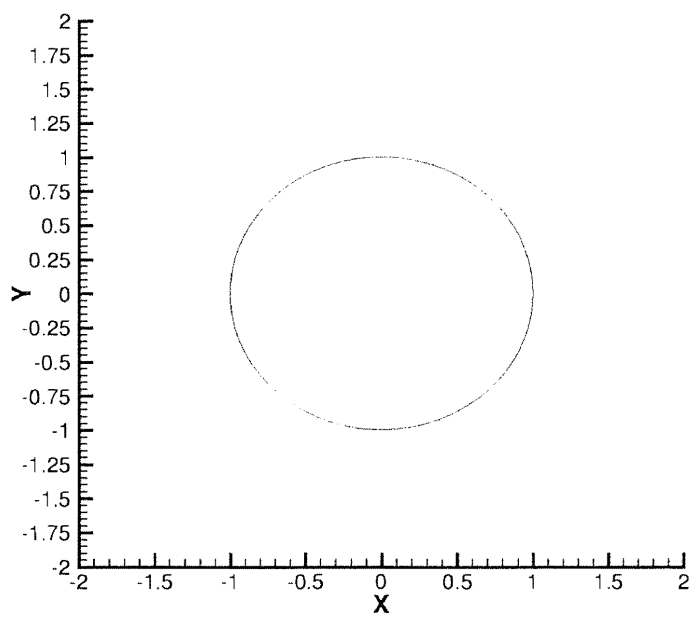
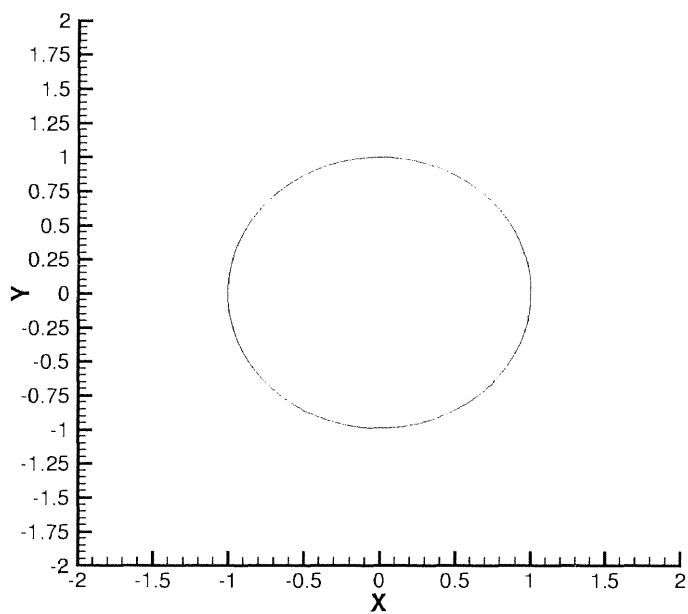
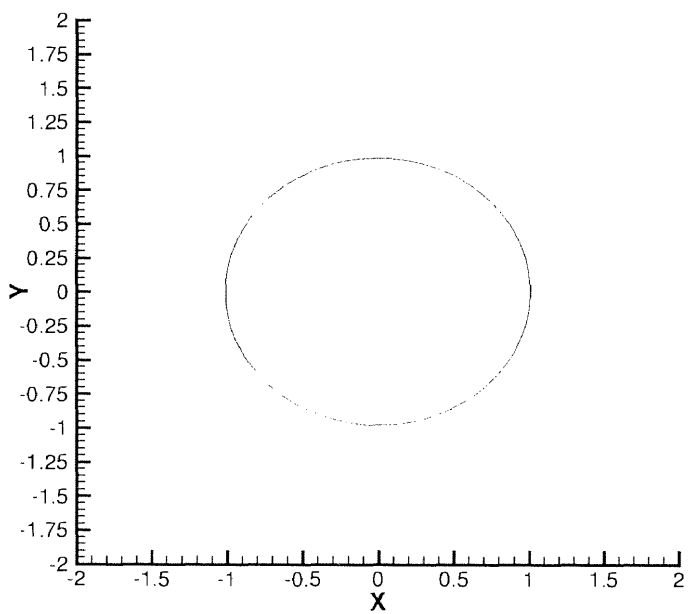


