創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科

三井田裕樹・更科　元子・ 鈴木　清夫

須田　　学・牧下　英世・ 町田多加志

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
三井田裕樹・更科　元子・鈴木　清夫
須田　　学・牧下　英世・町田多加志

要約

2002 年度から５年間指定を受けた SSH 研究で，大学での学びにつながる数学に注目して特に「統計」および「微分方程式」に関する教材・カリキュラムを開発し，授業実践などを通してその効果を確認することができた。そこで 2007 年度より新規指定を受けた SSH 研究では，これら以外の分野を含めて，有効な教材を数多く開発することを目指すこととした。本年度までに 62 の教材を開発し，それらを含んだカリキュラムを作成するとともに，教員研修会などを実施し公開している。

また，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」の実施，筑波大学のインターンシップと連動したサイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組み，数学オリンピックや数学研究部など生徒の数学的活動の支援，筑波大学学生に向けた基礎統計学の講義などを行っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. はじめに

本校数学科では，筑波大学や他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。2002 年度から指定を受けたスーパーサイエンスハイスクール(以下 SSH と略)研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』の中で数学科は，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」(集団の特徴を掴む考え方や手法) および「微分方程式」(微小な変化から関数の特徴を捉える考え方) に関する教材開発と授業実践を行った。また，それらを本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置するとともに，教育研究会などで公開し，その効果を確認することができた。

そこで 2007 年度より５年間の新規指定を受けた SSH 研究『国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，これら以外の分野を含めて，生徒も教師も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を数多く開発し，中高一貫カリキュラムの充実を目指すこととした。

これまでに 62 の教材を開発し，カリキュラムに配置するとともに，教員研修会などで発表している。また，教材・カリキュラム開発以外に，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した筑波大学インターンシップと連動した総合学習「ゼミナール」「テーマ研究」，数学オリンピックや数学研究部など生徒の数学的活動の支援，筑波大学学生に向けた基礎統計学の講義などを実施している。以下、その取り組みを報告する。

2. 今年度の研究

2.1. 教材の開発

今回の３年計画の『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発～中高６カ年から大学へ』というタイトルには，中高一貫校である本校の特色を活かしたいという願いがこめられている。

本校に入学してくる多くの生徒は，受験勉強の影響で，答えを早く正確に出す能力を持っており，特に中学の新入生の殆どは算数に熟達している。しかし，計算・理解は速いけれども，中学以降の数学で理解が深まらない場合や，数学的思考・論理的思考になじめない場合，一般化・公式にとらわれ，思考が発展しないケースなども見受けられる。

Creative Teaching Materials,Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

中学の数学で文字に出会い，方程式を使えるようになると，それまでの算数的思考を節約して課題が解けてしまう。微積分や複素数などでも一歩高い手段を学び，一気に見晴らしが良くなる飛躍があるのは誰もが実感できるところだ。このような感激は実に大きい。また逆に，眺望のよい高いところでは小さい木々や花は見えない。一般性を追求すると課題に固有の意味や特殊性は見えにくくなるが，自然科学・社会現象に数学を応用するときには，より原始的な位置まで戻る場合もありうる。要するに普遍性も個別性も必要なのであって，数学の勉強は一般性･普遍性を追求しながらも，個別性･特殊性を味わうことも大切なのである。そのことは中高から大学への流れのなかで意識しておきたい。それには，適切な教材が欠かせない。

そのためにはこれまで開発してきた「統計」と「微分方程式」の教材だけでなく，様々な分野において，大学での学びにつながる数学教材，魅力的で有用な教材を開発する必要があると考えられる。そこで昨年度から，さまざまな場面の教材を開発することにした。充実したカリキュラム作成のために，生徒も教師も意欲的に取り組めるような教材をできるだけたくさん開発し，魅力的な学びを目指していきたいと考えている。

今年度新たに我々が研究し開発している教材は次の通りである。

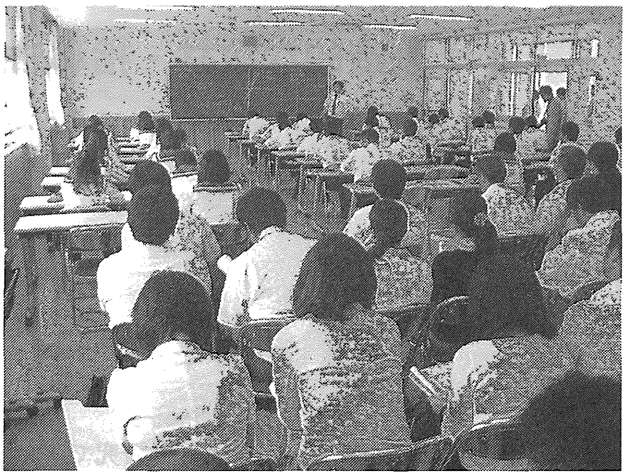
・ 三角関数の和と積の周期
・ ベクトルの内積と方べきの定理
・ Σｋ＾４と区分求積法
・ 身近な確率・連続変量の確率

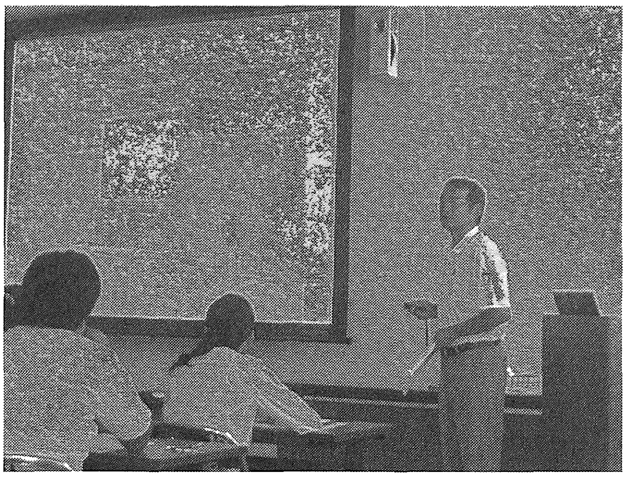
2.2. その他のSSHの取り組み

開発した教材・カリキュラムは教員研修会などで公開し，参加者から今後の研究の指針を得ている。本年度は以下の研修会を実施した。

（詳細は本校SSH報告書参照）

・SSH数学科教員研修会　in 熊本
（2011年8月19日実施，会場　熊本県八代中高校，参加者　約100名）





・SSH交流枠支援教員研修　数学科教員研修会
（2012年3月4日実施，会場　本校オープン・スペース，参加者　100名（予定））

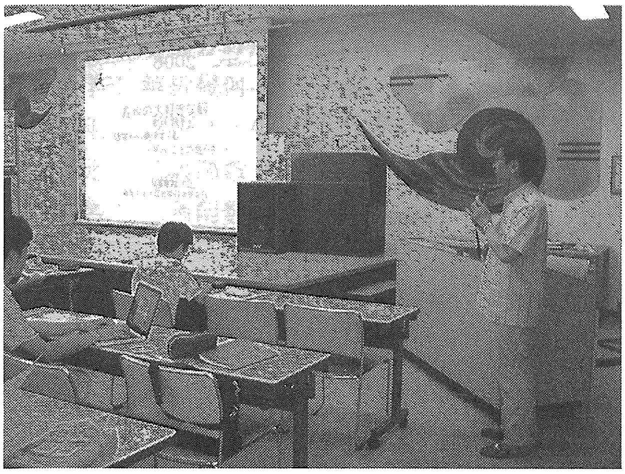
2.3. 数学特別講座

SSH事業として，魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生や卒業生に実施していただいている。この講座の目的は，中学高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。なお，これらの内容も授業に取り込める教材として研究する必要があると考えている。

本年度は次の講座を実施した。

（詳細は本校SSH報告書，特別講座講義録参照）

・「直角の大好きな脳」
講師　杉原厚吉　明治大学大学院教授
実施日　2011年7月8日
参加生徒　中1から高3までの希望者91名



・「数理的ヒラメキで解くパズル」
講師 坂井公 筑波大学大学院数理物質科学系准教授
実施日　2011年12月13日
参加生徒　中1から高3までの希望者97名
・「現代数学のめざすもの　ーガロア理論、整数論とその周辺からー」
講師　吉田輝義　ケンブリッジ大学講師
実施日　2011年12月20日
参加生徒　中1から高3までの希望者44名

2.4. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校2年生の総合学習「ゼミナール」を，筑波大学大学院生が参加する形で実施している。これは筑波大学大学院数理物質科学研究科(DC)の講座「数学インターンシップ」(1 単位)と連動したものであり，高校3年生の総合学習（テーマ研究）につながる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに,本校テーマ研究発表会,SSH生徒研究発表会などで発表している。

本年度ゼミナールへの大学院生の参加は2名で，高校3年生1名の発表，中学3年生も参加しての高2生徒のプレ発表，大学院生の講義などを行った。参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることが窺え，効果的な取り組みであると考えている。また，生徒は様々な研究発表会に参加し，発表しており，明治大学で行われた「第1回高校生によるMIMS現象数理学研究発表会」に於いて優秀発表賞2件を受賞した。

2.5. 生徒の数学的活動の支援

特別講座同様,生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募っている。今年度もJMOに77名,JJMOに139名（10年度はj94名、jj205名）が応募した。

また，数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行う部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。本年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに、研究レポート集を発行した。

2.6. 筑波大学　自由科目「基礎から学ぶ統計の世界」

筑波大学が2008年度から実施しているリメディアル教育は,本年度より単位認定の自由科目として設定され,「統計学の基礎を学ぶ」という目標で，本校数学科および筑波大学附属高校（文京区）数学科の教員が授業を担当している。

本年度は5月と6月の土曜日10時～15時に，大学の普通教室とコンピュータルームで本校が担当して実施した。

大学への学びにつながる数学を目指す我々にとって，高大連携という意味でも有用な取り組みである。来年度は筑波大学附属高校と連携して実施することになっている。

3. 開発教材一覧

★印　今年度開発中のもの・本冊子に掲載したもの
「A. 代数(Algebra)」,「An. 解析(Analysis)」,「G. 幾何(Geometry)」,「P. 確率(Probability)」,
「S. 統計(Statistics)」,「D. 微分方程式(Differential Equation)」,「O. その他(Others)」

各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。

(例)　an2.　合成関数とグラフ　中学2年の「解析」
G1−2. デカルトの円定理　高校1年の「幾何」その2

以下★の教材を記載する。

		年度				年度	
a1.	整数	2008		s1.	統計の基本	2006	
a1-2.	有理数	2007		s2.	標準偏差・近似直線	2006	
a3.	暗号理論と整数論	2006		s3.	正規分布と標準化	2006	
A1	数と方程式	2008		s3-2.	シミュレーションによる授業	2006	
A2	離散な数列と連続な関数	2009		S1.	回帰直線，相関係数	2007	
A2-2.	ΣK＾4と区分求積法	2011	★	S1-2	数理統計学入門	2009	
A3.	置換と正多面体群	2007		S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007	
A3-2.	１次変換の線形性	2008		S3.	主成分分析入門	2007	
an1.	2元1次方程式とその応用	2007		S3-2.	正規分布の平均の推定	2008	
an2	合成関数とグラフ	2009		d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007	
an3	絶対値を含む関数のグラフ	2009		d1-2.	『数える』	2010	
an3-2	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010		d2.	グラフや図形の移動・変形	2006	
An1.	2次関数	2007		d3.	２次関数の接線	2006	
An1-2	2次関数（２）	2009		d3-2.	面積・体積	2006	
An1-3	和や積のグラフ	2010		d3-3.	最大・最小	2006	
An2.	円周率の近似	2007		D1.	包絡線	2006	
An2-2.	三角関数表を作る	2006		D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007	
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006		D3	包絡線(その２)	2006	
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011	★	D3-2	微分方程式	2006	
g1	四角形の合同条件	2008		D3-3	微分方程式の応用	2006	
g1-2	作図の教材	2009		D3-4	関数のグラフの描画法	2008	
g1-3	四角形の性質（包含関係）	2010		D3-5	曲線と面積	2008	
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007		O1.	4元数を高校数学へ	2007	
g3.	立方体の切断	2007		O2.	有限世界の数学	2007	
g3-2.	反転法	2007		p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011	★
g3-3	立方体の切断（２）	2009		Pf1.	組合せの確率モデル	2007	
G1	四面体の幾何	2008		Pf2.	EBIと確率・統計	2007	
G1-2	デカルトの円定理	2009		Pf3.	無限集合の確率	2008	
G2.	正１７角形の作図	2008					
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011	★				

