問題解決過程における思考実験の機能に関する研究

数学科　倉 井 庸 維

本研究の目的は，これまでに設計された「数学する」モデルの適応可能な問題の特徴とそこでの思考実験の機能を明らかにすることである。そのために，実際の問題解決過程とモデルを対応させながら分析する方法をとった。その結果として，「特別な値を代入して」得られた結果から推測を導き，その推測の確信を強める「思考実験Ⅱ」を行い，その後「証明」へと進む過程が明らかにされたが，同じ問題でも解法によってはモデルに沿わない場合も示され，帰納的推論によって推測を作成し，その推測に確信を持ちながら，「証明」に続く解決過程に対して適応できると思われる。また，「証明」後「思考実験Ⅱ」によって，「証明」の確信が強められることもわかり，これまで同様「思考実験Ⅰ」には推測を作る機能が，「思考実験Ⅱ」には推測に対して確信を強める機能と反証する機能があることに加え，「証明」後に「思考実験Ⅱ」を行うことによって自らの解を見直すこと，チェックすることが可能であり，主体的に数学する態度の習得への可能性が示された。

キーワード：思考実験，数学する，問題解決，自然数列，帰納的推論，パターン

1. はじめに

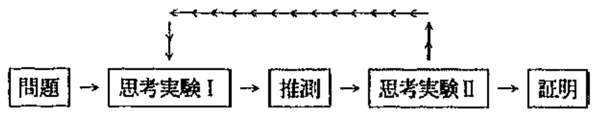
(1) 問題の所在

中学，高校へと進むにつれて，数学の能力の違いは顕著になる。しかし，作詩や作曲は，能力に応じて楽しむことができる。同様に，能力に応じて「数学する」ことを楽しむことの可能性の追求が本研究の発端である。「数学する」ことを楽しむ際に含まれる内容として，自分で問題を設定し，その問題を解決することや自分なりに定理を見つけ表現することもあると考えられる。

Lampert(1990)は，児童が教室において「数学する」実践例を示している。その際，「数学する」ことを，Polya(1973)や Lakatos(1977)らが示した推測を作り，その推測の証明や論駁することとしているが，いかに推測を作るかが問題となる。

マッハ（1969）は，現物実験によって真実は示されると考えていたが，現物実験を行うためには何らかの推測をもっていなければならず，その推測を導くために現物実験に先立って，思考上で実験（思考実験）がなされなければならないと考えていた。彼は，この思考実験を，数学者が行っている研究活動から見いだしている。このマッハが見いだし，数学者が研究上使用している思考実験について数学者自身も指摘していた（小平，1969；Hanna,1997）が，数学の学習指導の中ではこれまで十分取り上げられてこず，先の学習指導要領（文部省，1989）において強調され，研究もなされる（森田，1991）に至ったが，教育実践の場では活用されるに至らなかったように思われる。その原因の1つとして，日常の数学的活動の中で思考実験を特定することの困難さにあると思われている。そこで，マッハのアイディアをもとに，数学の学習における思考実験の規定とその活用に関する研究（倉井, 2001b)がなされ，さらに，Polya(1973)のアイディアを加え思考実験とその機能から思考実験を推測の前後においた「数学する」学習のモデルを以下のように設計し，重複組み合わせの問題や平面幾何の問題の解決に有効であることが示された（倉井, 2001a)。

「数学する」学習モデル



(2) 研究の目的

しかし，どんな問題あるいは解法に対しても，この思考実験を含む「数学する」モデルが適応できるとは限らない。そこで，本稿では，本モデルが適応可能な問題や問題解決過程の特徴を明らかにし，そうした問題における思考実験の機能を明らかにすることを目的とする。

このことにより，モデルの特徴をより鮮明にできるとともに，問題や解法に応じて本モデルの適応の有無やその時期を明確にすることができ，実践への可能性がより高まると考えられる。

また,「数学する」ことは，そのモデルからわかるように問題解決の1つとしてとらえることもできる。Schoenfeld(1992)は，数学における認知を探究するために枠組みとして，知識ベース，方略，メタ認知，情意の4つを設定しているが，そのうちの方略については，問題と結びつけて考察すべきであるとしている。彼は，その根拠として，具体的に「特殊な例を調べる」方略を取り上げ，問題ごとに実施される方略には細かな違いがあり，その判断方法や基準は，未だ不明確であることを指摘してい