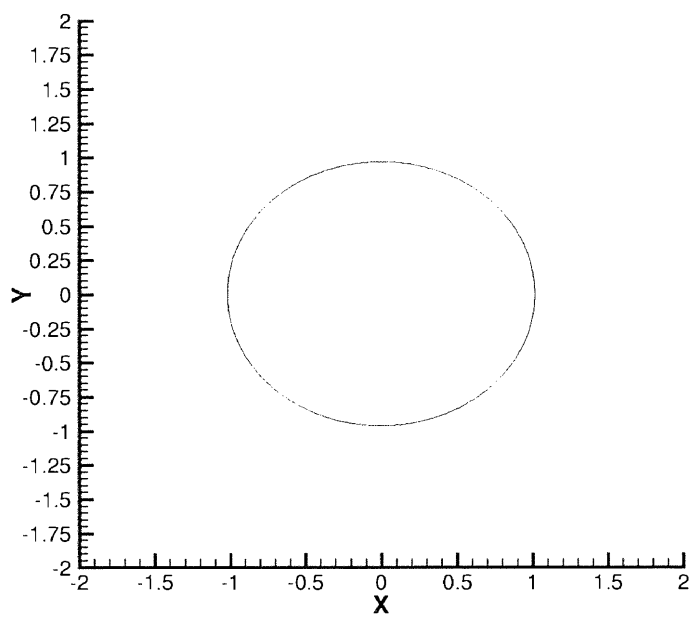
图 4.50: $\Omega = 1.00\text{rad/s}$



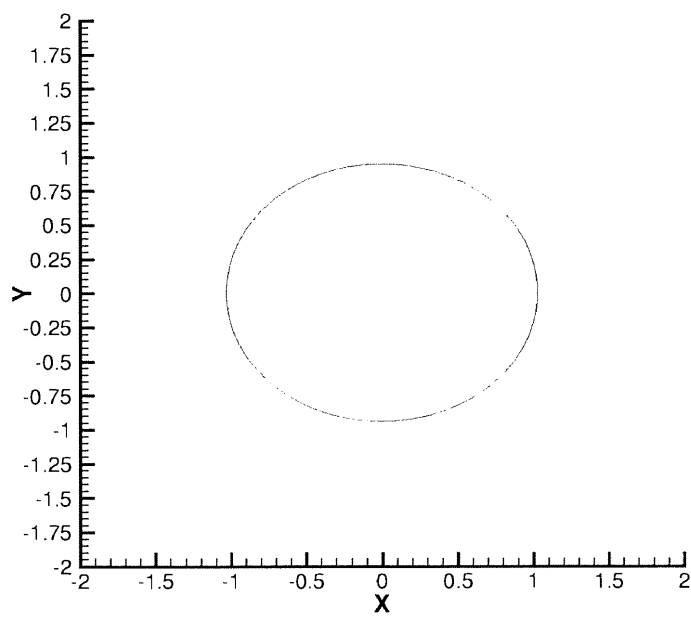
☒ 4.51: $\Omega = 2.0 \text{ rad/s}$



☒ 4.52: $\Omega = 3.00 \text{ rad/s}$



⊠ 4.53: $\Omega = 4.00 \text{ rad/s}$



⊠ 4.54: $\Omega = 5.00 \text{ rad/s}$

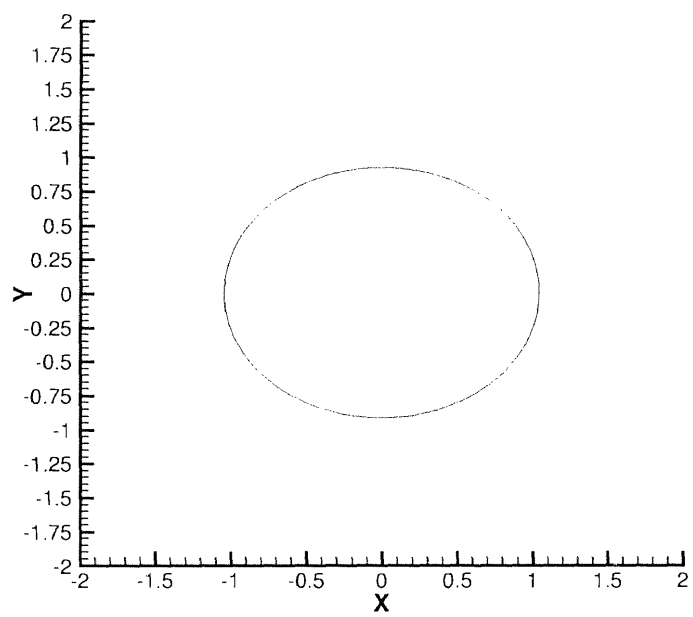


Fig. 4.55: $\Omega = 6.0 \text{ rad/s}$

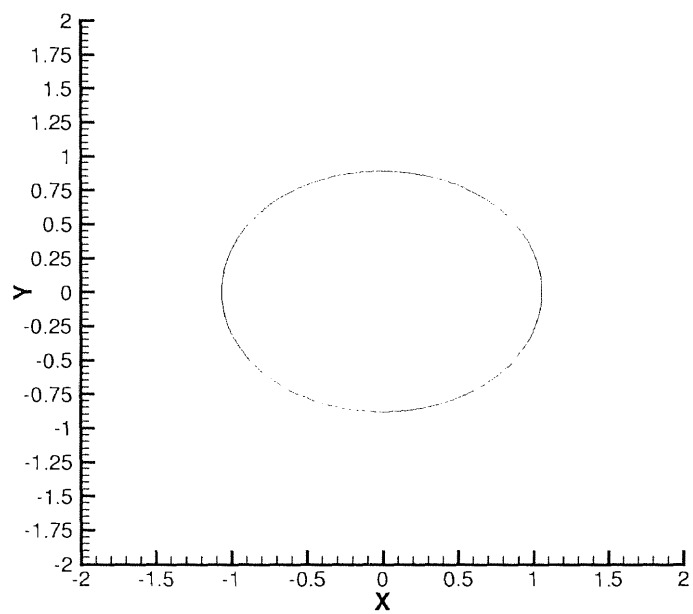
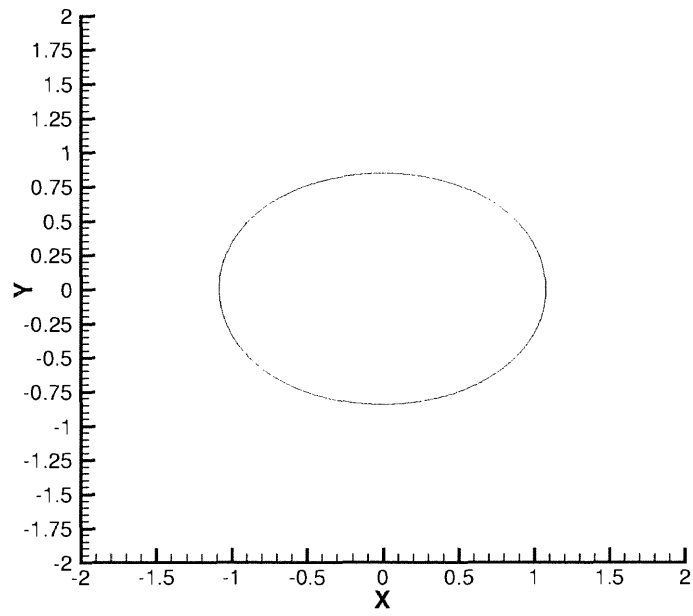
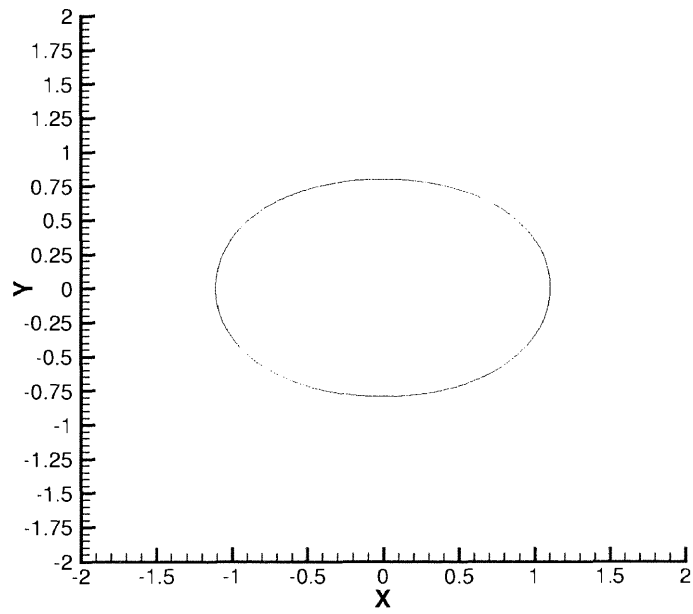


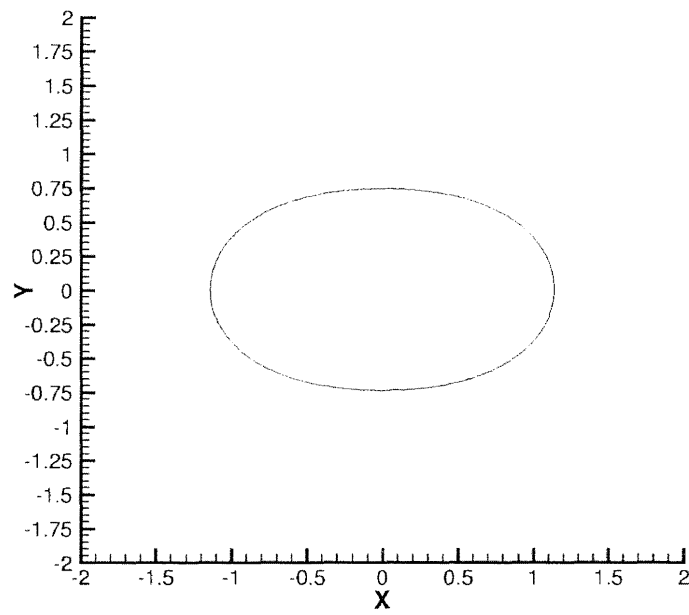
Fig. 4.56: $\Omega = 7.00 \text{ rad/s}$



