創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－大学での学びにつながる数学教材の開発と普及－

（３年計画の３年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科

松嵜　昭雄・駒野　　誠・更科　元子

鈴木　清夫・深瀬　幹雄・牧下　英世

町田多加志

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

—大学での学びにつながる数学教材の開発と普及—

（3年計画の3年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
松嵜　昭雄・駒野　　誠・更科　元子・
鈴木　清夫・深瀬　幹雄・牧下　英世・
町田多加志

要約

昨年度まで指定を受けていたSSH研究の中でおこなった卒業生対象のアンケート結果から，大学での学びにつながる中等教育における数学として，「統計」と「微分方程式」が重要であることが分かった。本年度より新規指定を受けたSSH研究では，これまでの取り組みを継続しつつ，サイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組みもおこなっている。

本年度は，本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムの策定へ向け，「統計」と「微分方程式」の内容については，これまでに開発した教材について学年進行に合わせた内容を配置するとともに，「統計」と「微分方程式」以外の内容についても，大学の学びにつながるような数学教材の開発と実証的な考察を試みた。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携，統計，微分方程式

1．はじめに

本校数学科では，筑波大学の数学関係者や他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の検討をおこなっている。昨年度まで指定を受けていた「スーパーサイエンスハイスクール(以下SSHと略)」研究の中でおこなった卒業生対象のアンケートの分析から，大学で学ぶ数学をスムーズに理解するには，高校までにある程度，「統計」と「微分方程式」の学習が必要であるという結果を得た。そこで，「統計」では「集団に潜む特徴をつかむ」，「微分方程式」では「関数の微小な変化をとらえる」という教材開発方針のもと，指導に関連する項目を策定し，教材開発と実際に授業で実践し，本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへの配置を検討してきた。

3年計画の3年次にあたる本年度は，新規指定を受けたSSH事業と連動し，これまでの取り組みを継続しつつ，サイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組みもおこなっている。生徒が自ら学び，そして学びあう場として，大学院生のインターンシップや，本校生徒による近隣小学校におけるワークショップに取り組んでいる。本稿では，中高一貫校である本校の特色を活かし，大学での学びにつながる教材開発とその実証的な考察について報告する。

2．研究の流れ

「統計(Statistics)」と「微分方程式(Differrential equation)」に関連する項目として策定したものは，以下の通りである。

S：集団に潜む特徴をつかむ
- S1－1　資料の整理
- S1－2　集団を特徴づける値
- S1－3　確率分布と推測の考え方
- S1－4　相関係数と回帰直線
- S2－1　推定・検定
- S2－2　主成分分析

D：関数の微小な変化をとらえる
- D1－1　関数の微小な変化
- D2－1　基本的な微分方程式
- D2－2　微分方程式の応用

（注：S1とD1は生徒全員に学ばせたい内容，S2とD2は発展的な内容と考えている）

上記の項目は指導要領に含まれているとは限らず，

<Project research> Development of Teaching Materials, Method and Curriculum: Focus on Differential Equation and Statistics Connecting to the Learning in Upper Education

また，新たに指導時間を割くことは困難である。したがって，実際の指導においては，現行の指導内容に絡めてこれらを扱う必要がある。そこで，昨年度作成したカリキュラムへの配置を再検討するとともに，「統計」と「微分方程式」以外の内容についても教材開発をおこない，カリキュラムへの配置を検討した。

3．本年度の研究

3年計画の3年次にあたる本年度は，これまでの2年間で検討してきた「統計」と「微分方程式」の教材のカリキュラム配置の整理・検討をおこなった。また，「統計」と「微分方程式」以外の内容についての教材も開発し，大学での学びにつながる数学の内容を整理の視点とした。今回，数学の内容として想定した項目は，下記の7つである。

「A. 代数(Algebra)」　「An. 解析(Analysis)」
「G. 幾何(Geometry)」　「P. 確率(Probability)」
「D. 微分方程式(Differential Equation)」
「S. 統計(Statistics)」　「O. その他(Others)」

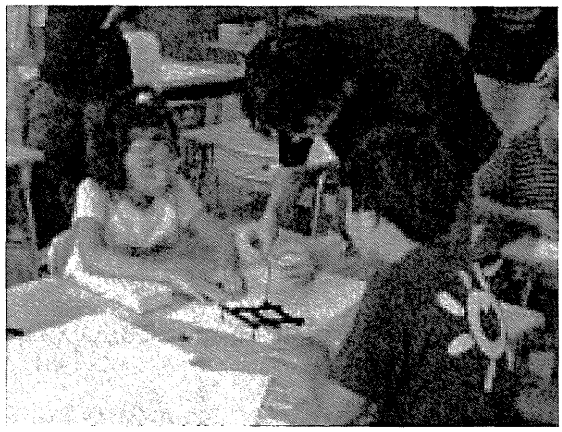
各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。つまり，下記のように項目は記される。

(例)　an1.　2元1次方程式とその応用
　中学1年の「解析」
　　S3.　主成分分析入門
　高校3年の「統計」

3.1. 新SSHの取り組み

本年度より新規採択されたSSHの研究テーマは，「国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発ー中高大院の連携を生かしたサイエンスコミュニケーション能力育成の研究ー」となっている。数学科では，これまで取り組んできた研究の深化を図るとともに，中学校のカリキュラムの開発をさらに進め，大学への学びへつながる数学教材を配置した，中高一貫のカリキュラムの開発を目途としている。

