

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 22 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22540110

研究課題名（和文） モデル理論におけるタイプ排除定理とその応用

研究課題名（英文） Omitting types theorem and its application

研究代表者

坪井 明人 (TSUBOI AKITO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：30180045

研究成果の概要（和文）：我々は、木の一樣性に関するいくつかの新しい概念を導入した。木とは、定義から、任意の元の始切片が全順序になる半順序構造のことである。

木の典型的な例は、有限  $\omega$  列全体に始切片関係を導入して得られる。本研究では、言語  $L$  を持つ構造  $M$  において議論する。部分集合  $A$  が木の元によってインデックスを持つ場合も木と呼ぶことにする。

我々は木  $A$  の一樣性を研究し、非安定理論の研究に応用を行った。特に、我々は  $\Gamma$ （論理式で記述された条件集合）が強い部分順序性を持てば、 $\Gamma$  の解として、強い意味の一樣集合をとれることを証明した。

研究成果の概要（英文）：We introduced several new notions concerning indiscernibility of trees. A tree is by definition an ordered set  $(O, <)$  such that, for any  $a \in O$ , the initial segment  $\{b \in O : b < a\}$  determined by  $a$  is a linearly ordered set.

A typical example of tree is the set  $\omega^{<\omega}$  of finite  $\omega$ -sequences with the order relation  $<_{\text{ini}}$ , where  $\eta <_{\text{ini}} \nu$  means that  $\eta$  is a proper initial segment of  $\nu$ .

In this study, we worked in some structure  $M$  in the language  $L$ . A subset  $A$  of the form  $\{a_\eta : \eta \in O\}$ , where  $O$  is a tree, and  $a_\eta$  is an element in  $M$  labeled by  $\eta$ , is also called a tree.

We studied the indiscernibility of such trees  $A$  in general settings and then applied the obtained results to the study of unstable theories. Among others, we proved that if  $\Gamma$  (a set of conditions described by formulas) has the strong subtree property then  $\Gamma$  is realized by a strongly indiscernible tree.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2010 年度	1, 100, 000	330, 000	1, 430, 000
2011 年度	900, 000	270, 000	1, 170, 000
2012 年度	1, 100, 000	330, 000	1, 430, 000
年度			
年度			
総 計	3, 100, 000	930, 000	4, 030, 000

研究分野：モデル理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：モデル理論, 安定性理論

## 1. 研究開始当初の背景

モデル理論は歴史的には、(代数学の) 体論と平行の議論から始まった。例えば代数閉体が次元により決定されるという有名な事実は、モデル理論的には

$\aleph_1$ -範疇的だが  
 $\aleph_0$ -範疇的でない

公理系は、可算モデルが可算個あり、非可算濃度においてはモデルが一つしかない、という形で一般化される。ここで範疇性とは、その濃度におけるモデルが(同型を除いて)一意に決まることを意味している。

この事実から始まったモデル理論は、Morley, Shelah, Pillay, Hrushovski, Kim などの深い仕事により、模倣の範囲を超えて発展するようになった。数学の多くの分野に应用が可能なほど発展を遂げたと言える。

## 2. 研究の目的

他分野に应用が可能なまでに発展したモデル理論をより発展させて、さらにモデル理論固有の結果をも導く。

モデル理論的に重要な概念であるタイプと定義可能集合を研究することにより、モデル理論の発展と応用を目指す。

(ここで、定義可能集合とは、与えられた構造において、論理式(研究成果の項目で詳しく述べる)の解集合の形で表現される構造の部分集合のことである。またタイプは、論理式の集合のことである。タイプによって定義される集合は、定義可能集合による集合族における共通部分として表すことができる。)

