様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　24　年　3　月　27　日現在

機関番号：12102
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008　～ 2010
課題番号：20740088
研究課題名（和文）　有質量な可積分場の理論の表現論的構造

研究課題名（英文）　Representation theoretical structure in massive integrable quantum field theories

研究代表者
竹山 美宏　（TAKEYAMA YOSHIHIRO）
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：60375392

研究成果の概要（和文）：有質量な可積分場の理論において重要な差分方程式である有理型量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式を主な対象として研究し、その特殊解や整合的な微分方程式を、二重アフィンヘッケ代数の表現論を用いて構成した。また、関連する問題として、リーマン・ゼータ関数の特殊値の拡張である多重ゼータ値の q 類似について、特殊関数論的な観点から考察し、それが満たす二次関係式などを証明した。

研究成果の概要（英文）：We studied the rational quantum Knizhnik-Zamolodchikov (rational qKZ) equation, which is a difference equation playing an important role in the theory of massive integrable quantum field theories. We obtained special solutions and constructed a system of differential equations compatible with the rational qKZ equation by making use of representation theory of the double affine Hecke algebra. We also studied a q-analogue of the multiple zeta values and proved quadratic relations among them.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数理物理学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系、qKZ 方程式、二重アフィンヘッケ代数、多重ゼータ値

１．研究開始当初の背景

可積分な量子場の理論は、有質量であるか質量ゼロであるかによって大きく二分される。質量ゼロのものは共形場理論と呼ばれ、その数学的構造は無限次元リー代数の表現論や、多変数超幾何関数の理論などを用いて詳細に調べられている。一方、有質量な模型に対してはその数学的構造の理解がまだ十分ではない。有質量な可積分模型は、質量ゼロの極限で共形場理論に移行することが知られている。従って、有質量な模型においても共形場理論のような豊富な数学的構造があることが期待される。

２．研究の目的

本研究では、有質量な可積分場の模型である sine-Gordon 模型と、その特別な場合であ

る弾性散乱模型を主な対象として、有質量な可積分場の理論の表現論的構造について考察する。この研究目的を達成するための手掛かりとして、関連する周辺領域の問題も視野に入れて研究を進める。

３．研究の方法

(1) 有質量な可積分場の模型において表現論的構造が見られると期待されるのは、局所作用素のなす空間である。局所作用素と、それが定める形状因子とは一対一の関係にあり、sine-Gordon 模型においては形状因子が量子 Knizhnik - Zamolodchikov 方程式 (qKZ 方程式) の解として構成できる。そこで、qKZ 方程式の代数的性質を、表現論の枠組みを用いて考察した。

(2) 本研究課題に関連する問題として、多重ゼータ値の q 類似が満たす関係式について考察した。qKZ 方程式において差分パラメータ q を 1 にする極限を考えると、共形場理論において重要な微分方程式である KZ 方程式が得られる。KZ 方程式の係数には、理論の対称性を記述するリー代数の Casimir 元が現れるが、これを非可換な形式元に置き換えたものを形式的 KZ 方程式と呼ぶ。形式的 KZ 方程式に対して、確定特異点のまわりにおける解の接続問題を考えると、多重ゼータ値が現れる。このように、多重ゼータ値は可積分系に関連する興味深い数学的対象であると考えられる。量子可積分系との関連としては、可積分な量子スピン鎖である XXX 模型の emptiness formation probability と呼ばれる相関関数が、多重ゼータ値を使って表せることが知られている (Boos-Korepin-Nishiyama-Shiroishi)。

有質量な可積分模型との関係においては、Zhao によって定義された多重ゼータ関数の q 類似が考察すべき対象であると期待できる(この関数は Kaneko-Kurokawa-Wakayama が定義したリーマン・ゼータ関数の q 類似を多重化したものである)。多重ゼータ値の q 類似の性質を調べることで qKZ 方程式の解空間について理解を深められるのではないかと考え、上記の問題を考察した。

４．研究成果

(1) qKZ 方程式について

① 有理型量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式(有理型 qKZ 方程式)の特殊解の構成を行った(筧三郎、西澤道知、斎藤義久各氏との共同研究)。

有理型 qKZ 方程式は、XXX 模型の相関関数や、SU(N)不変 Thirring 模型の形状因子が満たすべき方程式として知られているものである。以前の研究で、非対称マクドナルド多項式を用いて qKZ 方程式の特殊解を構成することに成功したが、この手法を有理型 qKZ 方程式の場合に適用することで、ある可換な差分作用素の組に対する固有値問題の解を見つければ、有理型 qKZ 方程式の解を構成できることが分かる。我々は、この固有値問題が、有理型 qKZ 方程式のパラメータ(レベル)がある特定の値のときにのみ非自明な多項式解を持ち、その解は shifted 非対称ジャック多項式と呼ばれる多変数の特殊多項式で与えられることを証明した。この証明の鍵となるのは Knop による inversion formula である。これは、非対称 Jack 多項式と shifted 非対称ジャック多項式を結びつける公式である。これを退化二重アフィンヘッケ代数の表現論の枠組みで捉え直し、Dunkl による singular polynomials の空間の記述を利用することで、我々の結果が自然に得られる。

以上のようにして得られる有理型 qKZ 方程式の特殊解は、Di Francesco と Zinn-Justin が構成した O(1) ループ模型の基底状態(の有理退化極限)を含む。この中には、代数群の幾何学に関係するジョセフ多項式のある種の変形が現われることが知られており、我々の結果は、それが二重アフィンヘッケ代数の表現論の枠組みで捉えられる可能性を示唆している。