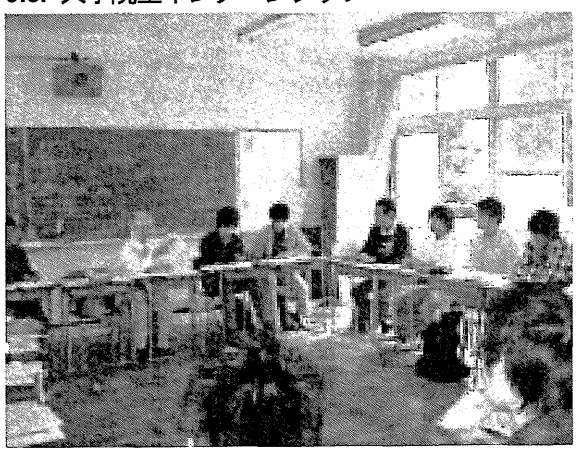
SSHの研究のキーワードとなっている「サイエンスコミュニケーション」の能力育成に対する取り組みとしては，8月21日に近隣の目黒区立駒場小学校の「サマースクール」の講座に「高校 LEGO 同好会」の生徒が参加し，小学生の児童に対してワークショップを開いた。講座「レゴを使って絵を描こう」には，8名の児童が参加し，同好会の生徒5名が指導にあたった。ワークショップの前に，生徒はレゴを使った絵を描く仕組み(機構)を作成し，教材作成ならびに指導案の検討をおこなった。



3.2. 教員養成GP

筑波大学大学院教育研究科(MC)の大学院生が，より良い授業実践(Good Practice)を目指し，教科教育に特化した実習をおこなう。筑波大学の附属学校のうち，高等学校段階のある坂戸高，附属高，そして本校が協力している。本年度は，この取り組みの初年度にあたり，MC2年生が各校に1名ずつ割り当てられ実習をおこなった。1学期には大学において指導案を練り，2学期のはじめに単元の導入部分の授業をおこなう。そして，3学期には大学においてビデオ撮りした授業の様子等を見ながら授業分析をおこなう。本校では，高校2年生の単元「微分・積分」の導入を意識した教材づくりを提案し，指導案についての検討や研究協議会をおこなった。

3.3. 大学院生インターンシップ



筑波大学大学院数理物質科学研究科(DC)の授業「数学インターンシップ」(1単位)を履修している，DCの大学院生が，高校2年生の総合学習「ゼミナール」に参加し，生徒とともにディスカッションをおこなう。数学の研究が専門である大学院生とともに学び合いを通じて，サイエンスコミュニケーション能力育成と向上が期待される。

3.4. 本年度開発した教材

本稿では,本年度開発した教材について紹介する。各教材名の前のインデックスは，記述の項目の分類によるものである。

a1－1. 整数
a1－2. 有理数
A3. 置換と正多面体群
an1. 2元1次方程式とその応用
An1. 2次関数
g2. チェバ・メネラウスの定理
g3－1. 立方体の切断
g3－2. 反転法
D2. グラフ描画の方法－テクノロジーへの挑戦－
O2. 有限世界の数学
Of. 4元数を高校数学へ

なお，Of.については，吉井洋二氏(秋田工業高等専門学校)に，執筆を依頼した。

数学科　中学校カリキュラム

2002年度より実施

数学科の目標：いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる。

学年	中学1年		中学2年		中学3年	
単元／開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材
学年の目標	論証を中心に指導する。「答え」至上主義，結果至上主義からの脱却を目指す。生徒同士の『なぜ？』『どうして？』を大切にし，それらの課題を通して自分の考えを表現したり，他を説得したりする方法を身につける。		関数や図形の拡大縮小を題材にして，変化するものをとらえて表現し分析する力を身につける。		中学1，2年での学習の応用，総合として，より複雑な変化の解析を図り，現実の事柄を数学の言葉で表現し，分析していく力を身につける。なお，テーマ学習では中学3年間の学習内容や分析手法を活用して，課題解決に挑戦する。	
授業時間数	週3時間＋年間15時間		週3時間＋年度20時間		週3時間＋年間20時間	
a.代数	学習の目標と入門 （整数の性質①） 正の数・負の数 （正負の数） （文字と式） （単・多項式の計算①） 方程式 （1次方程式） （2元1次連立方程式）	a1－2. 有理数 a1－1 整数 d1. 自然数の和，平方数の和，立法数の和	（整数の性質②） （平方根） （単・多項式の計算②） （展開，因数分解） 2次方程式 （2次方程式①）		（2次方程式②）	＜暗号理論と整数論＞
an.解析	関数 （いろいろな関数） （比例，反比例） （1次関数①）	an1. 2元1次方程式とその応用	2元1次方程式と座標平面 （1次関数②）	d2. グラフや図形の移動・変形	2乗に比例する関数 （2次関数） 総合演習	＜2次関数の発展＞ d3. 立体の体積，球の体積・表面積，放物線と面積 ＜最大・最小＞
g.幾何	平面図形 （平面図形の基礎） 図形の性質 （平行線の性質） 図形の合同 （三角形の合同） いろいろな四角形 （平行四辺形の性質）		相似 （図形の拡大縮小） （三角形の相似） 三平方の定理 （平面図形の計量） 空間図形	g2. チェバ・メネラウスの定理	円 三角形の五心 空間図形	g3－2. 反転法 g3－1. 立方体の切断
p.確率			（確率）	＜シミュレーションを用いた授業＞	（確率）	＜シミュレーションを用いた授業＞
s.統計		s1. 統計の基本	統計	s2. 近似直線 ＜標準偏差＞	（統計）	s3. 正規分布と標準化
o.その他	総合演習				総合演習 課題学習 （個テーマ学習） ※チャレンジ学習 （習熟度別，前後期・週1時間）	

「単元」のうち，（　）の単元は2006年度の報告書に掲載したものや新たに追記したもの。ゴシック体で表記した単元が2007年度のもの。
「開発教材」のうち，＜　＞の教材は2006年度の報告書に掲載したもの。ゴシック体で表記した教材は，本報告書に掲載してあるもの。
中学3年の課題学習のうち，「テーマ学習」は2007年度は開講していない。