## 3. 研究の方法

二つの軸による研究である：

- (1) 大学におけるセミナー
- (2) 研究成果の発表と議論

筑波大学におけるセミナーの利用：「タイプと定義可能集合に関するセミナー」を定期的に関き、大学院生や他大学の研究者とともに研究を重ねる。

研究発表：このようなセミナーでの研究によって得られた研究成果を「モデル理論研究集会」において発表を行う。また議論を通じて研究を発展させる。「夏のモデル理論勉強会」という名称で長年行われてきている研究集会において発表を行う。また冬季にも研究集会を開催する。

## 4. 研究成果

論理式とは、形式的な言語を用いて表現される形式的な命題のことである。我々は一階論

理式を扱う。一階論理式を単に論理式と表現する。論理式に現れる変数は二つに大別される。束縛変数という名称で呼ばれる変数は、その変数が量化記号で束縛されているものをいう。また束縛変数でない変数を自由変数という。

いま自由変数  $x$  および  $y$  を持つ論理式  $\phi(x, y)$  を考える。ここで括弧はその部分の変数に自由変数が含まれることを意味している。 $y$  の部分にパラメータを代入した場合を考える。パラメータとは、(現在考えている) 構造の元のことである。このパラメータが樹形図状に並んだ場合が興味ある場合である。樹形図とは、ルート(根本)から出発して、分岐を繰り返す、いったん分岐した枝は再び一つに重ならないものを考えている。

モデル理論における、理論のクラスの分類において、この樹形図上のノードに並んだパラメータを代入した論理式の集合が重要になる。実際にモデル理論的安定性およびモデル理論的単純性などは、ある種の論理式集合  $\Gamma$  が解を持つか否かということによって定義されている。すなわち、全体を満たすパラメータ集合が存在するかどうかによって、多くの安定性クラス、単純性クラスが表現される。

例えば、安定性の否定は、ある論理式  $\phi(x, y)$  において、2分岐樹形図が存在して、各ノードにおいては分岐した各枝で、片方が  $\phi$ 、もう片方が  $\neg\phi$  の形になっているものが存在する、という形で表現される。

本研究においては、 $\Gamma$  においてパラメータ集合を一樣樹形図としてとることができるか否かについて研究を行った。一樣集合は、一列にならんだ集合であって、順序同型によってそのタイプ(論理式集合で書かれる条件集合)が保たれることとして定義されていた。代数閉体における超越基底などはその例であり、数学的に重要な概念のモデル理論的な対応物と考えることができる。

一樣樹形図とは、これを模して定義され、樹形図として同じ形を持つ部分に対しては、その対応する部分のタイプが等しくなることとして表現される。一樣樹形図の存在はどんな場合にでも言えることではない。そこで同質性条件が必要になってくる。

$\Gamma$  に対する同質性の条件として、「部分樹形図条件」、「弱い意味での樹形図条件」、ならびに「強い意味での樹形図条件」を定義した。 $\Gamma$  がこれらの同質性条件を満たすときに、 $\Gamma$  のパラメータに対する解集合として、それぞれ「一樣樹形図」、「弱い意味の一樣樹形図」、

ならびに「強い意味での一様樹形図」がとれることを示した.

弱い意味での場合におい Shelah が明確には述べていなかった結果の厳密な意味での証明を与えている. (Classification Theory の中に記述されている結果を厳密に証明したことになる.)

また以上の結果は, 樹形図が横幅が  $\omega$ , 高さが  $\omega$  の場合であるが, 応用を目指した場合には, これ以外の形の樹形図の考察も必要になる. (横幅とは樹形図のノードにおける分岐において, その分岐の数のことである. また高さはパスの長さのことと思って構わない.)

我々は, 高さが偶数のノードではその後継ノードが一つだけの場合も考察をし, 単純性理論の考察へ応用を行った. 前述の Shelah の結果の厳密化のためにはこのような特殊な樹形図が必要になった.

これらを考察して, 研究を行い, その結果は, Annals of Pure and Applied Logic に竹内耕太氏との共同研究として発表した. (雑誌論文番号 1 を参照のこと.)