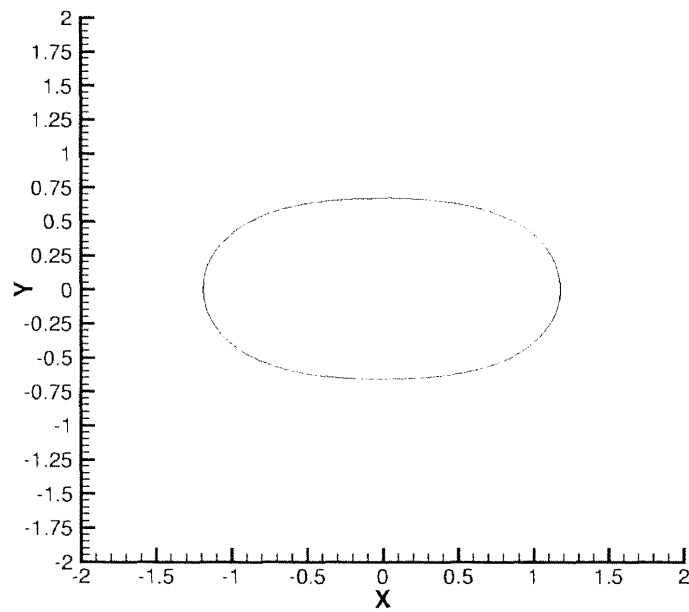
✕ 4.57: $\Omega = 8.00 \text{ rad/s}$



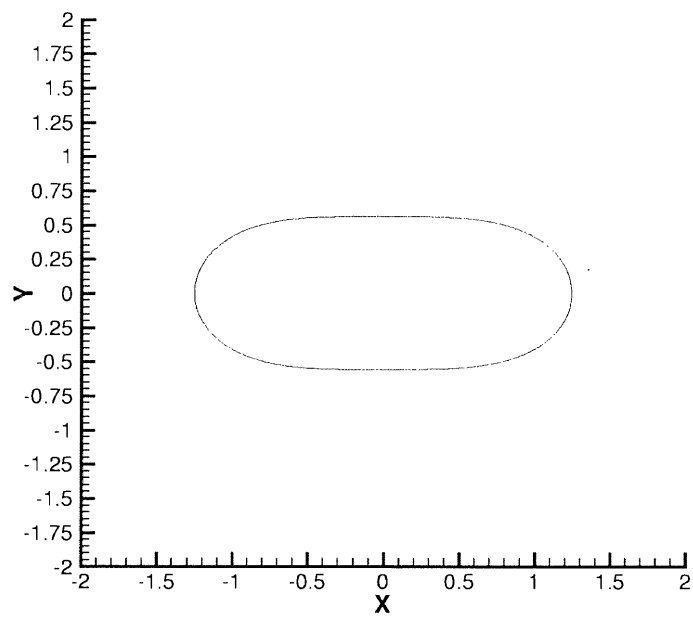
✕ 4.58: $\Omega = 9.00 \text{ rad/s}$



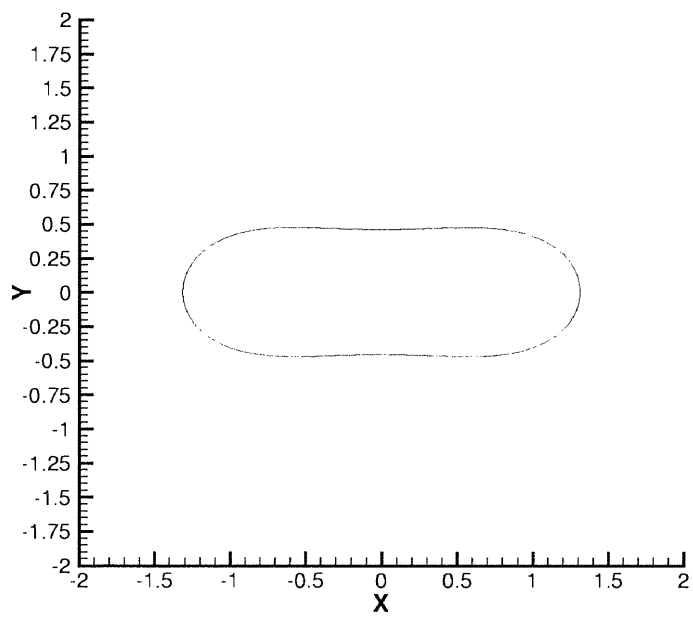
⊠ 4.59: $\Omega = 10.0 \text{ rad/s}$



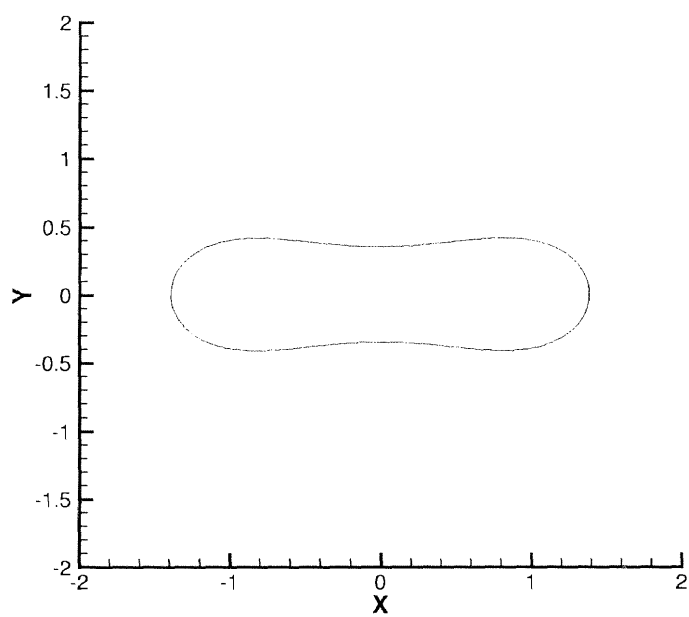
⊠ 4.60: $\Omega = 11.0 \text{ rad/s}$



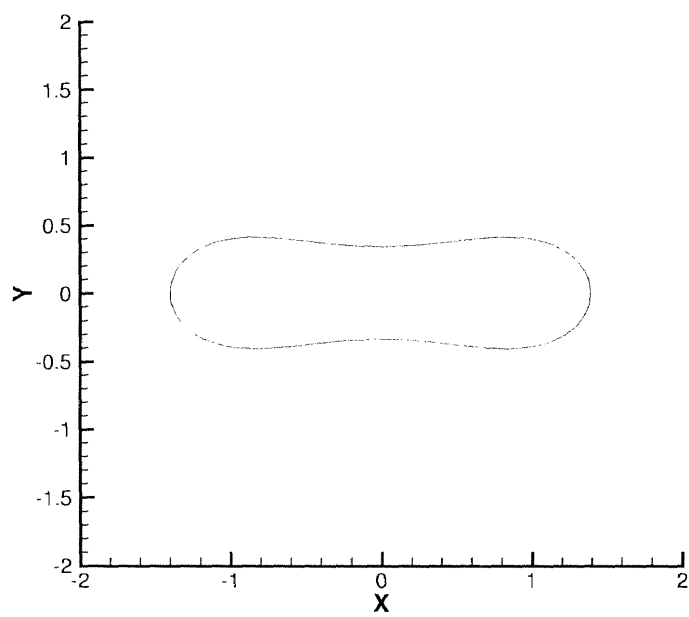
⊠ 4.61: $\Omega = 12.0 \text{ rad/s}$



⊠ 4.62: $\Omega = 12.6 \text{ rad/s}$



⊠ 4.63: $\Omega = 12.9rad/s$



⊠ 4.64: $\Omega = 12.91rad/s$

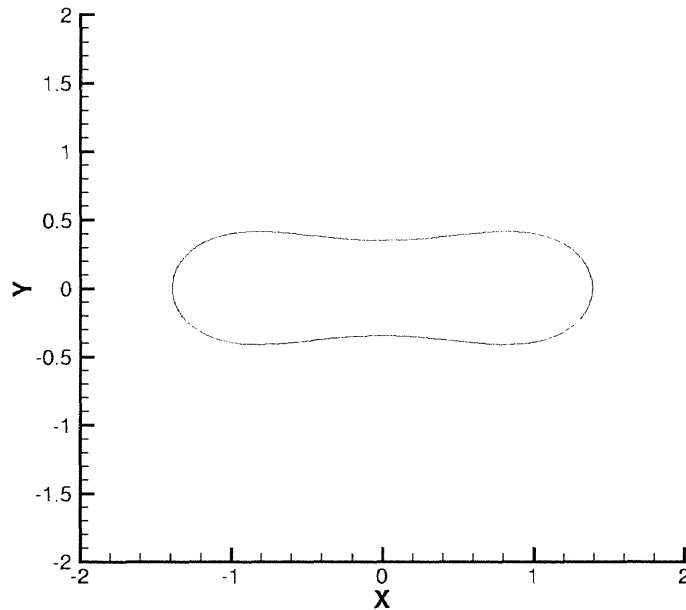


図 4.65: $\Omega = 12.92 \text{ rad/s}$

4.5.10 考察

今回のシミュレーションで分かったことが2つある. 一つ目に, 角速度 Ω をゼロから少しずつ大きくすると, 初めは球体である液滴も次第に扁平し回転楕円体の形状になり, それよりもさらに回転数を上げると, 液滴中央部がくぼみ始めて最終的には形状を維持できなくなるということである. この形状を赤血球型と呼ぶことにする. 維持できないであろうということは, 前節で述べたシミュレーションである臨界回転数 Ω_{cr} を超えると数値的にも発散してしまうことから予想したものである.