数学科　高等学校カリキュラム

2008年度より順次実施

数学科の目標：いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し，その本質を踏まえ，そしてそれらを表現できるようになる。

学年	高校1年		高校2年		高校3年	
単元／開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材
学年の目標	中学で扱ったものをベースにして，実数から複素数，二単力の定理から三角比・余弦定理，2次方程式から高次方程式など，発展や一般化として扱う。関連場面を原題した題材も合わせて扱う。これらを通して，日常必要となる数学の基礎的な知識を身につける。		より複雑な様々な関数についての考察を行う。また，図形の計量について，中学校で学んだ初等幾何的手法の他，解析的な手法や代数的な手法で考察する。これらを通して，事象を数学的に処理する能力を伸ばす。		『数学B』（1数学Ⅰ，Ⅱ，A，Bの補充深化を行う。『数学Ⅲ』，『数学C1』（理科系への進学者を対象とした講座で，『数学Ⅲ』は微分積分を中心に，『数学C1』は行列及び式と曲線を扱う。『数学C2』は経済などの文科系への進学者を意識して確率分布，統計処理を扱う。これらを通じて，それぞれの進路に合わせた能力を伸ばす。	
科目(時数) 授業時間数	「数学Ⅰ」(3単位)＋「数学A」(2単位) 週5時間		「数学Ⅱ」(3単位)＋「数学B」(1単位) 週4時間		「数学Ⅲ」(4単位)，「数学B」(2単位)，「数学C1」(2単位) 「数学C2」(2単位)　※　すべて選択	
A.代数	(実数と複素数) 式の計算 (展開，因数分解) (多項式の除法) 方程式・不等式 (高次方程式)	＜暗号理論と整数論＞	数列 (漸化式(二項定理)) 複素数		行列とその応用「数学C1」 (行列(C1))	A3. 置換と正多面体群
An.解析	図形と計量 (三角比) (三角関数(弧度法)) 2次関数 (2次関数(2次不等式))	＜三角関数表を作る＞ An1. 2次関数 01. 包絡線 ＜直線族の包絡線＞ ＜線分束線を用いた曲線群＞	指数関数と対数関数 (いろいろな関数) 三角関数 微分と積分 (いろいろな関数) (重関数の微分積分)	An2. 円周率の近似 ＜加法定理から導き出される多項式＞ 02. グラフ描画 ＜恒等式＞＜生徒の疑問の問題点＞＜そもそも微分とは何か＞＜導関数の定義の見直し＞＜接触円＞＜導関数を作る＞＜最大最小(極値問題)＞＜導関数のグラフの描き方＞＜微分計算基本公式導出＞＜母関数と微分方程式＞＜オイラーの定理を導く＞＜面積＞＜体積＞	微分「数学Ⅱ」 (微関(Ⅱ)) (微分法(Ⅱ)) 積分「数学Ⅲ」 (積分法(Ⅲ))	03. 微分方程式の応用 ＜包絡線＞ ＜曲線の長さ＞
G.幾何	平面図形		平面・空間ベクトル (ベクトル) 図形と方程式		式と曲線「数学C1」 (式と曲線(C1))	＜極座標での曲線，曲線の長さ＞
P.確率	場合の数 確率	P1－1 組合せの確率モデル P1－2. EBIと確率・統計			確率分布「数学C1」 (確率，確率分布(C2))	P1－1 組合せの確率モデル P1－2. EBIと確率・統計 ＜確率分布と推測の考え方＞
S.統計		S1. 四種重積，相関係数 ＜離散分布の推定・検定＞	統計	S2. 残差分析によるデータ系列の関係分析	統計処理(C2) 資料の整理「数学C2」 重線回帰「数学C2」 推定・検定「数学C2」	S3. 主成分分析入門 ＜推定検定＞
O.その他	集合と論証 総合演習	O1. 4元数を高校数学へ	総合演習 ゼミナール「総合学習(H)」	O4. 4元数を高校数学へ O2. 有理世界の数学	数学Ⅰ・Ⅱ・A・B「数学B」 (数Ⅰ・Ⅱ・A・Bの総合(B)) 総合演習，特別授業「数学B」 総合演習「数学Ⅱ」 特別授業「数学C1」 テーマ研究「総合学習(I)」	O1. 4元数を高校数学へ

「単元」のうち，(　)の単元は2006年度の指導書に掲載したものや新たに追記したもの。ゴシック体で表記した単元が2007年度のもの。
「開発教材」のうち，〈　〉の教材は2006年度の指導書に掲載したもの。ゴシック体で表記した教材は，本指導書に掲載しているもの。
ゼミナールは，高校2年の「総合学習」であり，2007年度は「かぞえる幾何学」を開講。
テーマ研究は，高校3年の「総合学習」であり，研究レポートを作成する。

a1－1. 整数

関連分野：代数分野
高等数学：整数論
対象学年：中学１年生
関連単元：数と式
教 材 名：整数

≪文字式の活用に繋がる整数の教材≫

『文字』を活用することによって数の世界は無限に広がっていく。また、整数の性質は簡明なものから奥深いものまで多岐にわたっており、生徒にとって興味深いものがある。

整数の指導を通して、文字の有用性を認識させ、それを活用できるようにする。

a1－1.1. 素因数分解

(1) 約数、倍数

例１．１２の約数は、1,2,3,4,6,12
１２の倍数は、12,24,36,……
$\rightarrow 12n$ (nは自然数)

例２．２の倍数（偶数）は $2n$ (nは自然数)
奇数は $2n-1$ (nは自然数)