An2-4.　三角関数の和と積の周期

関連分野：解析分野
高等数学：解析幾何
対象学年：高校２年生
関連単元：三角関数
教 材 名：三角関数の和と積の周期

《三角関数の和と積の周期はどうなるか》

周期関数の代表例は三角関数であり，$\sin x$, $\cos x$ の周期が 2π，$\tan x$ の周期が π であることはよく知られている．また，物理への応用がある x 軸方向や y 軸方向への拡大，縮小，平行移動なども，よく扱われる．しかし，三角関数の和や積の関数の周期がどのようになるかは，あまり扱われていないようである．本稿では，三角関数の和や積の関数の周期を周期関数の定義を基として厳密に考察する．

An2-4.1. 周期関数の定義と基本的な例

関数 $f(x)$ について，0 でない実数 p が存在して，すべての実数 x に対して $f(x+p)=f(x)$ が成立するとき，$f(x)$ を p を**周期**とする**広義周期関数**という．ただし，f の定義域が実数全体でない場合，$x+p$ と x は f の定義域の要素に限る．p が周期ならば，0 でない整数 n に対して，np も周期となる．また，広義周期関数には，定数関数 $f(x)=k$ (k：定数) も含まれる．なぜならば，0 でないすべての実数が周期となるからである．

広義周期関数 $f(x)$ において，最小の正の周期 p が存在するとき，$f(x)$ を p を**基本周期**とする**周期関数**という．この定義から，周期関数は広義周期関数なので，一般に関数は，

- 周期関数
- 周期関数でない広義周期関数
- 広義周期関数でない

のいずれかに分類できる．定数関数は，0 でないすべての実数が周期となることから最小の正の周期が存在しないので，周期関数でない広義周期関数である．単に周期といって，基本周期のことを指すことも多いが，本稿では，これらを区別して表現することとする．

例えば，三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ は，それぞれ，2π, 2π, π を基本周期とする周期関数である．しかし，この基本的事実は，三角関数の定義から明らかである，と済ませていることが多い．このことを，$\cos x$ を例として，次の問である程度，厳密に議論できるようにしておこう．

問 1. $\cos x$ が周期 2π の広義周期関数であることを認めて，$\cos x$ が基本周期 2π の周期関数であることを示せ．

解　定義から，$\cos x$ は周期 2π の広義周期関数なので，すべての実数 x に対して $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ である．$\cos x$ に 2π よりも小さい正の周期 p が存在する，すなわち，$0<p<2\pi$ が存在して，すべての実数 x に対して $\cos(x+p)=\cos(x)$ をみたすことを仮定する．このとき，特に $x=0$ とすれば $\cos p=\cos 0=1$ であるが，$0<p<2\pi$ より $-1 \leqq \cos p < 1$ なので，$1=\cos p \neq 1$ は矛盾である．よって，$\cos x$ に 2π よりも小さい正の周期は存在せず，2π が最小の正の周期，すなわち，基本周期となる．それゆえ，$\cos x$ は基本周期 2π の周期関数である．　□

$\sin x$, $\tan x$ が，それぞれ基本周期 2π, π の周期関数であることも同様に示せる．$\sin x$ については，$\sin x=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，基本周期が 2π である $y=\cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものが $y=\sin x$ のグラフであることからも明らかである．また，グラフの平行移動，x 軸方向や y 軸方向への拡大，縮小を考えれば，定数 $k\neq 0$, $a\neq 0$, b に対して，

$$k\sin(ax+b),\ k\cos(ax+b),\ k\tan(ax+b)$$

はそれぞれ基本周期 $\dfrac{2\pi}{a}$, $\dfrac{2\pi}{a}$, $\dfrac{\pi}{a}$ の周期関数である．

An2-4.2. 周期関数の和と積の周期

一般に，関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$$

と定義して，$(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の**和の関数**，**積の関数**とよぶ．ただし，関数については，変数 x を省略して，単に f, g, $f+g$, $f\cdot g$ と表現することもある．

このような関数を定義すると，特に，f と g が周期関数のとき，$f+g$ と $f\cdot g$ もまた周期関数となるかは素朴な疑問である．そこで，次の課題を設定する．

課題 1. 関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ基本周期 a, b の周期関数とする．このとき，これらの和の関数 $(f+g)(x)$，積の関数 $(f\cdot g)(x)$ は，それぞれ周期関数となるだろうか．また，周期関数となった場合，その基本周期は a, b を用いて，どのように表されるか．

いきなり，このような課題を出題してみると，生徒から「周期関数になって，基本周期は a と b の最小公倍数」という反応があった．これは正しい答えなのだろうか．以下で，詳細に検討していこう．まず，$a=b$ の場合，最小公倍数という答えが正しいとすれば，$f+g$, $f\cdot g$ の基本周期は a になるはずなので，次の課題を設定してみる．

課題 2. 関数 $f(x)$, $g(x)$ を同じ基本周期 a の周期関数とする．このとき，これらの和の関数 $(f+g)(x)$，積の関数 $(f\cdot g)(x)$ は，それぞれ基本周期 a の周期関数となるか．

とりあえず，$a=2\pi$ として具体例をいくつか挙げてみる．

例 1. 関数 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ は，共に基本周期 2π の周期関数である．このとき，$(f+g)(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$f+g$ は基本周期 2π の周期関数である．また，積について，$(f\cdot g)(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ より，$f\cdot g$ は基本周期 π の周期関数である．

例 2. 関数 $f(x)=\sin x$, $g(x)=-\sin x$ は，共に基本周期 2π の周期関数である．$(f+g)(x)=0$ より $f+g$ は定数関数なので，$f+g$ は周期関数でない．また，$(f\cdot g)(x)=-\sin^2 x=\dfrac{\cos 2x-1}{2}$ より，$f\cdot g$ は基本周期 π の周期関数である．よって，和の関数も積の関数も基本周期 2π の周期関数でない．

例 3. 関数 $f(x)=\sin x+2$, $g(x)=\dfrac{1}{\sin x+2}$ は，共に基本周期 2π の周期関数である．$f+g$ は基本周期 2π の周期関数となることが示せる．また，$(f\cdot g)(x)=1$ なので，$f\cdot g$ は周期関数でない．

これらの例をまとめると，次の表のようになる．

$f(x)$	$g(x)$	f	g	$f+g$	$f\cdot g$
$\sin x$	$\cos x$	2π	2π	2π	π
$\sin x$	$-\sin x$	2π	2π	$\times$	π
$\sin x+2$	$\dfrac{1}{\sin x+2}$	2π	2π	2π	$\times$

表：和と積の関数の基本周期

和と積の関数について，周期関数になるときもあれば，そうでないときもある．ただし，周期関数にならなくても広義周期関数なので，広義周期関数以外の例があるか気になるところである (詳細は後述の問 3)．また，和と積の関数が周期関数になったとしても，基の周期関数の基本周期 2π になるときもあれば，そうでないときもあることが分かる．ここで，逆に，f, g, $f+g$, $f\cdot g$ の基本周期がすべて同じになる場合があるのかも疑問である．そこで，次の問を考えてみよう．

問 2. 課題 2 において，$(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ が共に基本周期 a の周期関数となるような $f(x)$, $g(x)$ は存在するか．存在するならば例を挙げ，存在しないならばそのことを示せ．

解 $a=2$ として，f, g が存在することを示す．$f(x)=\left[2\left(\dfrac{x}{2}-\left[\dfrac{x}{2}\right]\right)\right]$ とおくと，

$$f(x)=\begin{cases}0 & (2n\leqq x<2n+1,\ n:\text{整数のとき})\\ 1 & (2n+1\leqq x<2n+2,\ n:\text{整数のとき})\end{cases}$$

なので，$f(x)$ は基本周期 2 の周期関数である．また，$g(x)=f(x)$ と定めると，f, g は共に基本周期 2 の周期関数である．このとき，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2f(x),$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=(f(x))^2=f(x)$$

より，$f+g$, $f\cdot g$ は共に基本周期 2 の周期関数である．よって，求める周期関数 f, g が存在する． □

例 1–3 と問 2 の結果を踏まえれば，課題 2 を次のように結論付けられる．

課題 2 の結論. $(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ が共に基本周期 a の周期関数になることもあるが，一般には，周期関数になるとは限らない．また，周期関数になったとしても，基本周期 a の周期関数になるとは限らない．

さて，課題 1 に戻って，$f+g$ が広義周期関数でないような周期関数 f, g が存在するか考えてみよう．

問 3. 関数 $h(x)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$ が，「周期関数」，「周期関数でない広義周期関数」，「広義周期関数でない」のいずれであるか答えよ．

解 $h(x)$ が広義周期関数であると仮定する．すなわち，0 でない実数 p が存在して，すべての実数 x に対して $h(x+p)=h(x)$ が成立すると仮定する．特に $x=0$ でも成立するので，$h(p)=h(0)$ より $\cos p+\cos\sqrt{2}p=2$

である．ここで，$-1 \leqq \cos p \leqq 1$, $-1 \leqq \cos\sqrt{2}p \leqq 1$ を考えると，$\cos p = 1 = \cos\sqrt{2}p$ なので，$p = 2\pi n$, $\sqrt{2}p = 2\pi m$ をみたす整数 n, m が存在する．$p \neq 0$ より $n \neq 0$ であることに注意すれば，$\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}p}{p} = \dfrac{2\pi m}{2\pi n} = \dfrac{m}{n}$ であり，n, m は整数なので，これは矛盾である．よって，$h(x)$ は広義周期関数でない． □

この結果は，$\cos x$ の基本周期が 2π で，$\cos\sqrt{2}x$ の基本周期が $\sqrt{2}\pi$ であることから，感覚的には納得しやすいものである．このことを踏まえ，課題 1 を $f(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{a}$, $g(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{b}$ の場合で考察する (問 4)．ここで，f, g は周期関数であり，その基本周期がそれぞれ a, b であることに注意しておく．

> **問 4.** 基本周期 a, b の周期関数をそれぞれ $f(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{a}$, $g(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{b}$ とするとき，関数グラフソフトを利用しながら課題 1 を考察せよ．ただし，和の関数を $\varphi(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{a} + \cos\dfrac{2\pi x}{b}$，積の関数を $\psi(x) = \cos\dfrac{2\pi x}{a}\cdot\cos\dfrac{2\pi x}{b}$ とおく．

GRAPES や FunctionView などの関数グラフソフトを用いて，様々な a, b の値で φ, ψ が周期関数となるか，また，周期関数となった場合，その基本周期がどのようになるかを実験してみる．このとき，最終的に次の結果を得る．

問 4 の解.