② 境界つき有理型 qKZ 方程式と整合的で可換な微分作用素の組を構成することに成功した。

Felder, Markov, Tarasov, Varchenko らによって(境界のない)KZ 方程式および有理型 qKZ 方程式と整合的な微分・差分作用素が構成されている。本研究では、van Meer, Stokman による bispectral qKZ 方程式の構成を手掛りにすることで、境界つきの場合に以下のようにして同様の作用素が得られた。bispectral qKZ 方程式は、二重アフィンヘッケ代数を用いて構成される。この方程式を、対応するルート系が $(C_n^\vee, C_n)$型の場合に書き下し、さらに三角型の退化を行うことで、境界つき有理型 qKZ 方程式、およびそれと整合的な微分方程式が得られる。しかし、このようにして得られた方程式系は、解が値を取る空間が制限されたものであり、量子可積分系の観点からは十分一般的なものとは言えない。そこで、bispectral qKZ 方程式の三角型退化を、非自明な修正項を追加することによって拡張し、結果として有理型 qKZ 方程式と整合的な微分作用素を構成することができた。

この結果により、境界つき有理型 qKZ 方程式の解空間が、方程式のパラメータにどのように依存するのかを、整合的な微分方程式を用いて(たとえば幾何学的な議論により)考察できるのではないかと期待している。境界のない場合には、(q)KZ 方程式およびそれと整合的な作用素の間の関係が(gl_n, gl_k)双対性の枠組みのなかで明らかになっている。今回得られた境界つきの整合的な作用素たちに対しても、表現論的な背景があるものと期待され、それを調べることは興味深い問題であると思われる。

(2) 多重ゼータ値の q 類似について
(以下、多重ゼータ値の q 類似を、q-多重ゼータ値と呼ぶ。)

① 等号つき q-多重ゼータ値のある母関数を一般 q-超幾何級数の特殊値として表示する公式を得た。
多重ゼータ値を係数にもつベキ級数として定義した母関数を、ガウスの超幾何関数の特殊値として表示する公式は、Ohno-Zagier によって得られた。我々は以前の研究において、Ohno-Zagier の関係式の q 類似を証明した。q 類似の場合には、ガウスの超幾何級数の q 類似である q-超幾何級数の特殊値として母関数を表示できる。
等号つき多重ゼータ値は、多重ゼータ値の定義において和の範囲を修正したものである。等号つき多重ゼータ値に対しては、Ohno-Zagier の関係式と同様の公式が、Aoki, Kombu, Ohno によって得られていた。本研究では、これを q 類似の場合に拡張した。我々の公式の特殊な場合として、Ohno-Okuda による等号つき q-多重ゼータ値の和公式が得られる。
多重ゼータ値、およびその q 類似から定まる母関数を、一般超幾何級数で表示する公式はいくつか知られているが、その数学的な意味は十分に分かっておらず、今後研究すべき課題である。

② 川島関係式と呼ばれる多重ゼータ値の 2 次関係式の族を、q 類似の場合に拡張することに成功した。川島関係式は、特別な場合として線形の関係式を与える。この線形部分は、巡回和公式・大野関係式・一般導分関係式と呼ばれる明示的な関係式を真に含む。したがって、川島関係式はかなり広いクラスのものであると言える。今回の研究で得られた川島関係式の q 類似も線形部分を含むが、この部分は多重ゼータ値に対するものとまったく同じである。よって、巡回和公式などの関係式は、q-多重ゼータ値についてもそのまま成り立つことが分かる。

以上のように、多重ゼータ値の関係式が、そのまま q 類似の場合にも成り立つことは、まったく自明ではない。多重ゼータ値の線形関係式については、幾何学的な背景もある程度分かっている。同様のことが q 類似の場合に拡張できるのかどうかは興味深い問題であろう。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Yoshihiro Takeyama, Quadratic relations for a q-analogue of multiple zeta values, 査読有, Ramanujan J. 27(1), 2011, 15-28.
DOI: 10.1007/s11139-011-9328-8
② Yoshihiro Takeyama, Differential equations compatible with boundary rational qKZ equation, Proceedings of the Infinite Analysis 09 -- New Trends in Quantum Integrable Systems, 査読有, 2010, 421-450.
DOI: 10.1142/9789814324373_0021
③ Yoshihiro Takeyama, A q-analogue of non-strict multiple zeta values and basic hypergeometric series, 査読有, Proc. Amer. Math. Soc. 137(9), 2009, 2997-3002.
DOI: 10.1090/S0002-9939-09-09931-6
④ Saburo Kakei, Michitomo Nishizawa, Yoshihisa Saito, Yoshihiro Takeyama, The Rational qKZ Equation and Shifted Non-Symmetric Jack Polynomials, 査読有, SIGMA (Symmetry, Integrability, and Geometry. Methods and Applications. electronic), 5, 2009.
http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2009.010
⑤ H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model II: Creation Operators, 査読有, Commun. Math. Phys. 286(3), 2009, 875-932.
DOI: 10.1007/s00220-008-0617-z
⑥ B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, Y. Takeyama, A $\phi_{1,3}$-filtration of the Virasoro minimal series M(p,p') with $1<p'/p<2$, 査読有, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44(2), 2008, 213-257.
DOI: 10.2977/prims/1210167327

〔学会発表〕（計 3 件）

① 竹山美宏, 多重ゼータ値のｑ類似が満たす 2 次関係式, 日本数学会年会, 2011

年 3 月 22 日, 早稲田大学.

② 竹山美宏, Differential equations compatible with boundary rational qKZ equation, 日本数学会年会, 2010 年 3 月 26 日, 慶應義塾大学.

③ 竹山美宏(代表), The rational qKZ equation and shifted non-symmetric Jack polynomials, 日本数学会年会, 2009 年 3 月 29 日, 東京大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

竹山 美宏 (TAKEYAMA YOSHIHIRO)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：60375392