(2) 素数

1より大きい整数で、１とその数以外に約数を持たないものを素数という。また、１より大きい整数で素数以外のものを合成数という。

例３．(エラトステネスのふるい) 100以下の素数は２５個

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

問１．100以下の素数を求めるには、2,3,5,7の倍数を除けばよいのはなぜか？

解) aが100以下の合成数とすると、$a=b\times c$
となる１より大きい整数b,c ($b\leqq c$) がある。
$b>10$とすると、$c>10$だから、$b\times c>100$
となり条件に反するので、$b\leqq 10$。
よって100以下の合成数は、10以下の数の倍数。
従って、10以下の素数は2,3,5,7 だから、これらの倍数を除けば、100 以下の全ての合成数が除かれる。

問１と同様に、自然数xが素数か否かに関して、$x<a\times a$となる自然数aを考えると、xがaより小さい素数の倍数でないなら、xは素数であることがわかる。

問２．次の数が素数か否かを調べよ。
(1) 247　　(2) 337

解) (1) $247<17^2=289$より、13 以下の素数で割ってみると、$247=13\times 19$　　よって、247 は合成数。

(2) $337<19^2=361$より、17以下の素数で割ってみると、いずれも割り切れないので、337は素数。

(3)素因数分解

自然数aのn個の積をa^nと表す。ここのnを指数という。　　$a\times a\times\cdots\times a=a^n$
(n個の積)

自然数を素数の積の形で表すことを素因数分解という。

例４．$12=2\times 2\times 3=2^2\times 3$
$72=2\times 2\times 2\times 3\times 3=2^3\times 3^2$

発展：約数の個数と総和)
12 の約数の個数は、$3\times 2=6$個
約数の総和は、$(1+2+4)(1+3)=28$
72 の約数の個数は、$4\times 3=12$個
約数の総和は、
$(1+2+4+8)(1+3+9)=195$

問３．次の数が素数かどうか調べ、合成数については素因数分解せよ。(電卓利用可)
(1)76　(2)113　(3)667　(4)797
(5)962　(6)1764　(7)1960　(8)3463

解) (1) $76=2^2\cdot 19$
(2)113：(7以下の素数の倍数ではないので) 素数
(3) $667=23\cdot 29$
(4)797：(30未満の素数の倍数ではないので) 素数
(5) $962=2\cdot 13\cdot 37$
(6) $1764=4\cdot 21^2$
(7) $1960=2^3\cdot 5\cdot 7^2$
(8)3463：(60未満の素数の倍数ではないので) 素数

発展：指数法則と0^0)

$a>0$ 、m,n が自然数の時、　$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(＊)

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$　　が成り立つ。

また、$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n \text{ のとき}) \\ 1 & (m=n \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n \text{ のとき}) \end{cases}$ である。

そこで、$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$　と定義すれば、m,n の大小に関わらず、$a^m \div a^n = a^{m-n}$　となる。

上の式で、$m=n$ のときを考えて、$a^0 = 1$　と定める。

さらに、m,n が自然数でないときも(＊)が成り立つと考えると、たとえば、

$a^{0.5} \cdot a^{0.5} = a^{0.5+0.5} = a^1 = a$　となるので、

$a^{0.5}$ は2乗すると a になる数と考えられる。

同様に、$(0.5)^{0.5}$ は2乗すると0.5になる数

$(0.4)^{0.4}$ は5乗すると $(0.4)^2 = 0.16$　になる数

$(0.2)^{0.2}$ は5乗すると0.2になる数

$(0.1)^{0.1}$ は１０乗すると0.1になる数　　であり、指数計算が出来る電卓では、計算して、上の値を表示している。

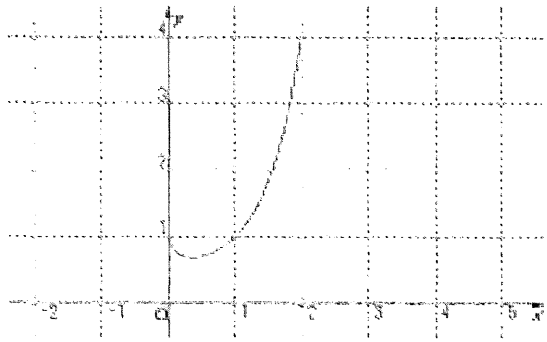
0^0 について、関数的には次の３通りの場合で、x を０に近づけたときの値から考えることが出来る。

①　0^x　　②　x^0　　③　x^x

①の立場では $0^0 = 0$ 、②の立場では $0^0 = 1$　である。

また③では、x がいろいろな値の時の　x^x の値を求めて、グラフをかくと次のようになるので、$0^0 = 1$ と考えられる。

$y = x^x$ のグラフ



(3) 公約数、公倍数

何個かの自然数について、全ての数に共通する約数を公約数、共通する倍数を公倍数という。公約数の中で最も大きい数を最大公約数、公倍数の中で最も小さい数を最小公倍数という。

２つの自然数の最大公約数が１であるとき、それらは互いに素であるという。

例５．24の約数は、1,2,3,4,6,8,12,24
32の約数は、1,2,4,8,16,32
24と32の公約数は、1,2,4,8
24倍数は、24,48,72,96,120,144,168,192,…
32の倍数は、32,64,96,128,160,192, …
24と32の公倍数は、96,192, …

問４．次の各組の数の、最大公約数Ｇと最小公倍数Ｌを求めよ。
(1) 12,18　　(2) 60,72　　(3) 72,108
(4) 12,30,42　　(5) 45,50,105

解)

(1) $12 = 2^2 \cdot 3, 18 = 2 \cdot 3^2$ より
$G = 2 \cdot 3 = 6, L = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