$\boxed{\varphi\text{ について}}$

• a, b が自然数のとき

a と b の最小公倍数を c とおくと，$an = c = bm$ をみたす互いに素な自然数 n, m が存在する．このとき，

$$\begin{aligned}\varphi(x+c) &= \cos\frac{2\pi(x+an)}{a} + \cos\frac{2\pi(x+bm)}{b} \\ &= \cos\frac{2\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi x}{b} = \varphi(x)\end{aligned}$$

より，φ は周期関数であり，c はその周期である．次に，c が最小の正の周期であることを示す．そのため，$0 < d < c$ をみたす d が存在して，すべての実数 x に対して $\varphi(x) = \varphi(x+d)$ が成立すると仮定する．特に $x = 0$ とすれば，

$$\begin{aligned}\varphi(0) = \varphi(d) &\Leftrightarrow 2 = \cos\frac{2\pi d}{a} + \cos\frac{2\pi d}{b} \\ &\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi d}{a} = 1 = \cos\frac{2\pi d}{b}\end{aligned}$$

より $\dfrac{d}{a} = n'$, $\dfrac{d}{b} = m'$ をみたす自然数 n', m' が存在する．このとき，$an' = d = bm'$ より d は a と b の公倍数であるが，$0 < d < c$ なので，c が a と b の "最小" 公倍数であることに矛盾する．よって，c は φ の最小の正の周期である．つまり，φ は基本周期 c の周期関数である．

• $\dfrac{a}{b}$ が有理数のとき

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{m}$ をみたす互いに素な自然数 n, m が存在する．

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{ax}{n}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{ax}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{b}\cdot\frac{ax}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{m}\right)\end{aligned}$$

より，和の関数 φ の結果を利用すれば，$\varphi\left(\dfrac{ax}{n}\right)$ は n と m の最小公倍数 l を基本周期とする周期関数である．ただし，n, m は互いに素なので，$l = nm$ である．$y = \varphi\left(\dfrac{ax}{n}\right)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{a}{n}$ だけ拡大すると $y = \varphi(x)$ のグラフになるので，$\varphi(x)$ も周期関数であり，その基本周期は $l\cdot\dfrac{a}{n} = am\,(= bn)$ である．

• $\dfrac{a}{b}$ が無理数のとき

問 3 と同様な方法によって，φ が広義周期関数でないことが示せる．

$\boxed{\psi\text{ について}}$

• $a = b$ のとき

2 倍角の公式より，

$$\psi(x) = \left(\cos\frac{2\pi x}{a}\right)^2 = \frac{1 + \cos\dfrac{4\pi x}{a}}{2}$$

なので，ψ は基本周期 $\dfrac{a}{2}$ の周期関数である．

• $a \neq b$ のとき

和積の公式より，

$$\begin{aligned}&\psi(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{a} + \frac{2\pi x}{b}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi x}{b}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi x}{\dfrac{ab}{a+b}} + \cos\frac{2\pi x}{\dfrac{ab}{|a-b|}}\right)\end{aligned}$$

なので，和の関数 φ の結果を用いて，次の (i), (ii) を得る．

(i) $\dfrac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{ab}{|a-b|}}$ が有理数のとき，$\dfrac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{ab}{|a-b|}} = \dfrac{n}{m}$ をみたす互いに素な自然数 n, m が存在して，ψ は基本周期 $\dfrac{ab}{a+b} \cdot m \left(= \dfrac{ab}{|a-b|} \cdot n \right)$ の周期関数である．

(ii) $\dfrac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{ab}{|a-b|}}$ が無理数のとき，ψ は広義周期関数でない． □

この結果より，課題 1 について，限定的ではあるが，$f(x) = \cos \dfrac{2\pi x}{a}$, $g(x) = \cos \dfrac{2\pi x}{b}$ $(a, b > 0)$ の場合が解決された．三角関数，絶対値，ガウス記号による関数を中心に，より一般の場合についても考察を進めていきたい．また，生徒の研究テーマとしても利用できそうである．

(2011 年　須田)

G2-2. ベクトルの内積と方べきの定理

関連分野：幾何分野
高等数学：ベクトル
対象学年：高校２年生
関連単元：ベクトル
教 材 名：ベクトルの内積

≪ベクトルの内積を見えるようにする≫

高等学校で学ぶ内容には，唐突な定義により導入されることが少なくない。そのため，生徒は「何故？」という疑問に終始引きずられることが少なくない。ことに，ベクトルなどの新しい構造を取り入れるときにはそのようなことが多いように感じる。

本稿では，ベクトルの内積を意味あるものとして，生徒が視覚的に捉えやすくできるように，中学または数学Aで学んだ方べきの定理との関連について紹介する。

なお，ここで報告する事例について高２の授業で実践したが，概ね生徒には好評であった。

2.2-1. 方べきの定理

方べきの定理は，高校数学Aの教科書では，一般に次のように定義されている。（「数学A」 実教出版）

定理 1.1　円の２つの弦AB，CDまたは，それらの延長が，点Pで交わるとき，次の式が成り立つ。

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

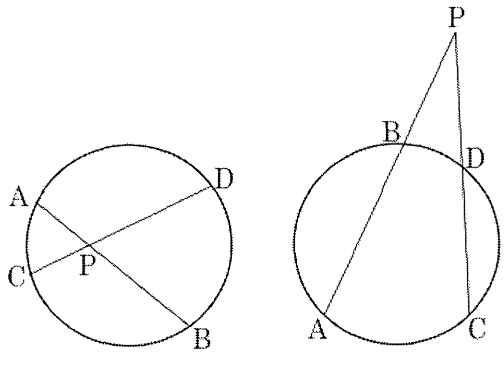


Fig 1.1 方べきの定理

証明　**Fig 1.2** の三角形PACと三角形PDBにおいて，

$$\angle CAP = \angle BDP$$
$$\angle ACP = \angle DBP$$

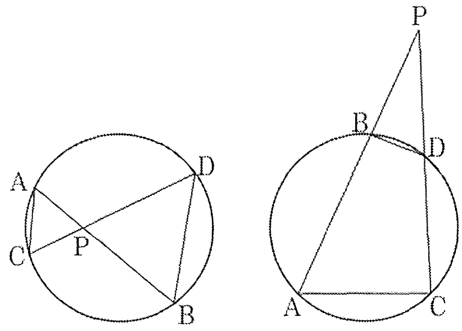


Fig 1.2 方べきの定理と三角形の相似

であるから

$$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

よって

$$PA : PD = PC : PB$$

ゆえに　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　終

注意　PA・PBの値を，点Pのこの円に関する方べきという。

定理 1. 2　円の弦ABの延長と円周上の　点Tにおける接線が，点Pで交わるとき，次の式が成り立つ。

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

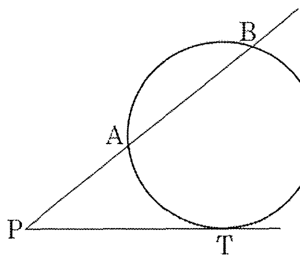


Fig 1.3

証明　**Fig 1.4** の△PATと△PTBにおいて

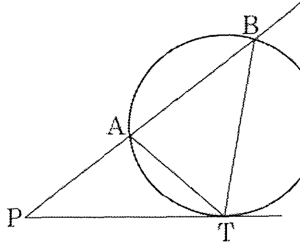


Fig 1.4

∠APT＝∠TPB

∠PTA＝∠PBT

であるから

△PAT∽△PTB

よって

PA : PT＝PT : PB

ゆえに　　PT²＝PA・PB　　終

1.1.1　方べきの定理を計量する

方べきの定理を学習するとき，定理１で終了することが多い。ここでは，方べきの定理を計量することによって，ベクトルの内積と結びつくことを中心に述べる。一般に，次が成り立つ。

定理 1.3　円の中心をO，円Oの半径をrとしたとき，

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = |PO^2 - r^2|$$

次が成り立つ。

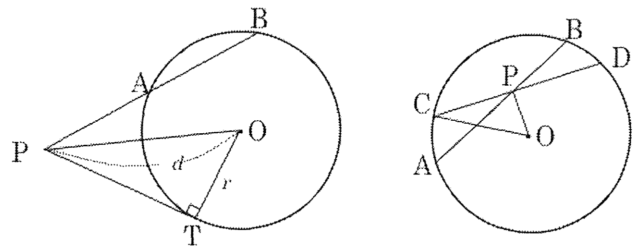


Fig 1.5 方べきの定理

証明　(i) 点Pが円外にあるとき，Pから割線PAB，接線PTを引けば，　PA・PB＝PT²

PA・PB＝PT²＝PO² − TO²＝$d^2 - r^2$ （一定）

(ii) 点Pが円内にあるとき，Pを通り，POに垂直な弦CDを引けば，PC=PDだから

PA・PB＝PC・PD＝PC²

また，PC²＝CO² − OP²＝$r^2 - d^2$ （一定）

(i)，(ii) から　PA・PB＝$d^2 \sim r^2$　　終

2.2-2. ベクトルの内積の定義

教科書では，平面上の２つのベクトルの内積$\vec{a} \cdot \vec{b}$を，図のように，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，∠BOA＝θとして

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

と定義する。

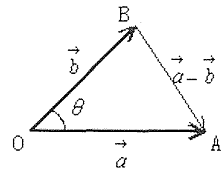


Fig 2.1　ベクトルの内積

2.1 ベクトルの成分表示

次に図のように，座標平面上において，A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2)であるとき，△OABに余弦定理を適用して，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

と計算できることを学ぶ。

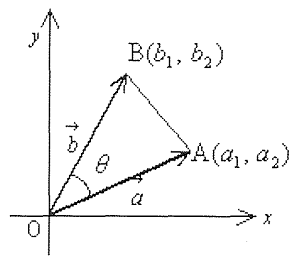


Fig 2.2　ベクトルの成分表示

最初から上の図のようにして，２つのベクトルの内積を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

と定義する教科書もある。こういった導入は，もってのほかであり，生徒にとっては唐突であり，内積の意味が伝わるとは思えない。

角田(2)（1998）は，図形のイメージから入ることによって，内積をより容易にすることいくつか事例を指摘している。その一つが内積をベクトルの正射影としてとらえる方法である。

2.2-3. 内積を正射影でとらえる

内積をベクトルの正射影として捉えることは，仕事として捉えることと同じである。物理や工業数理では，図のように，ベクトル$|\vec{b}|\cos\theta$を$|\vec{b}|$の$\vec{a}$上への正射影として扱うことで，内積が２つの長さの積として図形上にイメージしやすくなる。

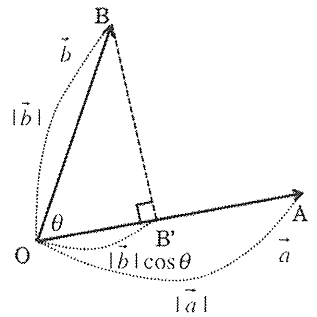


Fig　3.1　ベクトルの正射影

ただし，ベクトルの内積を一方のベクトルをもう一方のベクトルへの正射影によって与える場合，２つのベクトルがなす角 θ が鋭角のときは正の値を，鈍角の場合には負の値をとることに注意する必要がある。生徒の中には, 角 θ と $\cos\theta$ の値の関係がはっきりしていない者がいることに留意する必要がある。

すなわち,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB'}\right| \qquad (3.1)$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=-\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB'}\right| \qquad (3.2)$$

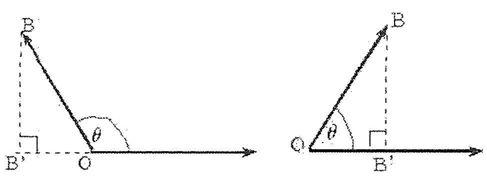


Fig 3.4　θ が鋭角の場合　　　θ が鈍角の場合

2.2-4. 内積を方べきの定理で捉える

3 では２つのベクトルの内積を一方のベクトルの他方への正射影として捉えたが，生徒にとっては内積を具体的に捉えることができないだろう。

そこで例えば，(3.1)式を次のように捉えてみる。

すなわち，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の結果 $\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB'}\right|$ としてみると，$\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB'}\right|$ は方べきそのものである。