る。すなわち，どのような問題に対してどのような方略が有効であるのかを調べることが残された研究課題としているのである。問題解決過程において，思考実験を問題解決のための方略とみなせば，解決されるべき研究課題は，思考実験に対しても当てはまるといえるであろう。

(3) 研究の方法

研究の方法として，まずモデルの各ステージにおいて実施される事柄を検討し，ここから問題が持つべき条件を抽出し，そうした条件を備えた問題を選択する。その後，その問題の解決過程をモデルと照合することによって，モデルが適応可能な問題であることを明らかにする。方略については，問題と結びつけて考察すべきであるとしている。彼は，その根拠として，具体的に「特殊な例を調べる」方略を取り上げ，問題ごとに実施される方略には細かな違いがあり，その判断方法や基準は，未だ不明確であることを指摘している。すなわち，どのような問題に対してどのような方略が有効であるのかを調べることが残された研究課題としているのである。問題解決過程において，思考実験を問題解決のための方略とみなせば，解決されるべき研究課題は，思考実験に対しても当てはまるといえるであろう。

2. モデルの再検討

本モデルは，「問題」，「思考実験Ⅰ」，「推測」，「思考実験Ⅱ」，「証明」の5つのステージから構成されている。その中で，重要なステージは，「思考実験Ⅰ」，「推測」，「思考実験Ⅱ」の3つである。

「思考実験Ⅰ」のステージには，これまでも示してきたように，準備段階から実施，観察段階までが含まれ，準備段階において，「実験空間」，「定数と変数」，「変化の方法」の3つを設定する。その中で特に重要なことは，マッハのアイディアをもとに作成されたことから，「変化の方法」である。変数の変化のさせ方を明確にすることがこの段階では求められる。その後，実施，観察の段階を経て，「推測」を作成するステージに移行する。ここで，推測するとは，全称命題を作成することであり，個別の実験結果をもとに，規則性を見いだし，その規則を一般的な言葉あるいは文字式で表現することが求められるが，常に「推測」が作成されるとは限らない。

また，「推測」が作成されれば，この推測に対して，確信を強めるためあるいは反証するための「思考実験Ⅱ」がなされる。「思考実験Ⅱ」によって確信が強められれば，次の「証明」のステージに進むことができるが，もし「思考実験Ⅱ」によって反例を挙げられれば反証されたことになり，推測は否定され，再度「思考実験Ⅰ」を行い，新しく「推測」を作成するのである。

以上のようにモデルを検討すると，「思考実験Ⅰ」のステージで，「変化の方法」を設定し，実施し，そして，それに基づいて「推測」することが重要であるといえる。「変化の方法」において最も単純な方法は，変数を1から1つずつ増やしていくことであるが，負の数を扱う場合，幾何の問題のように変数を連続的に変化させる場合もある。

3. 問題の検討

本モデルを適用できると思われる問題は，検討する。

(1) 三角行列のn乗の問題

『問題』

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad について、$$

A, A^2, A^3 を計算し， A^n を求めよ。

この問題の場合，nの数を1から順番に1つずつ増やしていき，計算を行う。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}、A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}、A^4=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これより，(1,2) の数以外は，すべて定数であることがわかる。また，(1,2) は，2,4,6,8 と偶数であることがわかる。これより，

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と推測される。ここで，nに，1，2を代入し，正しいことを確認した後，数学的帰納法を用いて証明することになる。

すなわち，「思考実験Ⅰ」では，準備段階で，

①実験空間・・・2行2列の行列，累乗の計算

②定数と変数・・・定数は，行列Aの成分

変数は，累乗の数

③変化の方法・・・累乗の数を1，2，3，・・・と1つずつ増やしていく。

を設定し，その後，実際に「思考実験Ⅰ」を実施した結果より，規則性を見いだし，A^nの成分を「推測」する。さらに，nに具体的な数を代入した結果と，計算結果を比較することが「思考実験Ⅱ」であり，実際の計算結果と一致していることから，数学的帰納法を用いた「証明」へと移行する。この問題は
まさにモデルに適合した問題であるといえる。

この問題の場合，推測の作成が焦点となるが，推測は，比較的容易にできる。この問題は，さらに「思考実験Ⅰ」に戻り，定数である(1,2) 成分の数2を一般化し，文字aとして実験を行うと，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad のとき$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と推測され，これも「思考実験Ⅱ」，「証明」へと続く。