二つ目に, 角速度 Ω を同じ割合で大きくしていった際, 液滴が回転楕円体の形をしている間は形状の変化は緩やかだが, 一度くぼみが入ってしまうと急激にそのくぼみが発達してしまい, あっという間に数値も発散してしまう. つまり, 赤血球型の液滴は形状はかろうじて維持しているものの構造的にはもろく, すぐに発散してしまうということが分かった.

4.6 まとめ

4.6.1 考察

実験的に次のようなことがわかっている. すなわち, 楕円体の形状からはずれた液滴はとても不安定で, 図 4.66 のようなダンベル型の two-lobed shape になることもあれば, 図 4.67 や図



図 4.66: two-lobed shape

4.68 のようにそれ以上に分裂したまま回転する状態も存在する. 不思議なことにこれらの液滴は, 複数の塊に分裂はするもののそれ以上は互いに離れることなくそのままの形で回り続ける.



図 4.67: three-lobed shape



図 4.68: five-lobed shape

このような分岐はどのようにして起こるのかはまだわかっていないが, 今回の研究でいつ液滴が回転楕円体から two-lobed shape などに形状が遷移するのかを推測することができる. 前章の数値シミュレーションで液滴は, 回転楕円体から赤血球型へ形状が移るとすぐさま発散してしまうことがわかった. このことから, この発散現象が起きているときに液滴は two-lobed shape になっていると推測される. また今回のシミュレーションで数値が発散したのは, 液滴がある回転速度を超えたとき, 軸対称でしかも内部がポテンシャル流となる形状の解が存在しないためであると思われる.

ここで物理的な考察を加える. 液滴が回転楕円体の形状をしている間は, 液滴の中心にはその全体の構造を維持するのに必要なだけの圧力がまだ存在しているため, 形状もそのまま楕円体の形で安定となることができ. しかし回転速度を大きくするにしたがって液滴の中心圧はどんどん小さくなり, 赤血球型になるころには中心圧が全構造を支えきれなくなる限界まで来ている. このことは (4.5.45) で Ω を大きくしていくと C がゼロへむけてどんどん小さくなっていくことからわかる. C は液滴の回転軸上での圧力と外圧との差を表しているから, Ω を大きくしていくといつかかならずゼロになる. その瞬間液滴は two-lobed shape となるのである.

表 4.2 は水滴, エチレングリコール液滴, プロピレンカーボネート液滴が楕円体もしくは赤血球型から two-lobed shape へ遷移すると思われる回転速度 Ω_{cr} とその物性値を載せたもので

ある. このことから, 物質の表面張力が大きいほど回転による変形は小さいことがわかる.

	$\Omega_{cr}[\text{rad/s}]$	$\alpha [\text{mN/m}]$	$\rho [\text{kg/m}^3]$
水	18.28	72.74	997.1
エチレングリコール	14.13	48.4	1110
プロピレンカーボネート	12.92	44	1205.7

表 4.2: 物性値と臨界角速度 Ω_{cr}

4.6.2 今後の課題

第4章では球からの微小変形 $\delta\zeta$ を考えたが, この場合は回転楕円体からの微小変形を考える必要がある.

また, 今回の研究では液滴の内部流を, 回転系から見たときポテンシャル流であるとして議論を進めたので, 今後は粘性や渦も考慮に入れた場合の液滴の変形を求める.

最後に, 今回平衡状態しか扱っていないので, 液滴が大きく変形振動するときも考える必要がある. 今回の研究で液滴は回転には強いことが分かった. よって液滴が大きく変形しているときは, その変形のうち回転によるものの占める割合はとても小さく, その大部分は平衡状態となっている回転楕円体のまわりの振動によるものであることが分かる. おそらく液滴が大きく変形している瞬間と, 球に近い形をしている瞬間とでは回転速度も異なっているであろうから, それらについても考慮しなければならないし, 粘性があればその振動は少しずつ減衰していくであろう. いずれにせよ, それらの振動について議論することは今後の液滴技術の発展に必要不可欠である.

第5章 数値解析

前章までに示してきたように、浮遊液滴は容器壁の影響を受けないため、高温の熔融金属の物性測定に利用されている。液滴の浮遊は、重力場では、第2章で用いた静電力等により制御され、表面張力は、液滴形状の変形の振動数から、また、粘性係数は振動の減衰から求められる。この際、線形理論に基づいた関係式⁽⁵⁻¹⁾が用いられることが多い。測定のためには、液滴径及び変形のいずれをも大きくすることが望ましいが、線形理論の仮定からは、変形は十分小さくなければならない。本章では、浮遊液滴の振動の数値シミュレーションを行い、振動モード毎の振幅及び周期の変化と減衰を検討し、さらに、振動に及ぼす振幅と回転の影響について検討する。

5-1 解析手法

液滴の運動はレベルセット法⁽⁵⁻²⁾により計算する。液滴の運動を表す基礎方程式は、以下の連続の式及び非圧縮ナビエーストークス方程式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5-1)$$

$$\rho D\mathbf{u} / Dt = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \mathbf{F}_s \quad (5-2)$$

ここで、 \mathbf{u} 、 ρ 、 p 、 μ は、それぞれ、速度、密度、圧力、粘性係数であり、 \mathbf{D} は、粘性応力テンソル、 \mathbf{F}_s は表面張力による体積力である。表面張力項は、

$$\mathbf{F}_s = \sigma \kappa \delta \nabla \phi \quad (5-3)$$

であり、 σ 、 κ 、 δ 、 ϕ は、それぞれ表面張力、曲率、Dirac のデルタ関数、レベルセット関数である。レベルセット関数は、表面で $\phi=0$ 、液相内で $\phi<0$ 、気相内で $\phi>0$ と定義する。曲率は、

$$\kappa = \nabla \cdot (\nabla \phi / |\nabla \phi|) \quad (5-4)$$

と表される。密度及び粘性は、気相(g)及び液相(l)の値により

$$\rho = \rho_l + (\rho_g - \rho_l)H \quad (5-5)$$

$$\mu = \mu_l + (\mu_g - \mu_l)H \quad (5-6)$$

と与えられ、 H は、以下に定義される Heaviside 関数である。

$$H = \begin{cases} 0 & (\phi < -\varepsilon) \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & (-\varepsilon \leq \phi \leq \varepsilon) \\ 1 & (\varepsilon < \phi), \end{cases} \quad (5-7)$$

ここで、 ε は、 $|\phi| < \varepsilon$ で $\nabla \phi = 1$ となる微小定数である。レベルセット関数の変化は、

$$\partial\phi/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (5-8)$$

により得られる。

変数は無次元化し、差分法により数値計算を行う。スタガードメッシュを用い、対流項は2次の風上差分、他の項は中心差分により評価する。時間方向は、2次のAdams-Bashforth法を用いる。圧力と流速は、SMAC法により求める。レイノルズ数とウェーバー数は、それぞれ200及び20とする。なお、レベルセット関数を距離関数として保つため、付加的に以下の式を解く。

$$\partial\phi/\partial\tau = (1 - |\nabla\phi|)\phi/(\phi^2 + \alpha^2)^{1/2} \quad (5-9)$$