生徒の理解のために補助円を図にかき加えれば，内積は方べきの定理として捉えることができる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB'}\right| \\ &=OS\cdot OR=OQ^2-r^2\end{aligned} \qquad (4.1)$$

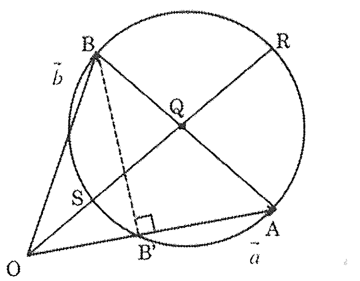


Fig　4.1　内積に円をかいてみると

2.2-5. 内積の演算問題

上記で，ベクトルの内積を方べきの定理で表わせることを示したが, 大学の初年級の線形代数のテキストには, 次のような問題や例がある。

$\boxed{例}$: ２点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とする。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$$

が成り立つことを示せ。

これは, ベクトルを位置ベクトルで表すことによって, 当然とも言える結果であり，内積を形式的に表現したものである。生徒の中には，右辺を内積の演算を形式的に行えば証明することは難しくはない。本問題でも，生徒には必ず図形とともに考えさせるべきである。その際に, △OAB において，$\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$ の第１項と第 2 項が図形的に何を表しているのかを問いかけたい。この場合は,

$$\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)=\left(\frac{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}{2}\right)^2-\left(\frac{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}{2}\right)^2$$

と変形すれば，AB の中点 Q の位置ベクトルが

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\overrightarrow{OQ},\quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\overrightarrow{MQ}$$

であるから，例の右辺をそのまま捉えれば

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{QA}\right|^2 \qquad (4.2)$$

である。これは，三角形 OAB における中線 OQ の長さの２乗と QA の２乗との差を表している。

このように，初等幾何との関係を考察することで，内積が意味づけし易い形の式にすることができた。なお, 類題として検定教科書にある問題を掲載する。これらの問題は，ベクトルの演算として扱われる例である。

類題：次の等式が成り立つことを示せ(3)。

(1) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

(2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)$

2.2-6. おわりに

この内容を実践した後の生徒の感想では，

(1) 方べきを利用するために円を使うという発想が新しいと思った。

(2) 新しい解法だったので，へーと思ったがあまり実用性が感じられなかった。もっと色々な問題を解いていればこの解法のすごさが分かるのかもしれないが，現段階では，「だから何に使えるのか」が分からなかったので，微妙である。

(3) 内積は奥深いと感じた。

(4) ベクトルの問題が幾何的な考え方で分かることを知って理解が深まった。

(5) 内積を図形的に捉えることが新鮮であった。

(6) 内積と「円」という絡みにくい内容を絡ませてしまった！！これは実は結構難しい。かなりすごい！！感動しました。

など，幾何とベクトルのつながりに驚きを述べる生徒が多数いた。

改訂された高等学校学習指導要領解説にある，「事象を数学的に考察し，表現する能力を伸ばす」とある。さらに，「ベクトルの基本的な概念を理解し，ベクトルの演算に習熟した後に，中学校で学習した内容についても，ベクトルを用いた数学的な考察や表現が可能となる．このことによりベクトルの有用性を認識し，ベクトルを用いて数学的に考察し表現する能力を伸ばすことができる。」とある。本論では，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を図形的な意味づけをして考察できるよう教材開発について論じたが，この式の形だけでは気がつかない生徒も多いかもしれない。そのためにも，数学Aの「平面図形」と高等学校との他の内容，さらには中学校での幾何教育とも良好な接続をもった中高を見通した幾何教材の開発が望まれる。その際に，高校生は概念や結果が量としてあるいは式として出てくるような場合については比較的に考えようとするが，概念的な問題としては取っ付きづらい感覚がある(4)ことに注意したい。

筆者は本研究によって高校生は方べきの定理としての性質を見るだけでは物足りないと考えている。例えば，（4.1）式を，円の中心 O まで距離 PO（mとおく）と円の半径rとの関係，すなわち方べきがm^2-r^2に等しいことを扱い，ベクトルの内積を視覚化するとともに，点Pの位置がm^2-r^2の値で計量することができるように，高校の幾何教育を計量という面で捉えるような教材を開発することが重要である(5), (6)と考える。

【註，および参考文献】

(1) 更科元子他，『中高6カ年における数学的能力等の発達変容の分析-意識調査を中心に-』，p.35～p.76，2001年，筑波大学附属駒場論集第40号。【5】「次の数学の分野（10項目）で嫌いなものは何ですか？（複数回答可）」において，最も人気のない分野は，「数列」，「ベクトル」，「複素数平面」の順に高い。

(2) 角田義一郎，『「内積の定義」の導入について』1998年8月，第26回北海道算数数学教育会高等学校部会研究会

(3) 岡本和夫 他，高等学校検定教科書　数学B「平面上のベクトル」（実教出版），p43～p86，2010年

(4) 東京理科大学数学教育研究所編（2007）「高校生の数学力 NOWIII」『科学新興新社／フォーラム・A』56頁～57頁

(5) 牧下英世，『高等学校の幾何教育教材の開発とその実証的研究-ベクトルの内積を視覚化する試み-』（数学教育学会会誌（臨時増刊）），2011年

(6) 長岡亮介，『本質の研究 数学Ⅱ＋B』，旺文社，2004年にもあるが，Fig 4.1を座標平面上の円と考え，数学Ⅱ「図形と方程式」における円，円がらみの領域で概念が意味あるものとして扱うことも可能となる。

（解説）

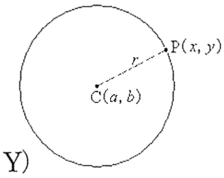
点C（a，b）とする。円外の点O（X，Y)とすれば

$OC^2=(X-a)^2+(Y-b)^2$

である。よって，（4.2）式は，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(X-a)^2+(Y-b)^2-r^2$

である。



・O（X，Y）

Fig 円の方程式と絡めて

点Oが円外の点であるから，

$$(X-a)^2+(Y-b)^2-r^2>0$$

円の方程式は，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

であることが意味をもつ。

（2011　牧下）

A2−2.　Σk^{4}と区分求積法

関連分野：代数分野，解析分野 高等数学：代数学，解析学 対象学年：高校２年生 関連単元：「数列」「微分積分」 教 材 名：「Σk^{4}と区分求積法」

≪Σの式≫

数列のΣに関する式として，Σk とΣk^{2}とΣk^{3}の３つの式が教科書に載っており，それぞれ，自然数の和，平方数の和，立方数の和 を求める式として説明されている．では，Σk^{4}はどのような式になるのだろうか．そのような質問をする生徒がいなかったので，連続数の積の和の特徴を示し，その式を利用してΣk^{2}の式を求める方法を授業で取り上げたところ，同様な変形からΣk^{3}や，さらにはΣk^{4}の式が求められるのではないかという興味をもたせることができた．

A2−2.1.　連続数のΣ

問１　次の数列の和を求めよ．ただし，$n\in N$ (1)　$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)$ (2)　$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots\cdots$ $\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$ (3)　$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots\cdots$ $\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$

解(1)　$k\in N$とする．

$$k(k+1)=\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

に$k=1,2,3,\cdots,n$を代入する．

$$\begin{aligned}
1\times2 &= \frac{1}{3}\{1\times2\times3-0\times1\times2\}\\
2\times3 &= \frac{1}{3}\{2\times3\times4-1\times2\times3\}\\
3\times4 &= \frac{1}{3}\{3\times4\times5-2\times3\times4\}\\
\vdots\ \ \vdots & \qquad\qquad \vdots\\
n(n+1) &= \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}
\end{aligned}$$

辺々を足すと

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2)　$k\in N$とする．

$$k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

よって，同様にして

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

(3)　$k\in N$とする．

$$k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{1}{5}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

よって，同様にして

$$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

これをΣ記号を用いて表すと

$$\sum k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$\sum k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$\sum k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

となり，これに$\sum k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

を加えると，以下のようなきれいな規則性が見つけられる．　$m\in Z$，$m\geqq0$とするとき

$$\sum k(k+1)\cdots(k+m)$$
$$=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)$$

連続する数のΣの式としてとても簡単な形にまとめることができる．

A2−2.2. Σk⁴

平方数の和Σk^2の公式を，先ほど求めた連続数のΣを使って求めると，

$$\sum k(k+1)=\sum (k^2+k)=\sum k^2+\sum k$$

より

$$\begin{aligned}\sum k^2 &= \sum k(k+1)-\sum k\\ &=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}\\ &=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

同様に，Σk^3の公式も求めると

$$\begin{aligned}&\sum k(k+1)(k+2)\\ &=\sum (k^3+3k^2+2k)\\ &=\sum k^3+3\sum k^2+2\sum k\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\sum k^3 &= \sum k(k+1)(k+2)\\ &\qquad -3\sum k^2-2\sum k\\ &=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\ &\qquad -3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\frac{1}{2}n(n+1)\\ &=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-2(2n+1)-4\}\\ &=\frac{1}{4}n(n+1)\{n^2+5n+6-(4n+2)-4\}\\ &=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n)\\ &=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\end{aligned}$$

となる．

問２　自然数の４乗の和Σk^4を求めよ．

解　連続数のΣを用いると

$$\begin{aligned}&\sum k(k+1)(k+2)(k+3)\\ &\quad=\sum (k^4+6k^3+11k^2+6k)\\ &\quad=\sum k^4+6\sum k^3+11\sum k^2+6\sum k\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\sum k^4 &= \sum k(k+1)(k+2)(k+3)\\ &\qquad -6\sum k^3-11\sum k^2-6\sum k\\ &=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\ &\qquad -6\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\\ &\qquad -11\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\frac{1}{2}n(n+1)\\ &=\frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)\\ &\qquad -45n(n+1)-55(2n+1)-90\}\\ &=\frac{1}{30}n(n+1)\{6n^3+54n^2+156n+144\\ &\qquad -(45n^2+45n)-(110n+55)-90\}\\ &=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum k^4 &= \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)\\ &=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\end{aligned}$$

自然数や平方数や立方数の和を求める式とつながりがあるようには見えないが，自然数の４乗の和の式もこのように一般化することができた．

≪区分求積法≫

学習指導要領では，区分求積法が数学Ⅲの指導内容になっているため，文系を選択した多くの生徒には，学習することなくそのまま過ぎさってしまう内容である．しかし，定積分と求積の関係を説明するにはどうしても欠かせない内容であり，極限の話として誰にでも感じてもらいたい発想である．そこで，高２の数列を学習した流れで，無限級数へ，さらに，区分求積法の考えへと進めた．そのため，定積分の式に変形することを目的とせず，微小の変化に着目し，無限のイメージを感覚的にとらえ，面積や体積が微小なものの和の極限値として求められることがわかることを目的とした．その過程で，区分求積法の説明に体積を取り入れたところ，自然とバームクーヘン積分の考えが出てきた．

A2−2.3.　区分求積法（面積編）

次の計算をしてみよう．

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4}\left(\frac{k}{4}\right)^2$$

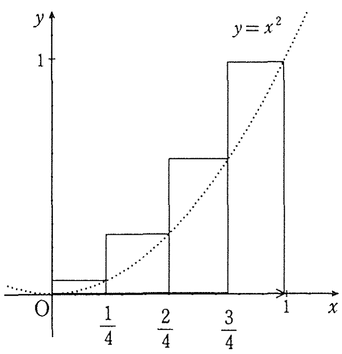
$$\frac{1}{4^3}\sum_{k=1}^{4}k^2=\frac{1}{4^3}\cdot\frac{4\times5\times9}{6}=\frac{15}{32}=0.468\cdots$$

