数学の教室における「数学する」活動の成立過程に関する研究

― 教師の役割に着目して ―

数学科　　倉 井 庸 維

ポリア、ラカトシュの考えをもとに数学者が「数学する」際に行っている推測、証明、論駁等の活動を小学校算数の教室において実践したランパートの「数学する」授業を分析し、数学する活動の中で教師の果たすべき役割に注目し、その1つに、教師が正誤について提示しないことがあげられている。

キーワード：数学する、ランパート、教師の役割、話し合い

1．はじめに

(1) 問題点

生徒自身が、数学を生成していく態度や方法を習得していくための授業を行うためには、教師に果たすべき役割が大きいことはいうまでもない。しかし、筆者自身のつたない教師経験を述べれば、これまでしばしば教科書の記述通りに説明を行い、その後、説明事項を活用して解くことのできる問題を例題として生徒に提示し、教師自身が解き、その後、説明事項に沿って解くことのできる問題を生徒に解かせるか、場合によっては、生徒自身に解答を説明させることがたまにある程度であった。つまり、こうした授業においては、教師が中心であり、学習すべき内容の数学は完成した学問として存在し、学習するとは、完成した学問としての数学をできるだけ正確に理解することであるとする学習観が根底には存在しているといえる。これは、生徒自身が数学を生成したり、これまでに得た知識を生かし再構成しながら生徒自身で数学的関係や定理を導くことからは、ほど遠く、そうした授業において、「自ら学び、考える」態度や方法を生徒が習得していくことは難しいといえる。すなわち、自ら問いを設定し、その問いに対して様々な解法を試みながら解決に至り、その結論をまとめることが「数学する」ことであると考えるならば、これまでの授業は、その対極に位置しているといえる。しかし、「数学する」授業は、教師の数学観、学習観、授業観そのものも変えなければならず、一朝一夕には成り立たないが、様々な条件や要素を整え、「数学する」状況を作り出すことによって徐々に可能になると考える。そこで、生徒が「数学する」ことに成功している授業を分析し、望ましい授業の構成要素を抽出し、それらの要素を備えた授業を実践していくことによって可能となると考える。

(2) 研究の目的と方法

そこで、本研究では、数学の授業において生徒による「数学する」活動の成立過程における教師の役割を明らかにすることを目的とする。

そのための方法として、まず「数学する」活動が成立している理想的な授業モデルとして、小学生を対象としたランパートの実践を分析対象として取り上げ、そこから、「数学する」活動の授業成立に不可欠な要素を、特に教師の役割に着目して抽出する。

2．ランパートの授業

(1) 「数学する」とは

ランパート(1990)は、ポリア(1973)、ラカトシュ（1977）の「数学する」考え方に立脚し、「数学する」過程とは、推測を作り、その推測に対して、証明や反駁することであるとしている。その過程において、ポリアのいう、推測を提出する勇気、その推測が誤りであった場合は、素直に修正する謙虚さ、また、推測を提出する前には慎重さが必要とされ、それら「数学する」態度も、「数学する」過程において習得するとしている。

(2) 授業の内容、対象、目標

内容：『指数』

対象：小学校５年生　18名

授業時間数：３時間（本時3 時間目）

目標：

①指数の演算ができること（学問の技術と知識を習得すること）

②学問のディスコース（discourse 、論議、話し合い）に参加するのに必要な技能や資質を習得すること（数学についての知識の習得すること＝数学独特の考え方）

(3) 授業のプロトコル

計算機を使って1^2から100^2までの平方表を生徒自身で作ることから始めた。

次に下表のなかのパターンを発見することを求めた。

この活動のなかで、1つの数の桁すべてについて考えるよりも、末尾の桁に焦点を当てることによって累乗のパターンについて話し合った方がよいという考えにいたる。これは、教室での数学のディスコース・コミュニティ（話し合いのできる共同体）の中で発達したツールとしてみなせる。

その過程は、以下のようである。

$1^2=$	1
$2^2=$	4
$3^2=$	9
$4^2=$	16
$5^2=$	25
$6^2=$	36
$7^2=$	49
$8^2=$	64
$9^2=$	81
$10^2=$	100
$11^2=$	121
$12^2=$	144
$13^2=$	169
$14^2=$	196
$15^2=$	225
$16^2=$	256
$17^2=$	289
・・・	

2乗の末尾は、2乗の基数と同様に、奇数と偶数が交互に現れることが主張された。授業の終わり頃には、

・10の倍数の2乗は常に10の倍数であるから末尾の数は0であり、5で終わる数の2乗もいつも5か0で終わる。

・末尾の数列は0と5について、常に対称である。

そして、そこから、

・1か9で終わる数の2乗は1
　2か8で終わる数の2乗は4
　3か7で終わる数の2乗は9
　4か6で終わる数の2乗は6で終わる

ことを議論し、このパターンが続くことを証明した。 数の末尾は、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0の順に並んでいるので、二重の対称的パターンになっている。