τ は、仮想時間であり、 α は、微小定数である。上式は定常状態において、レベルセット関数が距離関数であることを保証する。また、液滴の全質量の保存のために、

$$\partial\phi/\partial\tau = (A_0 - A)(1 - \kappa)|\nabla\phi| \quad (5-10)$$

を用いる。 A は、液滴質量であり、添え字0は初期値を表す。

5-2 解析結果

5-2-1 振幅の減衰と周波数

Legendre多項式の2次の変形を、初期振幅を0.02として液滴に与えた場合の半径の振動の様子を、線形理論⁽⁵⁻¹⁾による減衰曲線とともにFig.5.1に示す。シミュレーション領域は100x100x100である。図には、100x2x100の領域における2次元計算の結果も示す。いずれの結果も、液滴半径1.0を中心として減衰振動を起こしており、振幅の減衰は線形理論と良く一致している。周期は、3次元シミュレーションでは10.1、2次元では11.7であり、線形理論では10.0である。3次元シミュレーションは現象を良く再現しており、2次元シミュレーションは、実質、円筒の振動を計算していることになるため、球の線形理論と完全には一致しないものと考えられる。

3次の変形について示したものがFig.5.2である。3次元シミュレーションの結果は、2次の変形の場合と同様、線形理論の減衰とよく一致している。2次元の結果は、定性的な振動の様相は3次元と同様であるが、減衰は線形理論と一致しておらず、高次の変形モードでは球の振動との差が大きくなることを示している。周期は、線形理論が5.15、3次元シミュレーションが5.23である。

4次の変形については、Fig.5.3に示す。3次元シミュレーションの結果は、2次及び3次の変形の場合と同様、線形理論と良く一致している。2次元の結果は、3次の変形の場合と異なり、定性的な様相も球の振動と異なっていることを示している。3次元シミュレーションと線形理論のそれぞれの周期は、3.40及び3.32である。

いずれの変形モードにおいても3次元シミュレーションの結果は線形理論と良く一致し、高次の複雑な変形に対しても、本シミュレーションにより、良好に現象が再現されていることがわかる。また、線形理論との一致から、初期振幅0.02は、十分に小さい変形であったことが確認される。検証等にしばしば行われる2次元シミュレーション⁽⁵⁻³⁾は、特に高次の変形モードに対しては、注意が必要であることがわかる。

5-2-2 振動周波数への振幅及び回転の影響

2 次の変形モードにおいて初期振幅を増加させ、液滴の振動周波数に及ぼす振幅の影響を調べたものを Fig.5.4 に示す。周波数シフトは、振幅 0.02 の場合の周波数を基準として、周波数の変化分を規格化して示したものである。図に示した理論曲線⁽⁵⁻⁴⁾は、線形理論から 2 次の微小量の変位までを考慮したもので、振幅 0.3 程度まではシミュレーション結果と良く一致している。線形理論に基づく関係式により、振動周波数から表面張力を求める際には、ごく小さい振幅の場合を除き、振幅による周波数シフト、すなわち非線形性の影響を考慮する必要があることが分かる。

振動周波数に及ぼす回転の影響を Fig.5.5 に理論値とともに示す。図に示した理論値は、振動に対して、回転の影響を 1 次の摂動として考慮して得られたものである⁽⁵⁻⁵⁾。回転周期は、振幅 0.02 の場合の振動周期により無次元化してある。振幅の影響とは逆に、回転周波数が増加するにつれ、振動周波数が増加しており、振動周波数から表面張力を求めるのであれば、やはりごく小さい回転数の場合を除き、回転による周波数シフトを考慮する必要があることが分かる。シミュレーション結果は、回転周波数 0.5 程度まで、理論値⁽⁵⁻⁵⁾と良く一致している。

5-2-3 実験結果との比較

2 章で行った液滴振動法による静電浮遊実験で通常使用される表面張力の換算式は、線形理論により、最低次の振動モードに対して

$$\sigma = \frac{\rho R^3 \omega^2}{8} + \frac{Q^2}{64\pi^2 \epsilon_0 R^3} \quad (5-11)$$

と与えられている。 ω は角周波数、 Q は表面電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率であり、右辺第二項は、表面電荷の影響の補正項である。振動振幅を変化させ、実験データから上式を用いて見かけの表面張力を算出した結果を Fig.5.6 に示す。実験では、得られた振幅の時系列データの隣り合う極大値の時間間隔を求め、その逆数から局所的な振動周波数を求めている。Fig.5.6 では、振動振幅が大きくなると、表面張力の測定値が小さくなることが示されており、実験結果とシミュレーション結果とはよく一致している。これは、表面張力の換算式中の角周波数 ω が振幅の増加に対して減少するためであり、振動振幅が大きい場合の測定ではこの点を考慮して表面張力を算出する必要があることが分かる。

Fig.5.4 に対応した周波数シフトを比較したものが Fig.5.7 である。数値シミュレーションでは、ウェーバー数を 31.8 としている。実験結果は、振幅の大きい範囲までシミュレーションとよく一致しており、2 次の微小量まで考慮した理論でも、大きな振幅の振動には対応できないことが確認できる。

回転と振動周波数の関係を調べた結果を Fig.5.8 に示す。図において周波数増分と回転数は、Fig.5.5 と同様、いずれも回転のない状態の液滴振動の共振周波数で規格化したものである。前節で示したように、振幅の場合と逆に、回転の影響は、振動周波数の増加をもたらすが、ここでも実験とシミュレーションの一致は良好である。回転数が増加するに従い、周波数も増加する傾向が実験、シミュレーションのいずれから示されており、また、それぞれ理論曲線ともよく一致している。これにより、線形理論に基づく表面張力の換算式により振動周波数から表面張力を求める際には、振幅ばかりではなく回転による周波数シフトも考慮する必要があることが分かる。

5-3 並列化による高速化

ここで行った数値シミュレーションでは、流れ場を求めるために SMAC 法により圧力を求めている。シミュレーションにおいてはこの段階の計算が最も計算時間を必要とする部分であるため、並列計算を行うことによりシミュレーションプログラムの高速化を図った。圧力計算は、安定化双共役勾配法と呼ばれる行列解法を用いているが、この部分の処理を並列化し、並列計算を行った際の計算時間と使用メモリの変化を Fig.5.9 に示す。Fig.5.9 は、 $96 \times 96 \times 96$ の計算格子に対して、10 ステップの計算を行ったもので、32 台までのプロセッサによる結果である。計算時間もメモリも、ほぼ台数に比例して増加している。今回の並列化では、計算処理のみの並列化をまず施したため、データの分割は行っていない、このため、すべてのプロセッサが行列要素をすべて保持しているため、総メモリは台数に比例して増加することになった。計算時間も台数にほぼ比例して増加しているが、増加率、すなわち傾きはメモリに比べて緩やかである。これは、プロセッサごとの処理量が減って、プロセッサ一台については計算時間が短縮されていることを示している。

ひとつの計算としての経過時間と行列計算時間を示したものを Fig.5.10 に示す。これは、ルートプロセッサと呼ばれる計算と同時に並列処理の制御を行う計算機での測定時間である。台数が増えると、一台あたりの処理量が減るため、いずれの時間も減少しているのがわかるが、減少率が低下するのは、プロセッサ間のデータ通信の割合が増すためである。速度向上率は、Fig.5.11 に示す。計算全体での経過時間は 32 台で 9 倍程度であるが、行列計算の部分のみを見ると、26 倍ほどの速度向上率であり、充分効率的に並列化が行われたことがわかる。

5-4 まとめ

流動を表すナビエストークス方程式と界面の運動を表す方程式を連立させレベルセット法により解く三次元並列シミュレーションコードを開発し、浮遊液滴の振動及び回転の数値シミュレーションを行った。液滴の変形振幅が小さい場合は、振動数及び減衰は線形理論と一致するが、振幅が増加すると振動数は減少し、また、回転数が増加すると振動数も増加することを明らかにし、実験結果と良く一致することを示した。