また，級数の形で表すと

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4}\left(\frac{k}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2$$

この計算式を図で表現してみると図１のようになる．

図１



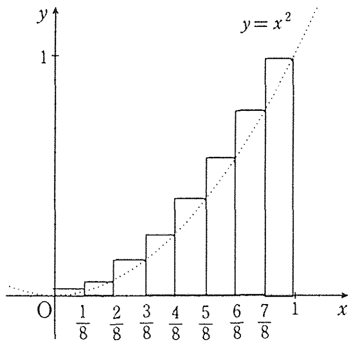
同様に，

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{8}\left(\frac{k}{8}\right)^2=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{8}\right)^2+\cdots+\frac{1}{8}\left(\frac{8}{8}\right)^2$$

$$=\frac{51}{128}=0.398\cdots$$

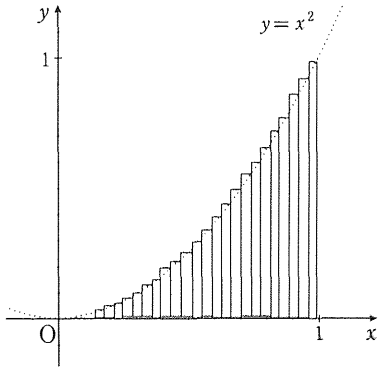
この計算式も図２のように表現することができる．

図２



$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{100}\left(\frac{k}{100}\right)^2=\frac{6767}{20000}=0.338\cdots$$

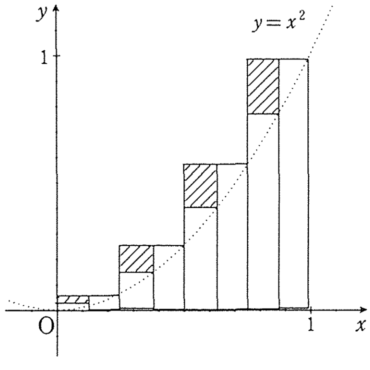
図３



この３つの級数の値は，どれも長方形の面積の和であるが，値の差はなのだろう？

曲線からのはみ出し部分ということを，４等分の図に８等分の図(図４)を書き入れて確認し，このはみ出し部分をより小さくすることで，曲線へと近づくことを感覚的に捉えてもらう．つまり「階段も間隔つめればすべり台」である．

図４



そして，無限等分することで，曲線に囲まれた図形の面積も求められるのだろうと感覚的に捉え，次の計算式へすすむ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

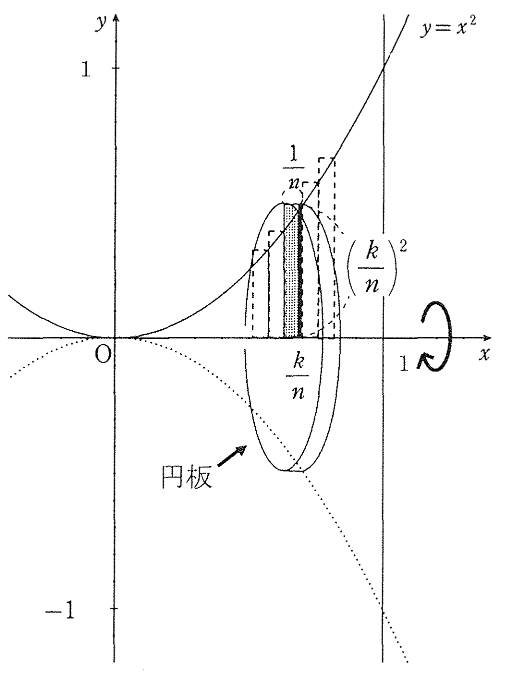
$$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot1\cdot2$$

$$=\frac{1}{3}=0.333\cdots$$

A2−2.4.　区分求積法(体積編)

“区間を細分し，和の極限値として面積や体積を求める方法を区分求積法という.” と教科書（「数学Ⅲ」（東京書籍））に説明されているが，ほとんどの場合，例は面積で示されており，体積の例が示されていない. そこで回転体を取り上げて，体積を区分求積法で求めてみた.

問３　曲線 $y=x^2$ と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を区分求積法で求めよ.



図から分かるように，面積では長方形だった部分がそれを x 軸の周りに回転することで円板になることがすぐに想像できるので, 次のような式がたてられた.

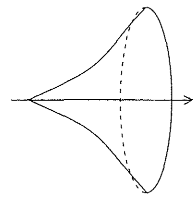
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\pi\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4\qquad\leftarrow\Sigma\,k^4\text{の式の登場}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^5}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

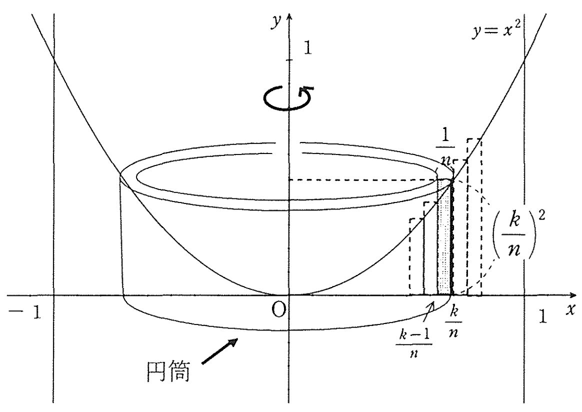
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{30}\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{30}\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3=\frac{\pi}{5}$$



さらに，回転軸を変えて考えてみる.

問４　曲線 $y=x^2$ と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれた部分を y 軸の周りに回転してできる回転体の体積を区分求積法で求めよ.



y 軸に垂直な長方形を考える者もいるが，問３の求め方を参考にして，面積での長方形部分を y 軸の周りに回転することで円筒ができることに気付く者が出てきた. そのイメージをバームクーヘンみたいというと納得し，そのまま計算へとすすむ. 自然とバームクーヘン積分の考えにつながった.

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\pi\left(\frac{k}{n}\right)^2-\pi\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)k^2$$

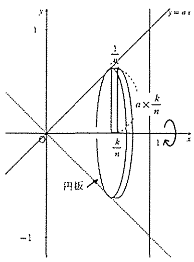
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^4}\cdot\left\{2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{6n}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 1^2-0\cdot 1\cdot 1\cdot 2\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{練習}}$ 次の直線または曲線で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を区分求積法で求めよ.

(1) 直線 $y=ax$ と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれた部分



$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\pi\left(a\times\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi a^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi a^2}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}\pi a^2$$

錐体の求積に現れる係数 $\frac{1}{3}$ が確認できる.

(2) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれた部分

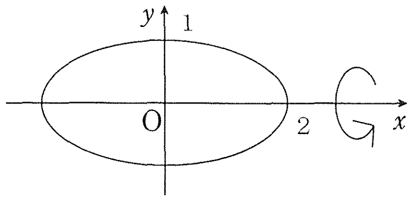
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\pi$$

(3) だ円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ で囲まれた部分



第1象限内の部分を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を 2 倍にしたのが, 求める体積だから,

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \quad \text{より} \quad y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$V=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\pi\left\{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2k}{n}\right)^2}\right\}^2$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^3}\left(n^2\cdot n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}2\pi\left\{1-\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=2\cdot 2\pi\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi$$

このような流れで取り組んだところ, 文系志望の生徒たちにも区分求積法まで学習することができた.

(2011年 町田)

p2　身近な確率・連続変量の確率

関連分野：確率分野
高等数学：確率論、解析学
対象学年：中学 2,3 年生、高校 1,2,3 年生
関連単元：確率
教 材 名：色々な確率・面積比などによる確率

≪身近な確率、線分や面積の比などによる確率≫

降雨確率が身近なものとなって久しいが、日常生活では様々な確率的判断が必要であり、科学的な社会生活を送るためには適切に確率を考え、判断することが不可欠である。

基本的な順列・組み合せは常識的であり、それらを用いた場合の数の計算は中学生でも理解可能である。確率を苦手とする生徒が少なからずいるが、単なる場合の数と等確率を前提とする確率でのものとの違いに戸惑ったり、考え違いによる誤りに気が付きにくいからであろう。学年を越えて何度も繰り返し扱うことで、このような苦手意識を払拭したい。

また、抽選が回転盤によるゲーム形式で実施される様子をテレビなどで目にするが、連続変量の確率分布は高校の数学Bでしか扱われない。線分比や面積比による確率は身近なものであり、中学生でも理解できる。

順列・組み合せを中学段階から扱い、面積比などによる確率を含めて、生徒が興味を持つような身近な確率を取り上げたいと考えている。以下、中学で取り扱ったものに、発展として高校で扱ったものを交えて、教材を記載する。

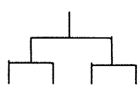
p2.　身近な確率・連続変量の確率

(1)　場合の数

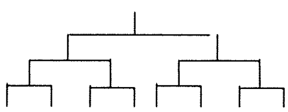
数え上げ、場合の数の和の法則や積の法則、及び順列組み合せについて、通常通り扱う。教材例は省略するが、次のような身近なものをできるだけ取り上げる。

問 1.

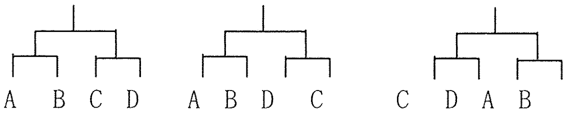
(1) 4 チームで右のようなトーナメントを行うとき、組み合せの作り方は何通りあるか。



(2) 8 チームで右のようなトーナメントを行うとき、組み合せの作り方は何通りあるか。



ただし、(1) (2) とも、例えば次のように、表の記載の仕方が異なっていても、対戦の仕方が同じものは 1 通りと数える。



(3) 8 チームで(2)のようなトーナメントを行う。8 チームの間には実力差があり、各対戦では実力上位のものが勝つとするとき、実力第 3 位のチームが決勝戦に進出できる組み合わせは何通りあるか。

解答例)

(1) 1 回戦での A の対戦相手を考えて、3 通り。

(2) 8 チームを 4 チームずつに分ける分け方は、

$\dfrac{{}_8C_4}{2}$ 通り。それぞれで 1 回戦の組み合せは 3 通りずつあるので、求める場合の数は、

$\dfrac{{}_8C_4}{2}\cdot 3^2 = 315$ 通り。

(3) 4 チームずつに分けるとき、1 位と 2 位のチームが同じグループに入り、3 位のチームが別のグループになる分け方は、${}_5C_2$ 通り。したがって、求める場合の数は、${}_5C_2 \cdot 3^2 = 90$ 通り。

また、同じものを含む円順列・数珠順列も、煩雑なものは避け、すべてを書き出せる程度のものを扱う。

例 1.　a, b, c, d, e を円形に並べる（平面上の回転で重なるものは同一視する）とき、並べ方の総数は、

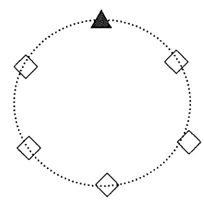
$\dfrac{5!}{5}$ (or　4!) $= 24$ 通り

例 2.　a, b, c, d, e を数珠状に繋ぐ（平面上の回転、及び裏返しで重なるものは同一視する）とき、繋ぎ方の総数は、例 1 で裏返して重なるものを同一視して

$\dfrac{24}{2} = 12$ 通り

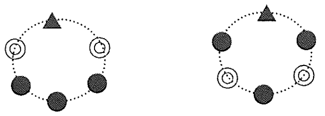
例 3.　●, ●, ●, ◎, ◎, ▲を円形に並べるとき、並べ方の総数は、▲を固定して考えて、