これは，2行2列の行列の成分の1つを定数
から変数に変化させたことになる。「思考実験Ⅰ」の準備段階において「②定数と変数」を設定するが，その際定数部分の1つを定数から文字式に置き換えたことになるが，そのことによって，より一般の形の定理を導くことができる。

さらに，対角線上ある成分(1,1)，(2,2) を1から一般の数α，βに変えると以下のように

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad と表され，$$

「思考実験Ⅰ」を行うと，

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & a\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \beta^k \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

となることが推測される。

こうした展開は，最初に「思考実験Ⅰ」を行うための準備段階で3つの構成要素を設定して明確にしたことによって，さらなる実験による展開が可能となったといえる。

(2) 多角数の第n項の数

①1つめの解法

次に，本モデルを適用可能な問題として，多角数の一般項を求める問題を考えてみる。例えば，五角形の各辺に石を置いた場合の石の数（五角数）を求める問題を検討してみる。

『問題』

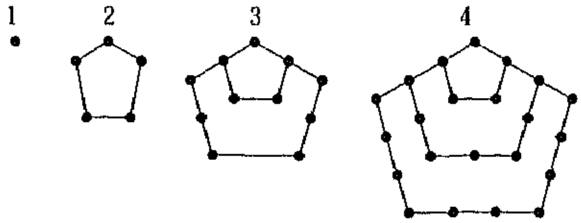
n番目の五角数をP(n）としたとき，nを用いて表せ。

「思考実験Ⅰ」の準備段階において，

①実験空間・・・五角数

②定数と変数・・・独立変数nは，五角形の1辺におく石の数
従属変数P(n)は，五角形に辺上に置かれる石の数

③変化の方法・・・自然数を1つずつ増やしていく。



P(1)=1

P(2)=5

P(3)=P(2)+7=5+7=12

P(4)=P(3)+10=12+10=22

n	1	2	3	4	……
P(n)	1	5	12	22	……

ここまでが，「思考実験Ⅰ」である。しかし，ここから，P（n）の一般項を推測することはすぐにはできないであろう。そこで，階差数列Δ(n)=P(n)-P(n-1) を考えることになり，表を作ると，

n	2	3	4	…
Δ	4	7	10	…

となる。しかし，この表から，Δ(n）の式を推測することは，デー タが少なく難しい。これは，先ほどの行列の問題とは異なり，「思考実験Ⅰ」によって簡単に推測が作成できない例であろう。そこで，さらに1つ1つ丁寧に増加分に着目して観察していくことになる。

P(2)からP(3)に移るときに増加している石は，P(2)と共有している2 辺以外の3 辺に置かれている石である。1辺に3つの石が置かれているので，3×3であるが，2つの頂点に置かれている石は，重複して数えているので，3×3-2=7。これは，実際に数えた場合と一致する。同様に，P(3)からP(4)の増加分を考えると，3辺分が増えているので，9 3 ×4。共通部分が2 つあるから，3×4-2=10。
これも，表の結果と一致する。すなわち，

P(3)=P(2)+(3×3-2)

P(4)=P(3)+(3×4-2)

である。

したがって，P(n-1) からP(n) への増加分 Δ(n) は，

Δ(n)=3 n-2(n≧2)

と，推測される。

つまり，

P(n)=P(n-1)+(3n-2)(n≧2)

となる。

「思考実験Ⅰ」により，帰納的に推測が作成されるのではなく，階差数列の考察や状況に応じた分析も必要となる。

実際，P(n-1)からP(n)への増加分Δ(n)は，共通した辺以外の3 つの辺においては，n個の石が置かれているので,3n。しかし，頂点の2 つは，重複して数えているので，Δ(n)=3n-2となる。これは，推測した漸化式Δ(n) の「証明」になるといえる。

このことより，求めるP(n)は，

$$P(n)=1+\sum_{k=2}^{n}(3k-2)(n)\geqq 2$$

$$=\frac{1}{2}n(3n-1) \qquad \cdots (*)$$

となる。

さらに，P (n) のnに1を代入して計算すると1になるので，n=1のときも成り立つ。よって，すべての自然数nについて，(＊) は成り立つ。

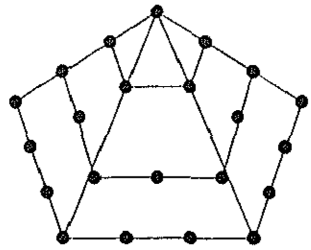
しかし，この式 (＊) が，n=2, 3において，成り立つか否かを調べることによって，この答えに対する確信を強めることができる。このことは，「思考実験Ⅱ」に相当する。実際に「思考実験Ⅱ」を行い，一致することから，この式 (＊) は，第n番目の五角数を表す式であることがわかる。