参考文献

- (5-1) Lamb, H.; *Hydrodynamics*. Cambridge (1932)
- (5-2) Sussman, M. and Smereka, P., *J. Fluid Mech.*, **341**, 668 (1997)
- (5-3) Sussman, M., et al., *J. Fluid Mech.*, **341**, 668 (1997)
- (5-4) Azuma, H. and Yoshihara, S., *J. Fluid Mech.*, **393**, 309 (1999)
- (5-5) Busse, F.H. *J. Fluid Mech.*, **142**, 1 (1984)

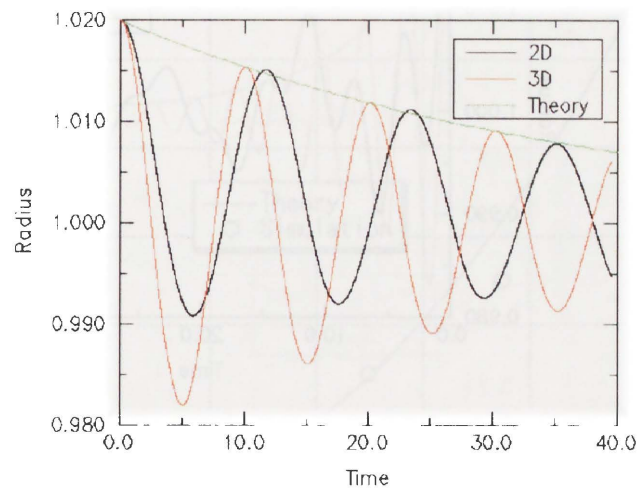


Fig.5-1 Time evolution of droplet radius (order 2)

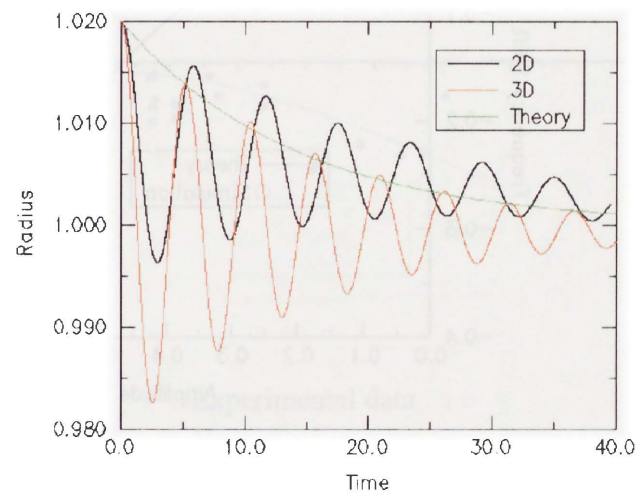


Fig.5-2 Time evolution of droplet radius (order 3)

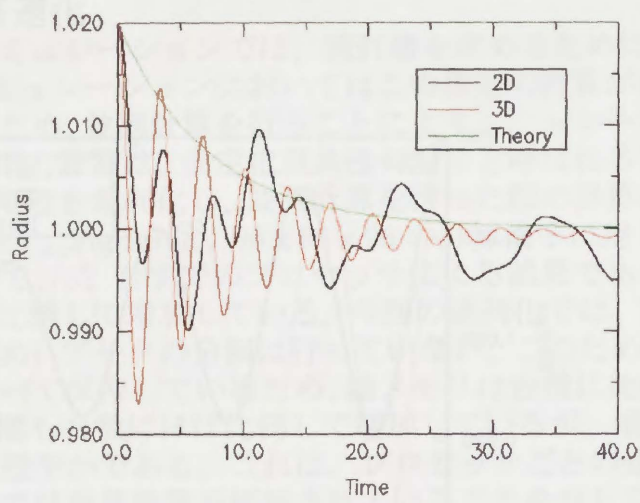


Fig.5-3 Time evolution of droplet radius (order 4)