$\dfrac{5!}{3!2!}$ (or ${}_5C_2$) $= 10$ 通り。

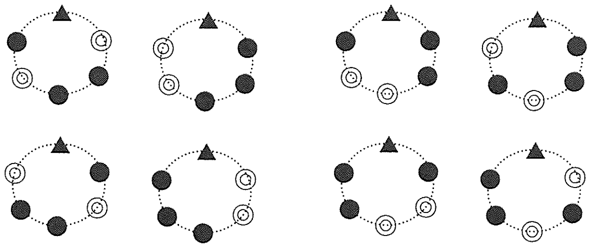


例 4.　●, ●, ●, ◎, ◎, ▲を数珠状に繋ぐとき、繋ぎ方の総数は、例 3 で線対称なものは 2 通りであるから、$\dfrac{10+2}{2} = 6$ 通り。

Cf)例3で、線対称
なものは、右の
2通り。



また、残りの8通りは裏返すと同じものがある。



問2. 互いに同形なガラス玉5個、互いに同形なガラ
ダイヤモンド玉4個、表裏のあるペンダント1個
のうちの幾つかを繋いで首飾りを作る。
次の各場合で、繋ぎ方はそれぞれ何通りあるか。

(1) ペンダント1個, ガラス玉3個、ダイヤモンド玉2個
(2) ガラス玉3個、ダイヤモンド玉2個
(3) ガラス玉3個、ダイヤモンド玉3個
(4) ガラス玉5個、ダイヤモンド玉4個

解答例)

(1) ペンダントを固定して考えて、

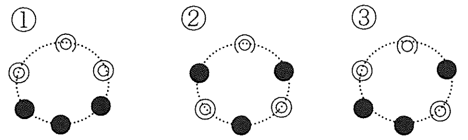
$\dfrac{5!}{3!2!}$ (or ${}_5C_2$) = 10　通り。

(2) ガラスを●、ダイヤモンドを◎で表わして、次の 2 通り。

Cf)　◎1個を固定して考えて、残りの並べ方は $\dfrac{4!}{3!}$ (or ${}_4C_1$) = 4 通り。一つの並べ方で、固定した◎の位置に、◎を回して持ってくる方法は、動かさない場合を含めて2通りずつあり、それらが別のものと数えられているので、これらを同一視して、$\dfrac{4}{2}=2$ 通り。これらはいずれも線対称であるから、求める繋ぎ方も2通り。

(3) 次の3通り。

①　②　③



Cf)◎1個を固定して考えて、残りの並べ方は、

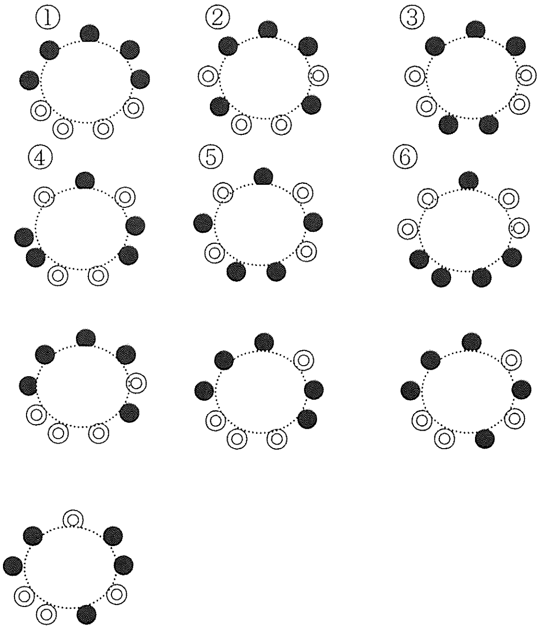
$\dfrac{5!}{2!3!}$ (or ${}_5C_2$) = 10 通り。

一つの並べ方で、固定した◎の位置に、◎を回して持ってくる方法は、動かさない場合を含めて3通りずつあり、◎と●が交互に並んでいるもの(図の②)以外は、それぞれ別のものと数えられている。

従って円形に並べる並べ方の総数は、$\dfrac{10-1}{3}+1=4$ 通り。

裏返したときに同じものになるのは線対称なものであり、(図の①と②の) 2通りあるので、数珠状に繋ぐ繋ぎ方の総数は、$\dfrac{4+2}{2}=3$ 通り。

(4) 次の10通り。



Cf)●1個を固定して考えて、残りの並べ方は、

${}_8C_4$ 通り。一つの並べ方で、固定した●の位置に、●を回して持ってくる方法は、動かさない場合を含めて5通りずつあり、これらはそれぞれ別のものと数えられている。従って円形に並べる並べ方の総数は、$\dfrac{{}_8C_4}{5}$ 通り。

このうち裏返しても同じである線対称なものは、右側の4か所に●2つ入れると考えて、

${}_4C_2$ 通り (図の①~⑥)。

よって、数珠状に繋ぐ繋ぎ方の総数は、

$\dfrac{\dfrac{{}_8C_4}{5}+{}_4C_2}{2}=10$ 通り。

(2) 確率

確率について通常通り扱い(教材例は省略)、その後に、電卓等を利用可として、次のようなものを取り上げる。

問1. ある工場で機械A, B, Cをそれぞれ使って同一の製品を作っている。機械A, B, Cが不良品を作る確率はそれぞれ30%、20%、10%である。また、機械Aで製品の40%を、B, Cでそれぞれ製品の30%を作っている。

今、製品全体から無作為に1個選び検査したところ不良品であった。この不良品が機械Aの製品である確率を求めよ。

解答例)

100個の製品があるとき、その内訳は、

A　40個、そのうちの不良品は12個

B　30個、そのうちの不良品は6個

C　30個、そのうちの不良品は3個

従って、求める確率は、$\dfrac{12}{12+6+3}=\dfrac{4}{7}$

問2. 1年を365日として次の確率を求めよ。

(1) ある兄弟2人の誕生日が同じ月日である確率

(2) ある5人家族で、誕生日が互いに異なる(5人とも別々の)月日である確率

(3) 40人のクラスで、同じ誕生日の人がいる確率

解答例)

(1) 兄弟を順に考えて、弟が兄と同じなので、

$\dfrac{365\cdot 1}{365^2}=\dfrac{1}{365}\fallingdotseq 0.0027$

(2) 5人を順に考えて、誕生日が異なるから、

$\dfrac{365\cdot 364\cdot 363\cdot 362\cdot 361}{365^5}\fallingdotseq 0.9729$

(3) 40人の誕生日が互いに異なる場合の余事象の確率であるから、順列的に考えて、

$1-\dfrac{365\cdot 364\cdots 326}{365^{40}}\fallingdotseq 1-0.1088=0.8912$

問3. ある中高6年制の学校は、初めの3年間は1学年120人で3クラス、後の3年間は40人新たに入学し1学年160人で4クラスであり、毎年クラス分けは無作為に行われている。

(1) A、B君は同じ学年の生徒で、ともに中学から入学した。この2人が6年間で一度も同じクラスにならない確率を求めよ。

(2) 6年間で、中学から入学したA君が、中学から入学した同じ学年の人全員と、1度は同じクラスになる確率を求めよ。

解答例)

(1) Aを固定して考えて、中学のある学年でBがAと違うクラスになる確率は$\dfrac{80}{119}$。高校時代も同様に考えて、求める確率は、$\left(\dfrac{80}{119}\right)^3\left(\dfrac{120}{159}\right)^3\fallingdotseq 0.1306$

(2) (1)より、AがBと6年間で一度は同じクラスになる確率は、$1-\left(\dfrac{80}{119}\right)^3\left(\dfrac{120}{159}\right)^3$

よって、求める確率は、

$$\left\{1-\left(\frac{80}{119}\right)^3\left(\frac{120}{159}\right)^3\right\}^{119}\fallingdotseq(0.8694)^{119}\fallingdotseq\frac{6}{10^8}\fallingdotseq 0$$

問4. (ポーカーの確率)

ジョーカーの無いトランプ52枚から5枚取った時、ポーカーの役ができている確率を求めよ。

ただし、ストレートは1〜5、2〜6、・・・、13〜4の13通りあるものとする。

解答例)

『1ペア』

$$\frac{13\cdot{}_4C_2\cdot{}_{12}C_3\cdot 4^3}{{}_{52}C_5}=\frac{2^5\cdot 11}{7^2\cdot 17}=\text{約}42.26\%$$

『2ペア』

$$\frac{{}_{13}C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_4C_2\cdot 44}{{}_{52}C_5}=\frac{2\cdot 3^2\cdot 11}{5\cdot 7^2\cdot 17}=\text{約}4.75\%$$

『3カード』

$$\frac{13\cdot{}_4C_3\cdot{}_{12}C_2\cdot 4^2}{{}_{52}C_5}=\frac{2^3\cdot 11}{5\cdot 7^2\cdot 17}=\text{約}2.11\%$$

『ストレート』(数が1〜5、2〜6、・・、13〜4)

$$\frac{13\cdot 4^5-13\cdot 4}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{2^2\cdot 7^2}=\text{約}0.51\%$$

『フラッシュ』(全部同じマーク)

$$\frac{{}_{13}C_5\cdot 4-13\cdot 4}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}=\text{約}0.20\%$$

『フルハウス』（１ペア＆３カード）

$$\frac{13\cdot{}_4C_3\cdot 12\cdot{}_4C_2}{{}_{52}C_5}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7^2\cdot 17}=約0.14\%$$

『４カード』 $\dfrac{13\cdot 48}{{}_{52}C_5}=\dfrac{1}{5\cdot 7^2\cdot 17}=約0.024\%$

『ストレートフラッシュ』

$$\frac{4\cdot 13-4}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{5\cdot 7^2\cdot 13\cdot 17}=約0.002\%$$

『ロイヤルストレートフラッシュ』（数が 10〜1 で、同じマーク）

$$\frac{4}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13\cdot 17}=約0.00015\%$$

なお、役ができていない確率は、

$$\frac{{}_{13}C_5\cdot 4^5-{}_{13}C_5\cdot 4-13\cdot 4^5+13\cdot 4}{{}_{52}C_5}$$

$$=\frac{({}_{13}C_5-13)(4^5-4)}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{2}=50\%\quad !!!$$

問 5. １つのサイコロを何回か投げて、最後に出た目の数を得点とするゲーム（出来るだけ得点の多い方がよい）を行う。

最大６回まで投げられるとき、どのような戦術（何回目に何が出たらそこでうち切るか）をとればよいか。（実際のゲームでは「勝負をかける」ときがあるかもしれないが、確率的には、平均得点（期待得点）が高くなる戦術を採るべきである。）

解答例）

１回投げたときの出た目の平均は$\dfrac{7}{2}=3.5$

よって、残り１回のとき４以上が出たら止める{戦術①}

戦術①で行うとき、その２回の平均得点は、

$$\frac{3.5\cdot 3+4+5+6}{6}=\frac{17}{4}=4.25$$

よって、残り２回のとき、５以上なら止める{戦術②}

戦術①②で行うとき、その３回の平均得点は、

$$\frac{4.25\cdot 4+5+6}{6}=\frac{14}{3}\fallingdotseq 4.6$$

よって、残り３回のときも、５以上なら止める{戦術③}

戦術①②③で行うとき、その４回の平均得点は、

$$\frac{\frac{14}{3}\cdot 4+5+6}{6}=\frac{89}{18}<5$$

よって、残り４回のときも、５以上なら止める{戦術④}

戦術①②③④で行うとき、その５回の平均得点は、

$$\frac{\frac{89}{18}\cdot 4+5+6}{6}=\frac{277}{54}>5$$

よって、残り５回のとき、６なら止める{戦術⑤}

以上より、最大６回まで投げられるときの戦術は、

１回目（後５回投げられる）は６が出たら止める。

2〜４回目（後２回以上投げられる）は、

５以上なら止める。

５回目（後１回投げられる）は４以上なら止める。

（ちなみに、この戦術の時の平均得点は、

$$\frac{\frac{277}{54}\cdot 5+6}{6}=\frac{1709}{324}\fallingdotseq 5.27$$ である。）

問 6. 『ビンゴゲーム』（5×5 の 25 マスのカードの、中央のマス以外に１つずつ数が書かれている。順に読み上げられる数で、縦、横、斜めに５個並んだら上がり。ただし、中央のマスは常に読み上げられたものとしてよい。また、カードの１列目には 1〜25 の内の５数が無作為に書かれており、２列目以降もそれぞれ、16〜30、31〜45、46〜60、61〜75 の数が書かれている）について、①４個目、②5 個目、③6 個目、④7 個目の数が読み上げられた時にビンゴ（上がり）になる確率を求めよ。