(2) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 72 = 2^3 \cdot 3^2$ より
$G = 2^2 \cdot 3 = 12, L = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

(3) $72 = 2^3 \cdot 3^2, 108 = 2^2 \cdot 3^3$ より
$G = 2^2 \cdot 3^2 = 36, L = 2^3 \cdot 3^3 = 216$

(4) $12 = 2^2 \cdot 3, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ より
$G = 2 \cdot 3 = 6, L = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

(5) $45 = 3^2 \cdot 4, 50 = 2 \cdot 5^2, 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ より
$G = 3 \cdot 5 = 15, L = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$

２数 A,B の最大公約数を G とするとき、
$A = a \cdot G,\ B = b \cdot G$ （a,b は互いに素）と表せる。
a,b には１以外の公約数がないので、A,B の公約数は最大公約数 G の約数である。

また、A,B の最小公倍数を L とすると、$L = abG$ であり、A,B の公倍数は L の倍数である。

また、このとき　$AB = GL$　である。

問５．（ユークリッドの互除法の原理）
２数A,B (A>B)に対して、A÷Bの余りをCとする。
A,Bの最大公約数と、B,Cの最大公約数が等しいことを示せ。

証明）A÷Bの商をQとすると、
A=B×Q+C ・・・①
①より、B,Cの公約数は、Aの約数でもあるので、A,Bの公約数である。
また、①より、C=A−B×Q ・・・②
②より、A,Bの公約数は、Cの約数でもあるので、B,Cの公約数である。
したがって、A,Bの公約数とB,Cの公約数は全て一致し、最大公約数も等しい。

問６．次の２数の最大公約数を求めよ。
11137,11063

解）11137÷11063の余りは74
11063÷74の余りは 37
$74=37\cdot 2$
したがって、２数の最大公約数は37

a1-1.2. 倍数判定法

自然数が２の倍数かどうかは、１の位の数が偶数か奇数かで決まり、５，４，８の倍数かどうかも、この順に平易である。このことを確認した後、様々な数の倍数判定法を考えさせるとともに、それらを発表させ、文字の活用をはかる。

文字計算の基本（簡単な加法、減法、乗法）を指導した後、上記を確認し、次の例題を扱う。

例題１．自然数が３の倍数かどうかは、各位の数の和が３の倍数か否かで判定できる。このことを証明せよ。
（証明は生徒の実状に合わせて行うが、以下は４桁の
場合で示す。）

証明）もとの数が４桁の場合で示す。
もとの数xの各位の数を、一の位から順にa,b,c,dとすると、
$x=a+10b+100c+1000d$
$=(a+b+c+d)+(9b+99c+999d)$
上の式で、$9b+99c+999d$　は３の倍数であるから、xが３の倍数かどうかは各位の数の和$a+b+c+d$が３の倍数か否かで決まる。
もとの数が５桁以上の場合も同様に示すことが出来る。

続いて、自然数が９、８，６の倍数かどうかの判定法を作り、その理由をそれぞれ説明させたのち、７及び１１以上の数についての判定法を考えさせ、発表させる。

以下は、生徒が考えた判定法を纏めたものである。

なお、もとの自然数はxであり、
$x=a+10b+100c+1000d+\cdots$
は、xの各位の数が、一の位から順に$a,b,c,d,\cdots$　であることを表し、
また、$x=a+10p$　は、xの１桁目（一の位）の数がa、２桁目以降の数全体でできる数がp（即ち、$p=\dfrac{x-a}{10}$）、$x=p+100q$は、xの下２桁の数がp、３桁目以降の数全体でできる数がq（即ち、$q=\dfrac{x-p}{100}$）、であることを表しているものとし、他も同様とする。

判定法：以下の［　　］が割り切れるか否かで、
xが割り切れるか否かが判定できる。

７の倍数判定法

７−①：$x=p+1000q$のとき、$\boxed{p-q}$

（注：この判定法は１１及び、１３にも使える。
また、これを繰り返し用いると、
$x=p+10^3q+10^6r+10^9s+10^{12}t+\cdots$
のとき、$\boxed{p-q+r-s+t-\cdots}$　を得る。
以下、繰り返し用いた場合については、省略する。）

７−①’：$x=a+10b+10^2c+10^3q$　のとき、
$\boxed{a+3b+2c-q}$

７−②：$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p+2q}$

７−③：$x=a+10p$　のとき、$\boxed{-2a+p}$

７−④：$x=p+10^6q$のとき、$\boxed{p+q}$
さらに、$p+q=u+10^2v+10^4w$
として、$\boxed{(10v+u)-(10w+v)}$