最後の桁を調べるという生徒の考えを、指数操作の方法についてのより一般的な推測を導くために使った。ここまでが、これまでの授業でなされていた。

以下から、本時が始まる。

授業のはじめに、以下の問題を板書した。

「問題[2]最後の数字は何でしょう?　5^4?　6^4?　7^4?
かけ算をせずに求めよ。」

指数をかけ算と区別し、指数を足すことによって積が見つかることへ導く重要な問題であるととらえた。

出題した後、教室を歩き回り、生徒のしていることを見聞きした。誰もが関わり合いを持つようになってから教室全体の話し合いを始めた。話し合いは、3部構成になっている。

第1部は、用語や記号、定義を明確にすること、

第2部は、5と6の累乗という特定の数の性質を考えること、

第3部は、効率よく指数計算を行うための一般的な仮説を導き、7の累乗について考察することである。

話し合いは、約30分間続き、大半の生徒が参加した。

【第1部の話し合い】

先生:(板書の5^4をさして) これについて理論の準備はできたのはだれかな?

Na :2乗と全く同じようにいくと思うわ。最初に5を2乗すると25になるわ。そうすると、最後の桁は5よね。今度は、それを2乗するのよ。

Ar :そうよ。5を2回2乗するのよ。(Arは、前の授業でx^nをxにnを掛けることと解釈していた。)

先生 :(板書する Ar:5の2乗を2回 Na:5を2乗してそれを2乗する) ここでは言葉の問題があると思うの。この2つは同じことを意味しているかしら?

Ma :5を2乗してそれを2倍すると思っているんじゃない。

先生 :(板書:25×2)こういうことかしら?

Ar :ちがう。それは2乗してもう一度2乗するんだから。もし5の2乗を2倍するのだったら、それらを足し算して50(25+25) になるわ

先生 :じゅあ、どういえばよいかしら?

Na :5を2乗して、それからその答えを2乗するのよ。

Ka :5を2乗した数の2乗をするんだよ。

Ga :僕もNaが今発言したことをちょうど言おうとしていたんだ。

Ma :私は両方ともわかるわ。5を5倍して、もう一度5を5倍するわ。でも、それを足すのではなくて、掛けるのよ 。

教師と生徒は共通の基盤を確立することができた。

$5^4=(5\times5)\times(5\times5)=5^2\times5^2$

【第2部の話し合い】

Sm :(5^4 の末尾の数について)5で終わるはずだ。

先生 :それが真だって Sm はどうやってわかったんだろうか?

Ae :あのね、5倍した数はどんな数でも5か0で終わるよ。

Te :だけど5を5倍するときには(末尾の数字は)5になるから、それは5でなくちゃ。

Ma :2乗した数をもう一度2乗すると625になる。

Ka :そんなことする必要ないよ。そんなのなんでもないよ。終わりの桁はいつも5になるんだから。だって最後の5をいつも掛けることになるから、5の5倍は5で終わるからさ。

5の累乗すべての末尾数字にあてはまることを推測して証明した

他の生徒は計算機を用いて5の高次の累乗について調べようとし、5の累乗は末尾2桁が25で終わるという推測をたて、それが真であることを議論していた。

次に、6の累乗についても話し合いをしたが、5の場合と全く同じで、6で終わる数に6で終わる別の数を掛けるたびにその結果は6 で終わる。

そこから、1から9までのどの数の累乗にもあてはまるという推測が出されたが、すぐに$7^2=49$だと反証した。また、数人の生徒は、6の累乗の末尾2 桁は、必ずしも36で終わるわけではないという事実について話し合っていた。

【第3部の話し合い】

7^4についての意見をたずねたところ、1にちがいないという意見で一致した。そこで、証明を求めた。

Ga :7の7倍は49。そして9の9倍は81だ。だから1だよ。

($7^4=7^2\times7^2$であり、末尾の数字だけに注目すればよいことが前提となっている。)

先生 :7の5乗の場合はどうかな?

At :これもまた1じゃないかな。

Sa :私は9だと思うわ。

Su :いや、わたしは7だと思うよ。

Sm :それは7だよ。

先生 :(板書 7^4=1? 9? 7?)Sm、あなたはきっと心のなかで証明してみたに違いないわね。At、なぜあなたはこれが1だと思ったの?

At:だって7^4は1で終わるから。それにもう1回掛けるから。

Ga :7^4の答えは2401だよ。君はそれに7を掛けて答えを求めたんだ。それで1というわけだ。

先生 :なぜ9なの、Sa?

Te :Saはそれは49に違いないと考えたんだと思います。

Ga :おそらくそれは9, 1, 9, 1ってなるんだと思うよ。

Mo :それは7だって知っているよ。だって7は・・・

Ab :7^4は1で終わるから、もしそれに7を掛けるなら、7で終わることになる。

Ma :7だと思うわ。けっして8ではないと思う。

Sm :ぼくも8ではないと思う。だって奇数の奇数倍だから、それはいつも奇数だよ。

Ka :49×49×7ということだから、それは7だよ。

At :僕はやっぱり1だと思う。だって7×7で49になって、それで7^4は49×9をして、7^5は7^4に7を掛けるんだから1で終わるよ。

先生 :49^2 はなに?