解答例）

カードの数を右のように固定して考える。

1	16	31	46	61
2	17	32	47	62
3	18	Free	48	63
4	19	33	49	64
5	20	34	50	65

４数でビンゴとなる確率は、

$$\frac{4}{{}_{75}C_4}=\frac{2}{25\cdot 37\cdot 73\cdot 9}\fallingdotseq 0.0000033$$ （30 万分の 1）①

また、５数でビンゴが出来上がっている（ちょうど５回目でなくても良い）確率は、中央の Free を含む場合と含まない場合を考えて、

$$\frac{4\cdot 71+8}{{}_{75}C_4}=\frac{2}{5\cdot 37\cdot 9\cdot 71}\fallingdotseq 0.000017$$

よって、ちょうど5数目でビンゴとなる確率は、

$$\frac{2}{5\cdot37\cdot9\cdot71}-\frac{2}{25\cdot37\cdot73\cdot9}$$

$\fallingdotseq 0.000014$ （10万分の1）②

同様に、6数でビンゴが出来上がっている確率は

$$\frac{4\cdot{}_{71}C_2+8\cdot70}{{}_{75}C_6}=\frac{10}{37\cdot73\cdot71}\fallingdotseq 0.000052$$

よって、ちょうど6数目でビンゴとなる確率は、

$$\frac{10}{37\cdot73\cdot71}-\frac{2}{5\cdot37\cdot9\cdot71}$$

$\fallingdotseq 0.000035$ （3万分の1）③

同様に、7数でビンゴが出来上がっている確率は

$$\frac{4\cdot{}_{71}C_3+8\cdot{}_{70}C_2}{{}_{75}C_7}=\frac{2\cdot7^2\cdot11}{3\cdot15\cdot37\cdot73\cdot71}\fallingdotseq 0.00012$$

よって、ちょうど7数目でビンゴとなる確率は、

$$\frac{2\cdot7^2\cdot11}{3\cdot15\cdot37\cdot73\cdot71}-\frac{10}{37\cdot73\cdot71}$$

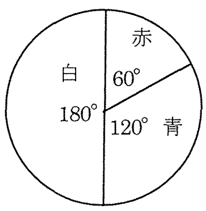
$\fallingdotseq 0.000073$ （1万分の1）④

注）ビンゴゲームでは、読み上げられた数が10数個になった途端にあがりが急激に増える。その変わり目まで確率を求めたかったのだが、まだ7数までしか求めていません。この後の確率を求めたら教えてください。

(3) 連続変量の確率

次のような面積比による確率は常識的であり、日常でも見かける。

例1. 右のような赤、青、白の3色で色分けされた回転盤にダーツを無作為に投げるとき各色に矢が当たる確率は、面積比を考えて、



赤$\frac{1}{6}$、青$\frac{1}{3}$、白$\frac{1}{2}$

線分の長さや面積の比による確率について取り上げる。開区間の長さや面積を閉区間として求めても、全体の比率（確率）に影響が出ないとして、生徒は違和感を持たない。

問1. 四捨五入して g（ｸﾞﾗﾑ）単位で表示する秤がある。この秤で，AとBの重さを測ったら、それぞれ26 g 、24 g であった。AB両方を一緒に秤に載せたとき、50 g と表示される確率を求めよ。

解答例）

真の重さを a,b とすると、

$25.5\leqq a<26.5$ 、$23.5\leqq b<24.5$　①　であり、

この範囲のどの値を取ることも同様に確からしい。

また、50 g と表示される範囲は、$49.5\leqq a+b<50.5$

これより、$-a+49.5\leqq b<-a+50.5$　②

ab 平面で、①の範囲での、②の面積の比を考える。

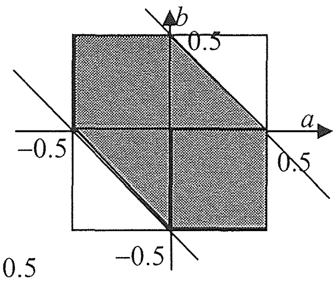
平行移動しても面積は変わらないので、

①より、

$-0.5\leqq a<0.5$ 、

$-0.5\leqq b<0.5$

②より、$-a-0.5\leqq b<-a+0.5$



よって図で面積比を考えて、求める確率は$\frac{3}{4}$

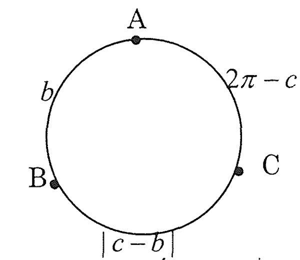
問2. 一つの円周上に3点を無作為に取るとき,その3点を結んで作った三角形が鋭角三角形となる確率を求めよ。

解答例）

3点をA,B,Cとし、半径1の円で考える。

Aを円周上に固定し、反時計回りに考えた弧AB、ACの長さとB,Cの位置は1対1に対応する。弧の長さを順に、b,c すると、$0\leqq b,c<2\pi$ であり、

無作為にB,Cをとるとき、b,c がどの値を取ることも同様に確からしい。



鋭角三角形となるのは、

$b\leq c$ のとき、

$b<\pi,c-b<\pi,2\pi-c<\pi$

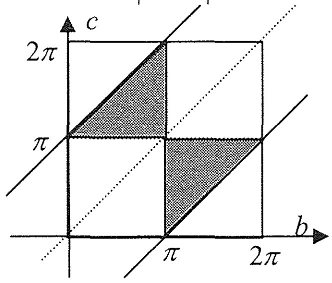
すなわち、$b<\pi,c<b+\pi,\pi<c$

$b\geq c$ のとき、

$c<\pi,b-c<\pi,2\pi-b<\pi$

すなわち、

$c<\pi,b-\pi<c,\pi<b$



よって、面積比を考えて求める確率は$\frac{1}{4}$

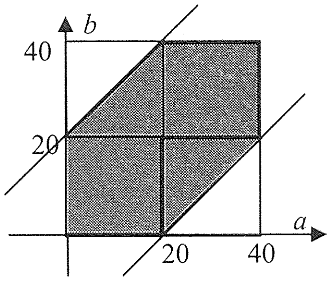
問3.　A君とB君は同じ書店でそれぞれ20分間本を探す。2人がともに、4時から4時40分の間の勝手な時間に書店に来るとき、2人が出会う(同時に書店にいる)確率を求めよ。

解答例)

A,B君が書店に来る時刻を4時a分、4時b分とすると、$0 \le a, b \le 40$　であり、この範囲でa, bがどの値を取ることも同様に確からしい。

2人が同時に店にいる条件は、$|b-a| \le 20$

これより、$-20 \le b-a \le 20$，
$a-20 \le b \le a+20$
したがって、面積比を考えて、求める確率は
$\frac{3}{4}$



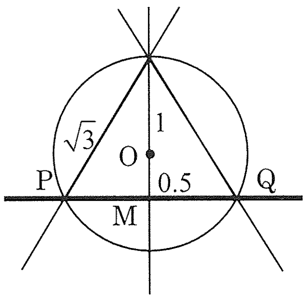
問4.　(ベルトランの問題)

平面上に半径1の円がある。この円に向かって直線を無作為に投げるとき、円内にある線分の長さが$\sqrt{3}$以下となる確率を求めよ。

ただし、直線を投げて円と2点で交わらない場合は投げ直すものとする。(円と直線が2点で交　わる場合だけで確率を考える。)

解答例)

半径1の円に内接する正三角形の一辺は$\sqrt{3}$であるから、右図の直線が条件を満たす直線の限界となる。
円の中心をO、円と直線の交点をP,Q、弦PQの中点をMとする。

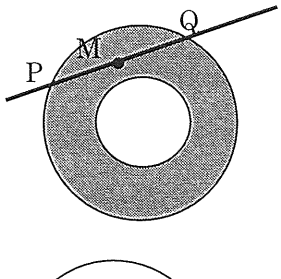


$\boxed{解1}$

弦の中点Mに注目して、Mが円内のどの位置にくるかが同様に確からしい考える。

PQ$\le \sqrt{3}$となる確率は、面積比を考えて、

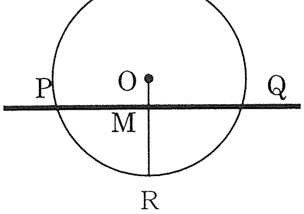
$$\frac{\pi - \frac{1}{4}\pi}{\pi} = \frac{3}{4}$$



$\boxed{解2}$

解1と同様に弦の中点Mに注目する。
半径ORをとり、投げた直線をOの周りに回転して、図のように、MがOR上にくるようにする。
このとき、MがOR上のどの位置に来るかが同様に確からしいと考えて、PQ$\le \sqrt{3}$となる確率は、

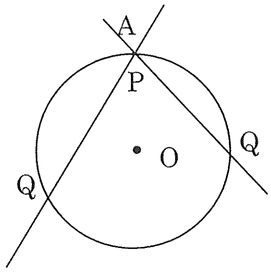
線分の長さの比より、$\dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$



$\boxed{解3}$

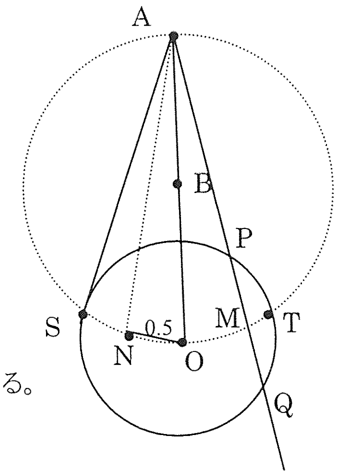
円周上に点Aをとり、投げた直線をOの周りに回転して、PとAを重ねるとき、Qが円周上のどの位置にくるかが同様に確からしいと考える。
PQ$\le \sqrt{3}$となる確率は、円周の長さの比より、

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{2\pi} = \frac{2}{3}$$



$\boxed{解4（解3の発展）}$

円外に点Aをとり、線分OAの中点をBとする。さらに、OAを直径とする円Bと円Oとの交点をS,Tとする。
投げた直線を、Oのまわりに回転して、Aを通るようにするとき、弦PQの中点Mは円Bの弧ST上にある。
Mが弧ST上のどの位置にくるかが同様に確からしいと考える。



円Bの弧ST上に、ON=$\frac{1}{2}$である点Nをとり、∠SAO=α，∠NAO=βとすると、

PQ$\le \sqrt{3}$となる確率は、

$$\frac{2 \cdot \widehat{SN}}{\widehat{ST}} = \frac{\widehat{SN}}{\widehat{SO}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$$

この値は$\frac{2}{3}$から0の間の任意の値になり得る。

なお、AO=dとすると、$\sin\alpha = \frac{1}{d}, \sin\beta = \frac{1}{2d}$

$d=1$のとき、$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{6}$、確率は$\frac{2}{3}$