１１の倍数判定法

１１−①：$x=a+10p$　のとき、$\boxed{a-p}$

１１−②：$x=p+100q$のとき、$\boxed{p+q}$

１３の倍数判定法

１３−①：$x=a+10p$　のとき、$\boxed{4a+p}$

１３－②：$x=p+100q$ のとき、$\boxed{p+9q}$

１７の倍数判定法

１７－①：　$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p-2q}$

１７－①’：　$x=a+10b+100q$ のとき、

$\boxed{a-7b-2q}$

１７－②：$x=a+10p$ のとき、$\boxed{-5a+p}$

１９の倍数判定法

１９－①：　$x=p+100q$ のとき、$\boxed{p+5q}$

１９－②：

$$x=p+100q+100^2r+100^3s+100^4t+\cdots$$

のとき、$\boxed{p+5q+6r+11s+17t+\cdots}$

（各項の係数に注目）

１９－③：　$x=p+20q$　のとき、$\boxed{p+q}$

（繰り返すと、÷20 を商について繰り返し行ったときの、余りの和となる）

２３の倍数判定法

２３－①：　$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p+8q}$

２７の倍数判定法

２７－①：　$x=p+1000q$ のとき、$\boxed{p+q}$

２９の倍数判定法

２９－①：　$x=p+10000q$　のとき、$\boxed{p-5q}$

２９－②：　$x=p+30q$ のとき、$\boxed{p+q}$

（繰り返すと、÷30 を商について繰り返し行ったときの、余りの和となる）

３７の倍数判定法

３７－①：　$x=p+1000q$　のとき、$\boxed{p+q}$

４７の倍数判定法

４７－①：　$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p+6q}$

４９の倍数判定法

４９－①：　$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p+2q}$

９７の倍数判定法

９７－①：　$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p+3q}$

１０１の倍数判定法

１０１－①：　$x=p+100q$　のとき、$\boxed{p-q}$

以上

a1－2. 有理数

関連分野：代数分野，解析分野，幾何分野
高等数学：整数論
対象学年：中学１年，中学２年，中学３年
関連単元：平方根，２乗に比例する関数
教材名：「ファレー数列と有理数の分布」

≪数の拡張，有理数と自然数の対応付け≫

中学校に入学して，数の拡張を学ぶ．正負の数で整数までの拡張は教科書にあるが，有理数についてはない．そこで，中学生に有理数についての理解を深める教材として，ファレー数列を実践してみた。

a1－2.1. Farey 数列（Farey Sequence）の定義

正の数ｎに対して，n に対する F_n とは，n 以下の分母をもつ０以上１以下のすべての約分された分数（既約分数）を小さな順に並べたもの。

ただし，整数 0,1 はそれぞれ分数 $\frac{0}{1},\frac{1}{1}$ として扱うものとする。

例）$F_1=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}$，$F_2=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\}$，

$$F_3=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\},$$

$$F_4=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right\},$$

$$F_5=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}\right\},$$

$$F_6=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\right\},$$

$$F_7=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{1}{1}\right\}$$

a1－2.2. 平面と座標

横軸がニンジン，縦軸がゴボウの‘きんぴら平面’を学習している。

今度は，平面に，地図の位置情報を記入したい。

必要なこと（決めるべきこと）：

①現在地　②方位　③距離

座標平面を紹介：

(1)正規直交座標系　現在地が原点で，単位の長さが１（正規）で，東西南北と軸が直交している座標系。

⑵極座標系　現在地が北極で，そこから見た緯度・経度が入った，方角と距離で位置情報を知る座標系。

a1－2.3. ファレー数列の隣り合う分数

問題１　**図 a1－2.1.** は，$F(5)$ の分数を点で示したものである。隣接する分数はどんな順であるのか。

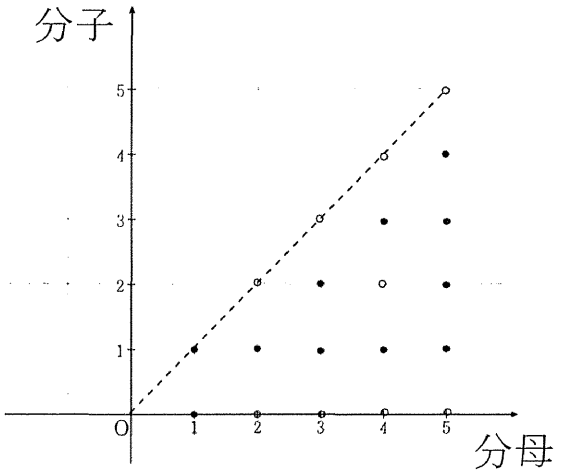


図 a1－2.1.

図における特徴を発見してみよう。

問題２　図 a1－2.1. で，隣接する２つの分数に共通な性質を発見したい。

$\frac{0}{1},\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5},\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4},\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3},\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5},\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2},\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5},\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3},\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4},\frac{4}{5}$; $\frac{4}{5},\frac{1}{1}$

①２つの分数$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$ （$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$）が隣接する条件を a,b,c,d を用いて表してみなさい：

答　$ad-bc=1$

$\frac{d}{c}-\frac{b}{a}=\frac{ad-bc}{ac}$　差の分子が１のとき。

証明は，参考文献「初等整数論講義」参照のこと

②原点 O とし，O から分数 $\frac{b}{a}$ の点 A に至る線分 OA，O から分数$\frac{d}{c}$ の点Bに至る線分 OB とするとき，OA,OB を２辺とする平行四辺形の面積を求めなさい。

答　1

③分数を，原点とその分数の表す点を通る直線の傾きと見ると，それら分数はどんな順になっているのだろうか。

答　傾きの小さい順

問題３　ファレー数列$F(n)$で，隣接する２つの分数が$\frac{b}{a},\frac{d}{c}$ （$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$）であるとき，新たな分数$\frac{b+d}{a+c}$（中間分数と呼ぶ）を考えるとき，これら３つの分数は隣接する分数でしょうか。

答

$\frac{b+d}{a+c}-\frac{b}{a}=\frac{(b+d)a-b(a+c)}{(a+c)a}=\frac{ad-bc}{(a+c)a}=\frac{1}{(a+c)a}$　差の分子が１であるから，隣り合う分数。

$\frac{d}{c},\frac{b+d}{a+c}$ についても同様に隣り合う。

問題４　円周率が$\pi=3.1415926535\cdots$と知っているとき，π の近似分数を作ってみよう。

$\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$ から出発して近似分数を作ってみよう。

解)

$\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{47}{15}$, $\frac{69}{22}$, $\frac{91}{29}$, $\frac{113}{36}$, $\frac{135}{43}$, $\frac{157}{50}$ (=3.14), $\frac{179}{57}$, $\frac{201}{64}$, $\frac{223}{71}$, $\frac{245}{78}$, $\frac{267}{85}$, $\frac{289}{92}$, $\frac{311}{99}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$ (=3.14159292・・・)