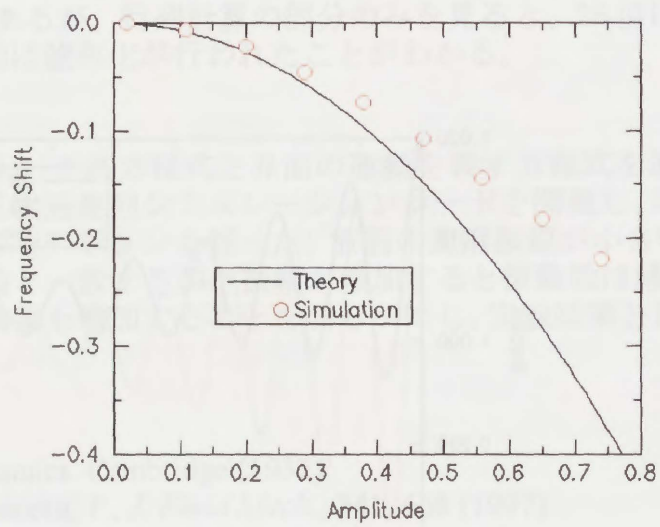


Fig.5-4 Effect of amplitude on oscillation frequency

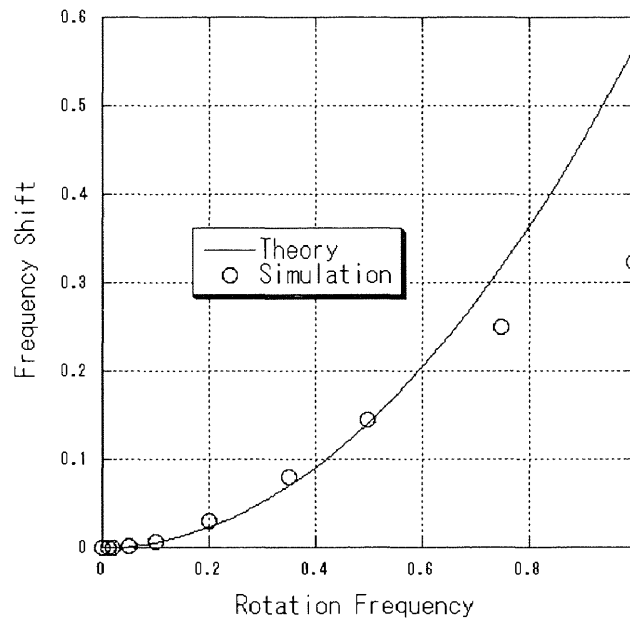


Fig.5-5 Effect of rotation on oscillation frequency

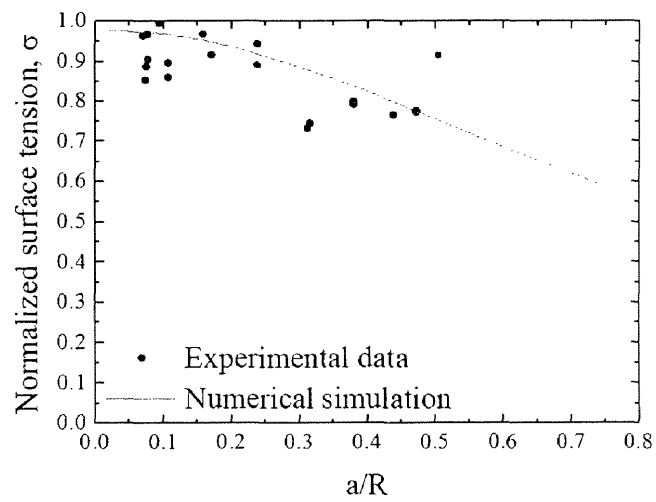
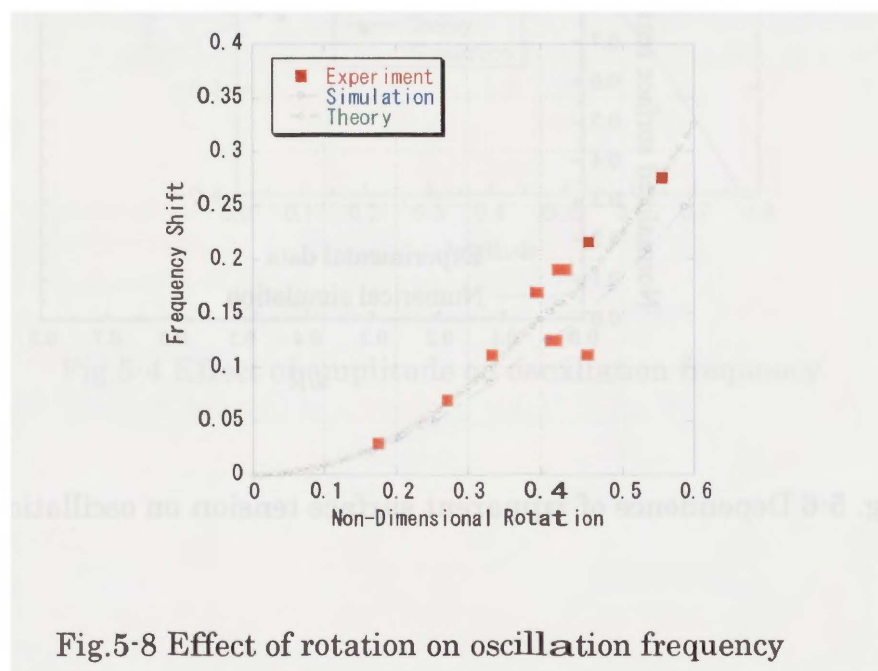
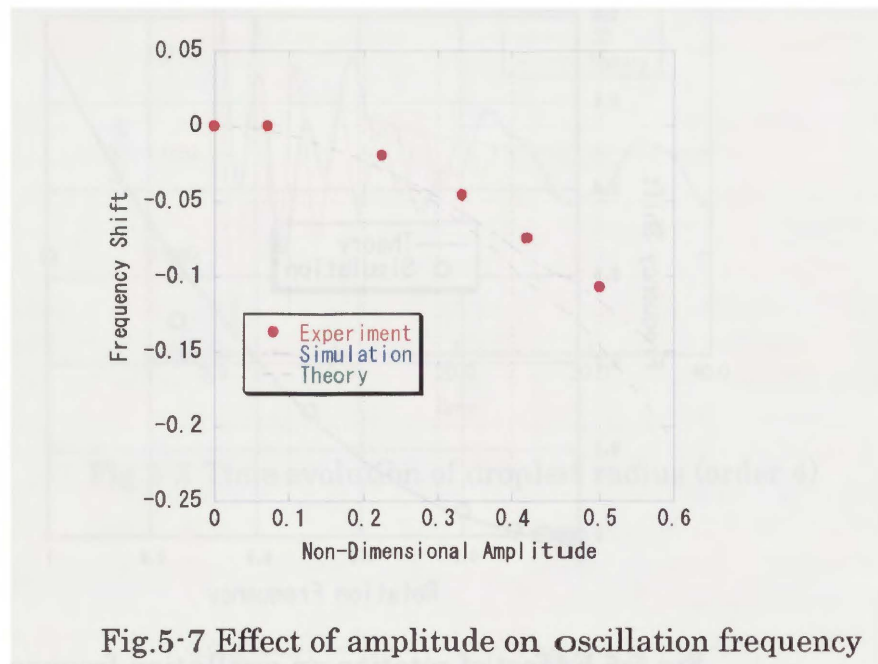
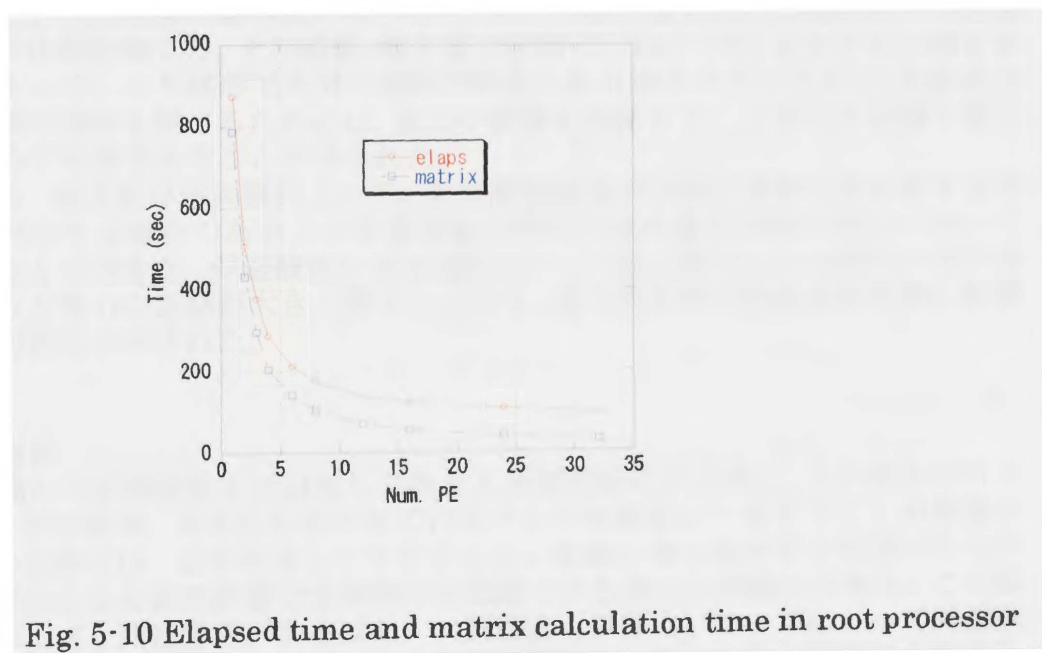
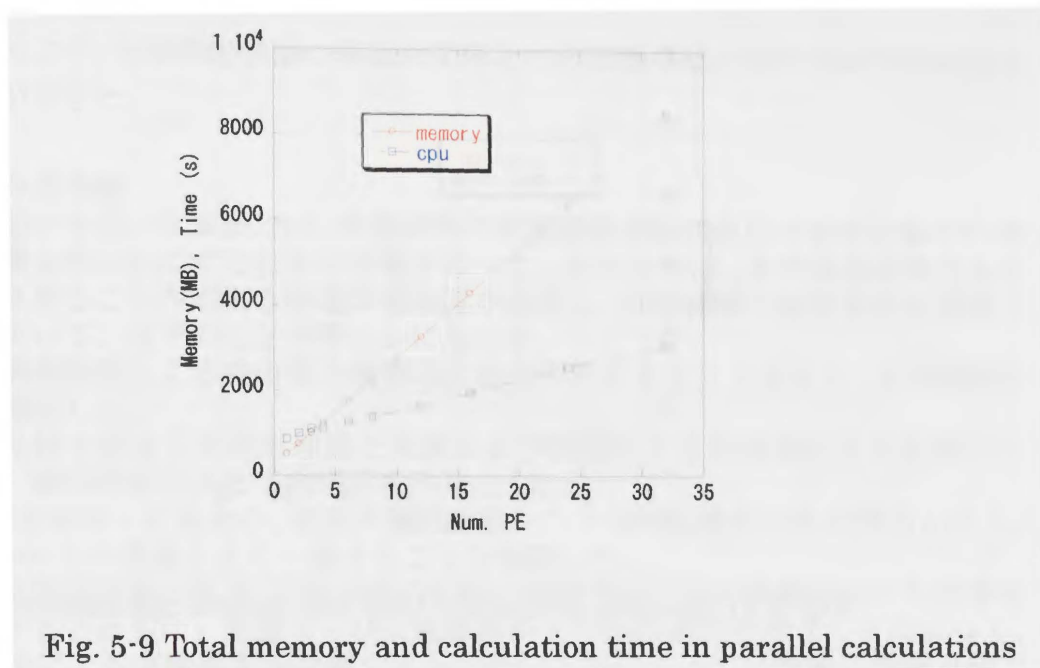