以上のように，五角数を求めたが，解法としては，漸化式を用いて一般項を求める解法を用いたが，この解法では，階差数列，Σの計算方法についての学習が終了していることが前提となっている。

②別の解法

上記以外の解法として，最初に求めた三角数に帰着して，四角数，五角数等の他の多角数を求めることもできる[1]。

まず，五角数を三角数に分割する。分割の方法は，次の図のように，共通頂点から対角線を引き，その対角線を用いて，3つの三角数に分割することができる。



それぞれの三角数は，

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

であるから，3倍して

$$\frac{3}{2}n(n+1)$$

である。しかし，共有している部分が2箇所あり，それぞれの数は，nである。(上の図の対角線)

したがって，

$$五角数\ P(n)=\frac{3}{2}n(n+1)-2n=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

これは，「証明」にあたる。

次に,「思考実験Ⅱ」を行う。すなわち，nに1, 2, 3 を代入して，「推測」が成り立つことを確かめる。

この解法の場合，三角数に分割するアイディアが浮かぶか否かが，ポイントであり，「思考実験Ⅰ」は，関わっていない。また，アイディアが浮んだ後は，「証明」，その「証明」に対する確信を強めるための「思考実験Ⅱ」を実施している。したがって，同一問題であっても，「思考実験Ⅰ」が関わる場合とそうでない場合があるといえる。

当初の「数学する」モデルでは，正しい「証明」が行われることによって，終わると考えられていたが，本稿のように，「証明」を幅広く捉え，不確かな証明や誤りを含んだ証明も対象にすると，「証明」に対して確信を強めるために「思考実験Ⅱ」を行うことがあるといえる。

4. 考察

本稿の目的は，設計された「数学する」モデルが適用可能な問題や問題解決過程の特徴を明らかにし、その問題に対してモデルの中の思考実験の機能を明らかにすることであった。

行列のn乗を求める問題においては，「 思考実験Ⅰ」によって推測が導かれ，その推測に対して,「検証のための実験 (思考実験Ⅱ)」が行われ，その後，「証明」[2]の

過程へと進んだ。これに対して，「多角数」の問題では，証明され，最後に示される一般化された公式を，再度，個別の事例で確かめている。これは,「思考実験Ⅱ」であり，従来，数学教育においては「解の見直し」といわれてきたものであり，改めてその機能の重要性を認識することができた。前章では，記述されていないが，実際には，この段階で，証明されたと思われた公式が「思考実験Ⅱ」で反証され，再度考え直すということが行われた。これは，根本となるアイディアに問題があったわけではなく，式を展開し，計算し，まとめていく段階で誤りがあったためであり，論理的な誤り，式の操作上の誤りもあった。その誤りに気付くまでにかなりの時間がかかっており，何度か「証明」と「思考実験Ⅱ」の間を行き来している。こうしたことは，一般的に数学の学習において起こりうることであり，それを少なくすることは，文字式の計算に習熟する以外にはない。すなわち，技能の面の鍛錬もある程度必要なことがわかる。多角数の一般化された公式を求めることに対する本質的なアイディアの部分（差に着目することや三角数に分割すること）-には，大きな影響をもっていないにも関わらず，正しい結論を導くことに対して技能は，重きが置かれる。そこで,「数学する」ためには，数学の本質的なアイディアとそれを表現する技能との両方が，必要とされるといえる。そうしたことから，技能の習得の学習も疎かにすべきではないことがわかる。本研究のテ－マである「数学する」ためには，これまで以上に，結果よりも思考の過程を重視するわけだが，最終的に正しい結果に到達するか否かも無視することはできない。そのためにも,「思考実験Ⅱ」は，重要であるが，それだけではなく自分の行動を振り返りチェックするという態度を育成する点からも，教育的に意義があるといえる。また，問題解決後,「思考実験Ⅱ」によって，自らの解や証明をチェックすることによって，自らの誤りに気付き修正することが可能であるとともに，逆にそこで確証が得られれば，自らの解や証明に対して，自信ももつことができる。この点が，数学教育における「思考実験Ⅱ」の大きな機能であると考える。ともすると，生徒の中には，正答は教師が知っており，示してくれるものであると考えたり，問題集の解答に書かれていると考え，自分自身では解を求めながらも，そのあとの自分自身でチェックすることを怠ったり，中には教師に解答を示すことを要求する生徒さえもいるが，数学的な考え方の習得を目標にし，そして，生徒自身が「数学する」ことを目標にするならば，自らの解や証明をチェックする方法をより一層重視した指導をすべきであろう。そして，自分の得た解に対して，自信を持つためにも自分自身の解に対して，批判的な態度を持つことが大切であると考える。自分の解や証明を自分自身でチェックすることによって，本研究では，扱っていないが，自らの解や証明を，自分の外へ出し，友人に示すことや第三者にわかるように表現するという能力の育成にもつながっていくと考える。