中間分数を計算すれば，よりよい近似分数が得られる。

a1－2.4. 座標平面上に有理数を表示する

問題５　$\left(\frac{a}{b},\frac{d}{c}\right)$（$b,c$ は正の整数，a,d は負でない整数）x，y 座標共に既約分数であるとき，次の分数を下の座標平面に色を変えた●で示し，

次の表に個数$b(n)$，$B(n)$ を記入しなさい。

1）分母＝１である分数
2）分母≦２で，1）で出現していない新たなもの
3）分母≦３で，1），2）で出現していない新たなもの
4）分母≦４で，1），2），3）で出現していない新たなもの

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\phi(n)$		1	2	2	4	2	6	4
N(n)	2	3	5	7	11	13	19	23
b(n)								
B(n)								

n	8	9	10	11	12	13	14
ϕ(n)	4	6	4	10	4	12	
N(n)	23	29	33	43	47	59	
b(n)							
B(n)							

ϕ(n)：分母がnまでに新たに出現した正の分数の個数＝オイラー関数

N(n)：分母がnまでのファレー数列に含まれる正の分数の個数

b(n)：分母がnまでで新たに出現して正の分数の個数

B(n)：分母がnまでに出現した正の分数の個数

問題1　分数≦5で，1），2），3），4）で出現していない新たなものの個数b(5)を求めなさい。また，分母≦5までに出現したすべての分数の総和B(5)を求めなさい。

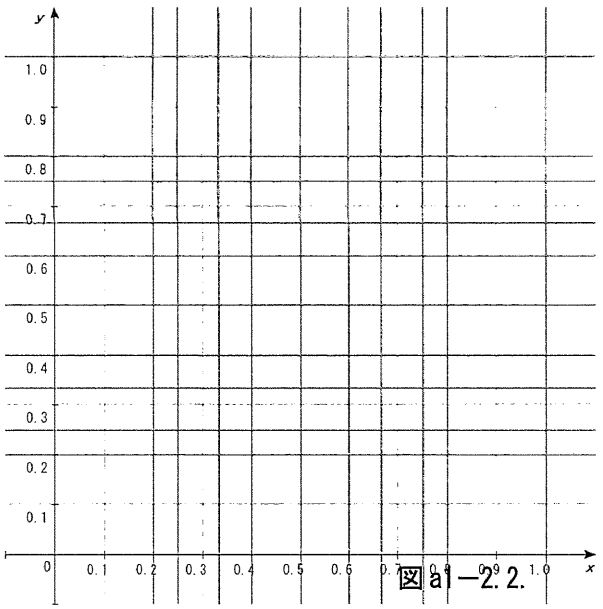


図 a1－2. 2.

$$b(5)=2\times\phi(5)\times N(5)+\{\phi(5)\}^2$$

$$=2\times4\times11-4\times4=72$$

問題2　B(n)の数列はどんな数列なのだろうか？予想してみなさい。

結果：分母がnまでの分数の個数$B(n)$が分母がnのファレー数列の個数（素数）の平方になっていること。

$$b(n)=2\times\phi(n)\times N(n)+\{\phi(n)\}^2$$

$$B(n)=B(n-1)+b(n)=\{N(n)\}^2$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ϕ(n)		1	2	2	4	2	6	4
N(n)	2	3	5	7	11	13	19	23
b(n)	4	5	16	24	72	48	192	168
B(n)		9	25	49	121	169	361	529

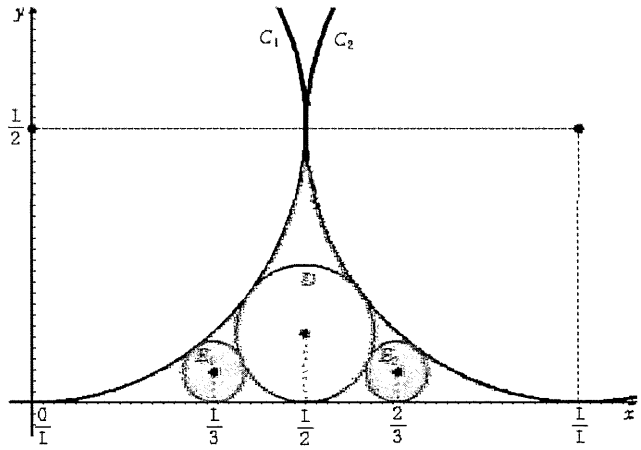
n	8	9	10	11	12	13	14
ϕ(n)	4	6	4	10	4	12	
N(n)	23	29	33	43	47	59	
b(n)	168	312	248	760	360	1272	
B(n)	529	841	1089	1849	2209	3481	