Fig. 5-6 Dependence of apparent surface tension on oscillation amplitude





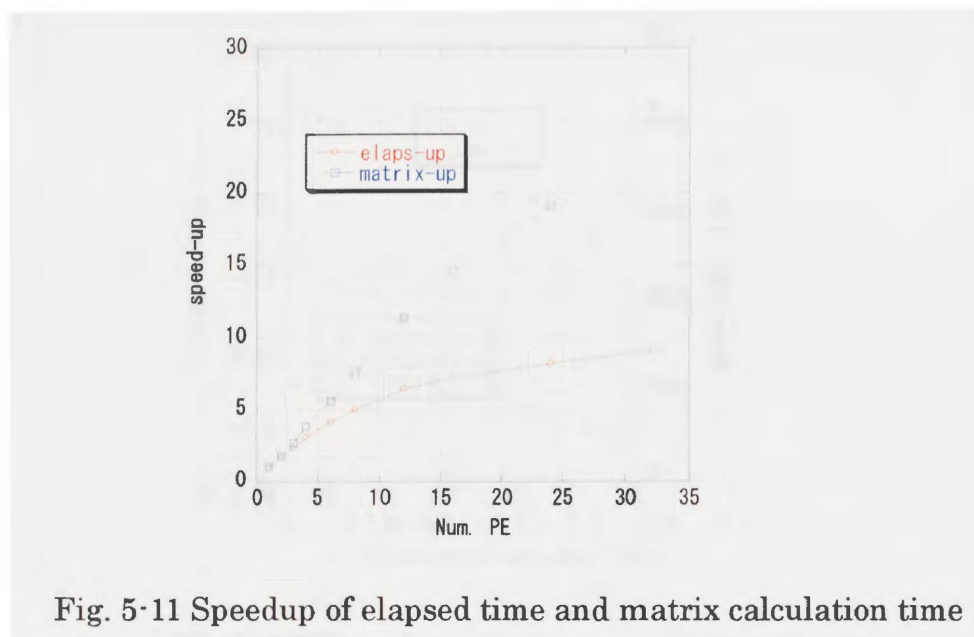


Fig. 5-11 Speedup of elapsed time and matrix calculation time

第6章 結論

本研究により、大型浮遊液滴の界面大変形と内部流動挙動に関する以下の知見を得ることができた。

● 静電浮遊実験

静電浮遊炉を用いた実験では、浮遊液滴の界面振動挙動に及ぼす液滴回転や内部流動の影響を明らかにするための実験を行った。そのために、まず模擬流体である水を浮遊させることの出来る静電浮遊装置を開発し、浮遊液滴の振動挙動を観察することによって、以下のことが明らかになった。

- ① 液滴振動法による表面張力換算式に適用限界があることを示し、その範囲を明確化した。
- ② 非粘性を仮定した線形理論と実験および渡辺による数値解析との比較により、線形近似による予測限界を明確化した。
- ③ 回転を印加した場合の、液滴共振周波数シフトの回転数依存性を明らかにし、Busseらの理論とよく一致することを確認した。

この静電浮遊実験の結果、浮遊液滴の回転が液滴界面の変形挙動に与える影響を明らかにするとともに、理論ならびに数値解析との比較検討を行うことによって、静電浮遊炉による実験結果が数値シミュレーションによって定性的に予測可能であることが示された。

● 超音波浮遊実験

超音波浮遊実験においては、大粒径透明液滴の浮遊実験を行い、大粒径浮遊液滴の界面変形と内部流動を通常重力ならびに DAS の航空機を用いた微小重力の両環境において比較評価した。その結果、微小重力環境下においては、より小さな超音波の出力によって、より球形で大型の液滴が浮遊出来る事を示すとともに、界面変更と内部流動の関係を調べるためには、重力の影響を排除することができる微小重力実験が極めて有効であることが示された。

すなわち、超音波浮遊実験によって、大型浮遊液滴の内部に複雑な渦を有する内部流れの発生する場合のあることを通常重力環境と微小重力環境の両方において確認することができた。浮遊液滴の界面変形に対しては、保持力との関係で扁平形状になるなど重力の影響が大きく関与しており、重力の有無が内部流動挙動に影響を及ぼす可能性が示された。

● 理論解析

浮遊液滴の大変形運動を近似無しで扱える基礎理論式が完成し、その線形解析が完了した。その結果、従来から知られているラムの振動数に一致することが確認された。この基礎式は、近年発達してきたソリトン理論と微分幾何学とを用いたものであり、どのような変形状態でも原理的に記述できる新しい枠組みである。この体系をもとにして、回転効果があるばあいの摂動論も計算し、モードによって周波数補正が異なることが明らかになった。さらに、弾性体、流体を統一的に扱う枠組みの構築するとともに、その非線形運動を正しく扱う数学的枠組みの構築を行うことができた。

● 数値解析

浮遊液滴の界面変形と内部流動を多次元的に評価・検討するために、流動を表すナビエーストックス方程式と界面の挙動を表す方程式とを連立させ、レベルセット法により数値計算を行う三次元計算コードを作成した。この計算コードを用いて、液滴の変形による形状振動を計算したところ、振幅が小さい場合は、振動周期及び減衰は線形理論と一致し、振幅が増加すると振動数が減少し、実験結果と良く一致することが分かった。

浮遊液滴の界面変形と内部流動挙動に関わる今後更に解決すべき研究課題としては、以下の項目が抽出された。

● 液滴浮遊実験

- ・ 静電浮遊実験においては、界面の変形量ならびに回転速度が共振周波数に及ぼす影響について、非線形挙動が顕在化する条件範囲を含めて、液滴の浮遊特性を調べるための実験。更に、得られた結果を、浮遊液滴の非線形理論を構築してゆくためのデータベースの整備。

● 内部流動観測実験

- ・ 現在行っている超音波浮遊システムによる浮遊液滴の内部流動観測結果に対するPIV解析では液滴の曲率を考慮していないことから、今後さらにPIV解析の精度を上げるために、液滴界面の曲率を考慮したPIV解析。
- ・ 今回の実験結果より液滴の内部に渦を有する内部流動の観測を確認しているが、今後はその発生要因の同定を行うために、液滴径、扁平率、音場の音圧等の影響について更に詳細に調べる。
- ・ 界面振動する液滴の内部流動は界面に伴う動きが見られたが、同時に非対称で複雑な流れも観測した。これは液滴内部に非線形な流れが生じていることを示している可能性があると思われることから、今後はその観測の精度やPIV解析の精度を上げ、その非線形性について検討すること。

● 微小重力実験

- ・ 通常重力実験用装置と微小重力実験用装置の互換性を更に高め、浮遊液滴におよぼす重力の影響について明らかにする必要がある。
- ・ 今後、静電浮遊システムならびに超音波浮遊システムを用いた液滴浮遊実験を実施するとともに新しい非線形理論の構築と数値解析の実施を通して、浮遊液滴の非線形ダイナミクスを解明し、将来の宇宙環境下での浮遊実験に資する科学的知見を得ることが必要である。

● 理論解析

- ・ 構築した数学的枠組みを、ソリトン理論などの厳密解を利用した非線形運動の理論解析、ならびにこれを利用した高精度の数値計算スキームの構築。

● 数値解析

- ・ 浮遊液滴の界面変形と内部流動の空間時間変化の数値解析の実施。この結果と、実験結果ならびに理論解析とを比較検討することによる局所非定常の効果の解明。