Su :2401だ。

先生 :Atの理論だと7^5は2401×2401のはずだから、ここの1とここの1で・・・。

Su :それは2401×7だわ。

Ga :それは9じゃないことの証拠だ。7^3は3で終わるから、それは9, 1, 9, 1ではないはずだ。

Ma :私は、1, 7, 9、1, 7, 9、1, 7, 9っていくと思うわ。

先生 :7^3は3で終わるかしら? 終わりの数はえーと、9×7で63で終わるわ。

Ka :Abのやつはうまくいくから、まちがっていないよ。彼は末尾の数字に7を掛けると説明した。最後の数字は9だから、末尾は3。つまり1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3 だ。

At :ぼく、自分の考えを修正したい。それは7x7x7x7x7。ぼくは今7x7x7x7x7x7x7x7を考えているの。

それは、7であることが結論づけられた。最後に、

先生 :これは何乗?(すなわち7x7x7x7x7x7x7x7)

At :8乗。

先生 :これは7^4を2乗するということね。(板書:$7^8=7^4\times7^4$)じゃあ、7^{16}はなに At?

At :$7^8\times7^8$になる。

Ju :私は$7^{16}\times7^{16}$は7^{32}になると思う。ちょうど2倍だ。

Su :7^3は343だから、7^6は$7^3\times7^3$、343×343だと思う。(板書:$7^4=7^2\times7^2$)

先生 :時間が来たわ。じゃあ、ここまで。また月曜日に続けましょう。

(4) ランパートの授業の優れている点

ランパートの授業が、理想的なモデルであると考えられる点は、以下の点である。

①教師は、問題を提示し、発問し、子供の意見を整理するのみであり、決して正しいとか誤りであると言わない点。

②子供間で話し合いが行われている点。

③話し合いを通して、数学的真理へと到達している点。

④多くの子供が、話し合いに参加している点。また、子供自身で問題を設定し、推測し、証明しようとしている点。

⑤子供Ａｔのように、納得しなければ、自分の意見を変えない子供がおり、それを許す教室のコミュニティが出来ている点。

3．ランパートの授業における教師の役割と立場

ランパートの授業における教師の役割は、役割と立場を、以下のようで挙げている。

(1) 役割

①問題を選択し提示する

生徒と教師が一緒に取り組む問題を選択しなければならないが、その選択の基準は、すべての生徒が推測を作成し、その推測に対してどんな形であり検証可能であることが必要であるとし、さらに具体的な観察と演繹的な一般化も含めるべきであるとしている。

②解法者や発言者を明確にする

問題の解き方を生徒が自発的に考えたとき、その解法を板書し、解き方にすべて「？」をつける。「？」について発言したときには、誰が発言したかをわかるように名前を横に書き、解法者や発言者を明確にする。

③議論のルールを定め遵守させる

答えが誤っているので消すべきであると生徒が主張したときには、教師が誤りである理由を説明するように求めることや、黒板に書かれた解法について異議がある場合には、質問をする形で聞き、その質問に答える形で自分の書いた解法に対して正当化する等の教室での議論の際のルールを設定し、遵守させた。

(2) 授業における教師の立場

教師の立場は、以下のように挙げている。

①数学の熟達者であること

②数学をわかるために、熟達者がどのようにするかを示すこと

③話し合いに参加すること

④問題の答えや規則、その理由について数学的な意味で証明すること

⑤生徒自身の行った数学の主張についての証明を評価できること

⑥数学的ツールと慣行を活用する手ほどきをすること。

4．考察

ランパートの「数学する」授業のプロトコルを分析し、教師の役割や立場を明示してきた。

ランパートは、「数学する」ことを阻む要因としていくつか挙げているが、そのうちの１つとして、教師に正誤について確認をすることを挙げている。

これは通常、教師の役割として認識され、日常的に正誤の判定を行なわれているが、その結果、生徒の学びを奪ってしまっているというのである。つまり、それは、生徒にとって教師が正解と言うので正解であり、教師が誤りであると言えば、誤りであるとする見方を養ってしまい、自ら数学的な議論や検証によって納得することを行わない生徒を育成してしまうというのである。同じことは、教科書や問題集の解答や解説にもいえる。自ら出した答えに対して、問題集の答えと一致したから正しかったと考え、誤りであれば、自らの答えを修正する形で学習するが、それでは本当の意味での理解につながらないとしている。

確かに、授業において、生徒は、教師に正誤の判定ないし確認を求める場面はしばしば見られ、教師は求めに応ずるままに、正誤の判定や確認をしがちであるが、これことが、教師の権威による判定であり、生徒に好ましくない学習観を植え付けているをランパートは指摘しているのである。

そこで、「数学する」ための授業が成立する過程の１要素として、教師による正誤の判定を行わないことが挙げられる。

＜参考文献＞

Lakatos, I. (1977). Proofs and refutations(revised ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer : Mathematical knowing and teaching, American Educational Research Journal, 27(1), 29 - 63

Polya G. (1973). Induction and Analogy in Mathematics, Volume 1 of Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press