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

1. "On the existence of indiscernible trees", Kota Takeuchi, Akito Tsuboi, Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 163, Issue 12, 1891-1902 (2012). 査読あり

2. "Locally  $\omega$ -minimal structures", Tomohiro Kawakami; Kota Takeuchi; Hiroshi Tanaka; Akito Tsuboi, J. Math. Soc. Japan 64, No. 3, 783-797 (2012). 査読あり

3. "Trees and Branching Axioms", 坪井明人, Akito Tsuboi, Model Theory of Fields and its Applications RIMS 研究集会報告書, 55-54 (2012 年 5 月) 査読なし

4. "Algebraic types and the number of countable models", 坪井明人 Model Theory and Its Application to Algebra, モデル理論とその代数への応用, RIMS 研究集会報告書, 29-34, (2010 年 8 月) 査読なし

〔学会発表〕(計 11 件)

1. "Real closed field as an extension of  $\mathbb{Q}$ ", 坪井明人, 高知モデル理論研究集会, 2013 年 3 月 4 日 (月) ~ 3 月 6 日 (水) 午前高知工科大学 K203 (K 棟 2 階)

2. "On Small Models", 坪井明人, 研究集会「モデル理論夏の勉強会 2012」, 2012 年 8 月 28 日 (火), 29 日 (水), 30 日 (木), 東海大学山中湖セミナーハウス

3. "Generic Structure について", 坪井明人, 研究集会「モデル理論夏の勉強会 2012」, 2012 年 8 月 28 日 (火), 29 日 (水), 30 日 (木), 東海大学山中湖セミナーハウス

4. "On Indiscernible Trees", Akito Tsuboi, American Mathematical Society, 2012 Spring Western Section Meeting, 2012/03/04, University of Hawaii at Manoa, USA, 招待講演

5. "On the Existence of Indiscernible Trees", Akito Tsuboi, Asian Logic Conference, Victoria University, New Zealand, 2011/12/20, 招待講演 (Plenary Lecture)

6. "Trees and Branching Axioms", 坪井明人, 体のモデル理論とその応用, Model Theory of Fields and its Applications, RIMS 研究集会, 2011 年 11 月 28 日 ~ 11 月 30 日, 京都大学数理解析研究所

7. "モデル理論入門 1", 坪井明人, 数学基礎論サマースクール, 神戸大学大学院工学研究科 5W 棟 5W-301 (神戸市灘区六甲台町 1-1), 2011 年 8 月 29 日 (月) 13:30 ~ 8 月 31 日 (水) 12:10, Tutorial Lecture I

8. "モデル理論入門 2", 坪井明人, 数学基礎論サマースクール, 神戸大学大学院工学研究科 5W 棟 5W-301 (神戸市灘区六甲台町 1-1), 2011 年 8 月 29 日 (月) 13:30 ~ 8 月 31 日 (水) 12:10, Tutorial Lecture II

9. "On local  $\mathcal{O}$ -minimality", 坪井明人, モデル理論夏の学校 2010, 2010 年 8 月 26 日 (木) ~ 8 月 28 日 (土), 聖徳大学 10 号館

10. "On Coheir Sequences", Akito Tsuboi, Model Theory Conference in Seoul, Yonsei University, Korea, 2010/05/22, 招待講演 (Plenary Lecture)

11. "Hrushovski's Construction", Akito Tsuboi, 2010 Model Theory School in Seoul (2010/05/16). ( Tutorial Lecture for Graduate Studentes) at Yonsei University, Korea,  
招待講演

〔図書〕(計 1 件) 坪井明人  
「数理論理学の基礎・基本」, 牧野書店  
(2012/03). 著書, 116 ページ

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tsuboi/>

<http://researchmap.jp/read0018326>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

坪井 明人 (TSUBOI AKITO)  
筑波大学・数理物質系 数学域・教授  
研究者番号 : 30180045