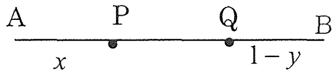
$d \to \infty$のとき、$\alpha = \beta$、確率の極限は0である。

問5.　１本の線分を、勝手な長さに三分割したとき、
その３つの線分で三角形ができる確率を求めよ。

解答例)

もとの線分をAB＝１とし、３分割する点をP, Q、

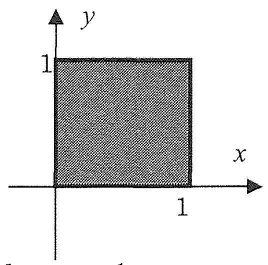
AP＝x、AQ＝yとする。



解1

x, yは無関係に、$0 \le x, y \le 1$　を満たす２数であると考える。

このとき、点(x, y)は右図の正方形上の点であり、これらのどの点となるかが同様に確からしい。

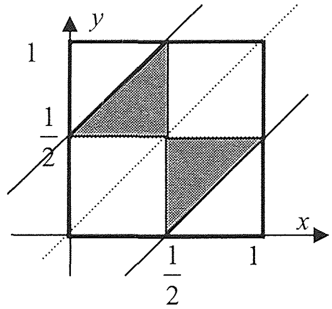


三角形ができる条件は、

$x \le y$のとき、$x < \frac{1}{2}, y - x < \frac{1}{2}, 1 - y < \frac{1}{2}$

$x \ge y$のとき、$1 - x < \frac{1}{2}, x - y < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}$

これらを図示すると右図。
面積比を考えて、
求める確率は$\frac{1}{4}$

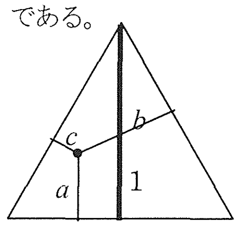


解2

解１と同様に、x, yは無関係に、$0 \le x, y \le 1$　を満たす２数であると考える。このとき、３分割した線分の長さを、左から順に、a, b, cとすると、

$a + b + c = 1$　（a, b, cは正の数）　である。

ここで、高さが１の正三角形を考えると、三角形内の点から各辺への垂線の長さの和は１となるので、右図のように、それらの長さをa, b, cとおけば、



(a, b, c)と正三角形内の点とは１対１に対応（(a, b, c)に対して(x, y)は、x, yの大小で、２通りずつ対応する）し、

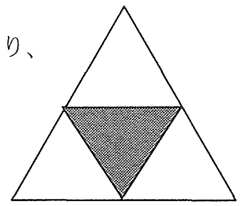
３分割での点が正三角形内のどの点に対応するかが同様に確からしい。

三角形ができるのは、

$a < \frac{1}{2}, b < \frac{1}{2}, c < \frac{1}{2}$のときであり、

右図の影の部分。

従って求める確率は$\frac{1}{4}$



（参考）４分割だと、四面体で考えて、$1 - \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$。

解3(発展)

『初めにPを決めてAPを切り取り、残りの部分にQをとり分割する』と考えると、x, yは、

（ア）$0 < x < 1$　かつ　②$x < y < 1$　　を満たす。

（xは①の範囲で無作為に、yはxの値によって定まる②の範囲で、無作為に定まる。）

一方、３分割した線分で三角形ができる条件は、

（ァ）$0 < x < \frac{1}{2}$　　かつ　（ィ）$\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} + x$

xが（ァ）を満たすことをX、yが（ィ）を満たすことをYで表わすと、求める確率は、

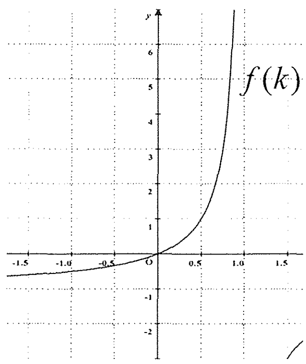
$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P_X(Y)$

ここで、①と（ァ）より、線分の長さの比を考えて、

$P(X) = \frac{1}{2}$

また、$x = k$　$(0 < k < \frac{1}{2})$のときに、三角形ができる確率を$f(k)$とすると、

②と（ィ）より、線分の長さの比を考えて、



$f(k) = \frac{k}{1-k} = -1 - \frac{1}{k-1}$

このグラフとk軸の間の部分の面積が確率であり、

kが$0 < k < \frac{1}{2}$のどの値となるかが等確率なので、

$$P_X(Y) = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{-1 - \frac{1}{k-1}\right\} dk}{\frac{1}{2}} = 2\left[-k - \log_e (k-1)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$= 2\left\{\log_e 2 - \frac{1}{2}\right\}$

よって、求める確率は、

$P(X \cap Y) = P(X)\cdot P_X(Y) = \log_e 2 - \frac{1}{2} \fallingdotseq 0.193$

問 6. （問 1 の発展）

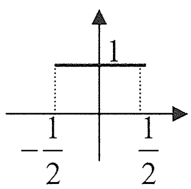
四捨五入して g 単位で表示する秤がある。ある品物の重さを、一度に乗せられないため3個に分割して測定し、その和で求めた。このときの誤差（＝測定値－真の値）の確率分布を求めよ。

解答例）

秤で 1 回測った時の誤差を X とすると、X は

$-\frac{1}{2} \le X < \frac{1}{2}$ のどの値を取ることも同様に確からしいと考えられるので、X の確率分布は一様分布であり、その確率密度関数 $f(x)$ は、

$f(x) = 1 \quad (-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2})$



である。

3個に分けて測った時の誤差の和 Z は、1,2,3 個目の誤差を順に A, B, C とすると、$Z = A + B + C$ であり、

A, B, C の分布は上の一様分布である。

まず、$A + B = Y$ として、Y の確率分布を求める。

$-1 \le Y < 1$ 　であり、この範囲内の値 y に対して、

Y の値が y 以下である確率 $P(Y \le y)$ を $G(y)$ とすると、導関数 $G'(y)$ が Y の確率密度関数 $g(y)$ である。

y, a を固定して考えて、$Y = a + B \le y$ となる B の範囲は、$-\frac{1}{2} \le B \le y - a$ -----① 　であり、

B の分布は上の一様分布であるから、

$P(-\frac{1}{2} \le B \le y - a) = y - a + \frac{1}{2}$ -----②

ここで、$-\frac{1}{2} \le B < \frac{1}{2}$ であるから、

①において、$-\frac{1}{2} \le y - a < -\frac{1}{2}$

これより、$y - \frac{1}{2} < a \le y + \frac{1}{2}$

よって、y に対して a の取りうる値の範囲は、

$y \le 0$ のとき、$-\frac{1}{2} \le a \le y + \frac{1}{2}$

$y \ge 0$ のとき、$y - \frac{1}{2} \le a < \frac{1}{2}$

これらの範囲の任意の a に対して $Y \le y$ となる B の確率が②であるから、

$y \le 0$ のとき、

$$G(y) = P(Y \le y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} (y - a + \frac{1}{2})da$$

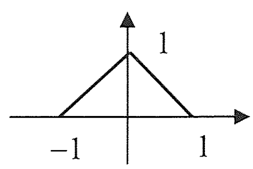
$$= \left[-\frac{1}{2}(y - a + \frac{1}{2})^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y+1)^2$$

したがって、$g(y) = G'(y) = y + 1 \quad (-1 \le y \le 0)$

対称性より、$y \ge 0$ のときは

$g(y) = -y + 1 \quad (0 \le y < 1)$

よって Y の確率分布は右図。



さて、$Z=Y+C$、$-\dfrac{3}{2}\le Z<\dfrac{3}{2}$ であり、この範囲の z に対して、$P(Z\le z)=H(z)$ とすると、導関数 $H'(z)$ が Z の確率密度関数 $h(z)$ である。

z, c を固定して考えて、$Z=Y+c\le z$ となる Y の範囲は、$-1\le Y\le z-c$ ----③であり、
Y の分布は上の三角形分布であるから、

$$P(-1\le Y\le z-c)=\begin{cases} z-c\le 0 \text{のとき } \dfrac{1}{2}(z-c+1)^2 \\ z-c\ge 0 \text{のとき} 1-\dfrac{1}{2}(1-z+c)^2 \end{cases}$$

----④

ここで、$-1\le Y<1$ であるから、
③において、$-1\le z-c<1$
これより、$z-1<c\le z+1$

よって、z に対して c の取りうる値の範囲は、

$-\dfrac{3}{2}\le z\le -\dfrac{1}{2}$ のとき $-\dfrac{1}{2}\le c\le z+1$

$-\dfrac{1}{2}\le z\le \dfrac{1}{2}$ のとき $-\dfrac{1}{2}\le c<\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}\le z<\dfrac{3}{2}$ のとき $z-1\le c<\dfrac{1}{2}$

これらの範囲の任意の c に対して、$Z\le z$ となる Y の確率が④であるから、

$-\dfrac{3}{2}\le z\le -\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$H(z)=P(Z\le z)=\int_{-\frac{1}{2}}^{z+1}\frac{1}{2}(z-c+1)^2\,dc$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(z-c+1)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{z+1}=\frac{1}{6}(z+\frac{3}{2})^3$$

$-\dfrac{1}{2}\le z\le \dfrac{1}{2}$ のとき、

$$H(z)=P(Z\le z)=$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{z}\left\{1-\frac{1}{2}(1-z+c)^2\right\}dc+\int_{z}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(z-c+1)^2\,dc$$

$$=\left[c-\frac{1}{6}(1-z+c)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{z}+\left[-\frac{1}{6}(z-c+1)^3\right]_{z}^{\frac{1}{2}}$$

$$=z+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}(z-\frac{1}{2})^3-\frac{1}{6}(z+\frac{1}{2})^3$$

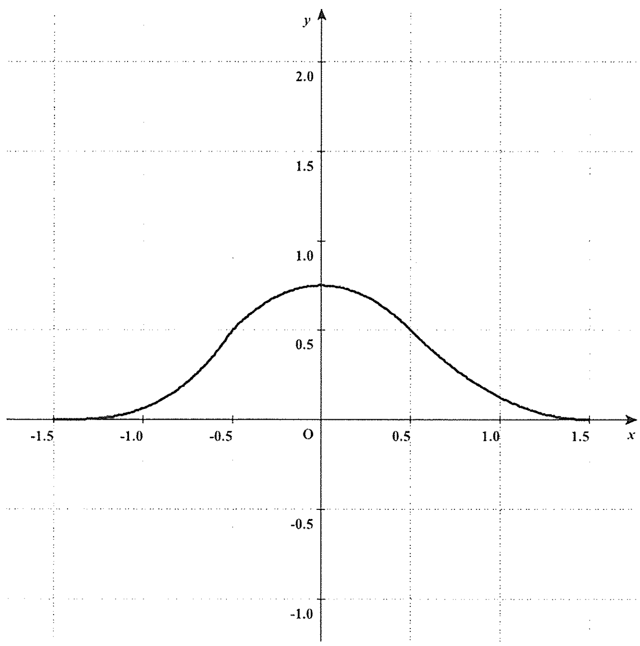
$h(z)=H'(z)$ であり、対称性も考えて、

$-\dfrac{3}{2}\le z\le -\dfrac{1}{2}$ のとき、$h(z)=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{3}{2})^2$

$-\dfrac{1}{2}\le z\le \dfrac{1}{2}$ のとき、$h(z)=-z^2+\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{2}\le y<\dfrac{3}{2}$ のとき、$h(z)=\dfrac{1}{2}(z-\dfrac{3}{2})^2$

３個に分けて測った時の誤差の和 Z の確率分布は下図の通り。



(2011　鈴木)