すなわち,「思考実験Ⅱ」には，繰り返すが，自分の解や証明に対して，確証を強める機能と反証する機能をもっており，その2 つをともに行うことによって，自らの解や証明に対して，自信をもつことができ，また，逆に自らの解や証明に対して，謙虚にもなることができると考える。

思考の順番とは，逆になったが,「思考実験Ｉ」は，それまでの自分の持っている知識を変化させることによって，「推測」を産み出していく。これは，常に，主体である学習者が対象に積極的に働きかけ，対象の中に関係を見出すこと，さらには，新しい関係を作り出すことが，この「思考実験Ｉ」には，期待されているといえる。そのために，変化させることがこの「思考実験Ｉ」の中心である。しかし，思考実験の場合，何をどのように変化させるのかを意識することは，難しく，ともすると，何の脈絡もなく，非系統的に変化させることになってしまいがちである。そのことを避けるために，実験空間を限定し，それを明確にし，そして，変化させる変数を定め，系統的に変化させ，観察することが必要となるのである。したがって，「思考実験Ｉ」か否かを判断するための決定要素として，①「実験空間」②「定数と変数」③「変化の方法」の３つの要素が明らかになっていることが，必要であると思われる。このことによって，単なる試行錯誤による操作と区別でき，「推測」作成に対して効果が上がるものと考える。

また，問題あるいは解法との関連で考察すると，Schoenfeld(1992)が挙げている「特殊な値を代入して調べる」方略のうちの１つである，「nに１，２，３，・・・と代入することによって帰納的にパターンを探す」方略が活用できる問題ないしこの方略を用いた場合には，モデルに沿った問題解決がなされることを示すことができたと思われる。

<注>

1) ﾎﾞｲﾔｰ(1983)(加賀美鐵雄・浦野由有訳)「数学の歴史1」朝倉書店, pp.75-76 。彌永昌吉，伊東俊太郎，佐藤徹(1979)「ｷﾞﾘｼｬの数学」共立出版, pp.34-40 を参照して，こ

の展開を考案した。

2）ここでは，証明とは，数値を文字で置き換え一般化し，その文字式を操作することによって一般化された解を得ることを指している。

＜参考文献＞

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof, Journal der Mathematik - Didaktik,2/3, 171 - 185

倉井庸維. (2001a).「思考実験を含む数学するモデルの設計」, 筑波数学教育研究, 第20号, 49-56

倉井庸維. (2001b).「数学の学習における思考実験の規定とその活用に関する研究」, 日本数学教育学会誌, 第83巻, 第9 号, 2-9

ｴﾙﾝｽﾄ･ﾏｯﾊ. (1971). 思考実験について. 『認識の分析』(pp. 101-124). (廣松渉･加藤尚武編訳). 法政大学出版局. (E. Mach . (1926). Uber Gedanken Experiment. Erkenntnis und Irrtum(pp.182 - 200). Leipzig Verlag von Johann Ambrosius Barth.)

マッハ.(伏見譲訳).(1969). マッハの力学ー力学の批判的発展史. 講談社

Lakatos,I.(1977). Proofs and refutations (revisede d.).Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. American Educational Research Journal. Spring.Vol,27. No,1. 29 - 63

文部省. (1989). 小学校指導書 算数編. 東洋館出版社.

森田俊雄. (1991). 算数・数学教育の新展開：局所的な数学と思考実験. 東洋館出版社.

Polya, G. (1973). Induction and Analogy in Math ematics. Volume1 of Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathema tically: Problem Solving, Metacognition, and Sense - making in Mathematics. In D. Grouws(Ed.). Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334 - 370). New York: Macmillan .