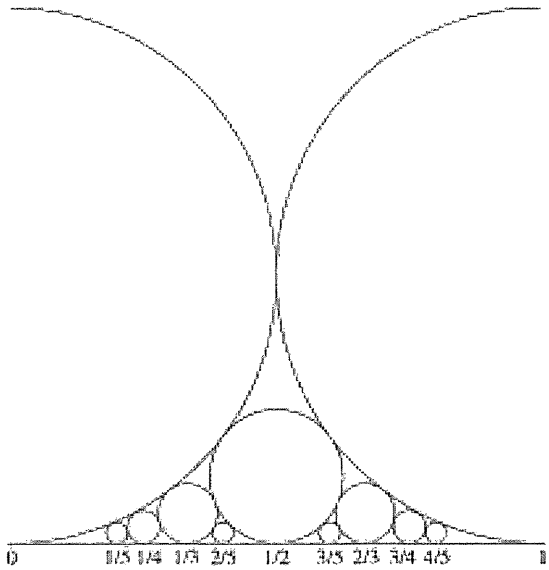
a1－2.5. 自然数と有理数の１対１対応

０と１との間の有理数が自然数と１対１対応がつけられる。つまり，新たに出現したファレー数列の有理数を次のように並べればよい：**図 a1－2. 1.** 参照

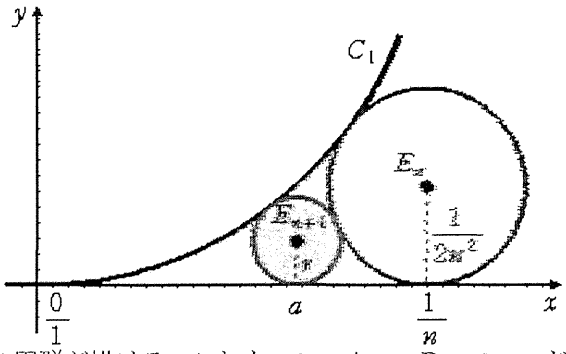
$$\frac{1}{2};\frac{1}{3},\frac{2}{3};\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5};\frac{1}{6},\frac{5}{6};\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7};\cdots$$

参考）





数直線上に並ぶ有理数$\frac{a}{b}$の上に，外接する直径$\frac{1}{b^2}$



の円群が描ける。これを，レスター・R・フォードの円と呼ばれている。これもフラクタルの一種である。

円 E_n の中心の x 座標が，$1/n$ で，半径が $1/(2n^2)$ であるとき，円 E_{n+1} の中心の x 座標と半径は

それぞれ$\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{2(n+1)^2}$で与えられることを示す。

円 E_n の中心の x 座標が，$\frac{1}{n}$で，半径が$\frac{1}{2n^2}$であるとき，円 E_{n+1} の中心の x 座標と半径は

それぞれ$\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{2(n+1)^2}$　で与えられる：

三平方の定理より，

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^2+a^2=\left(\frac{1}{2}+r\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{n}-a\right)^2+\left(\frac{1}{2n^2}-r\right)^2=\left(\frac{1}{2n^2}+r\right)^2$$

が成り立つ。これより，$a^2=2r$，

$$a^2-\left(\frac{2}{n}\right)a+\frac{1}{n^2}=\frac{2r}{n^2}$$　　第2式より，

$n^2a^2-2na+1=2r$　よって，

$n^2a^2-2na+1=a^2$

すなわち，　$(n^2-1)a^2-2na+1=0$

よって，　$\{(n+1)a-1\}\{(n-1)a-1\}=0$ より，

$a=\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}$　　$a=\frac{1}{n-1}$ は不適であり，

$a=\frac{1}{n+1}$　このとき，半径は，　$\frac{1}{2(n+1)^2}$ となる。

ちなみに，ファレイ数列の項数は，

$$1+\sum_{k=1}^{n}\phi(n)=3\left(\frac{n}{\pi}\right)^2\approx 0.30396\,n^2$$

参考文献

「数の本」（2001）J.H.コンウェイ，R.K.ガイ著
シュプリンガー・フェラーク
初等整数論講義（1931）高木貞治 第2版 共立出版

A3. 置換と正多面体群

関連分野：代数分野，幾何分野
高等数学：線形代数
対象学年：高校3年生
関連単元：「行列」(数学C)
教 材 名：「置換と正多面体群」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

線形代数で学習する行列の基礎となる置換について，正多面体の回転群を視点とする，幾何的な要素を取り入れた学習を提案する。高校3年生を対象とした教材として，数学Cの単元「行列」の中で，n次の正方行列の行列式を導き，さらには，n次正方行列の逆行列の導出までを意識して，置換を取り上げた。

はじめに，行列の定義や演算に関する基本性質を学習し，行列の累乗に関する計算では，逆行列を用いず，既習の事項や行列の性質を利用した。次に，逆行列の定義と性質を学習した後，以下の内容に取り組んだ。

A3.1. 置換

有限集合MからMへの一対一写像(単射)をMの**置換**(Permutation)という。有限集合 $M=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$の置換全体を$S_n$と表す。$P\in S_n$ に対して，$i \to p_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ であるとき，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_n\end{pmatrix}$$

で表すと，S_nの元の個数は$n!$ 個あることが分かる。このPを**n次の置換**という。

次に，S_nの中で2つの置換P, Qに対して積を導入する。

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_n\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ q_1 & q_2 & \cdots\cdots & q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_n\\ r_1 & r_2 & \cdots\cdots & r_n\end{pmatrix}$$

に対して，$i \xrightarrow{P} p_i \xrightarrow{Q} r_i$ と，P, Q を順に続けてほどこして得られる置換をPQで表し，PとQの**積**(Product)という。

これから，置換の積についても，行列の積と同様に，一般的には交換法則は成り立たないことを確認した。

例題　3次の対称群 S_3 の積

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

上の例題のように，交換法則が成り立たない群を対称群と呼び，n 次の対称群を S_n で表す。交換法則が成り立つ場合を，交代群と呼び，n 次の交代群を A_n で表す。

A3.2. 互換

S_n の元で特に2つの文字の入れ替え，例えば文字 i と j の入れ替えで，他の文字はすべて変わらないとき置換を**互換**(Transposition)といい，$(i,\ j)$で表す。

$$(i,\ j)=(j,\ i)=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i&\cdots&j&\cdots&n\\1&2&\cdots&j&\cdots&i&\cdots&n\end{pmatrix}$$

また，$S_n\ni P=\begin{pmatrix}1&2&\cdots\cdots&n\\p_1&p_2&\cdots\cdots&p_n\end{pmatrix}$ に対して，$i<k$，$p_i>p_k$ となる文字の組があるとき，これを P の1つの**転位**(Inversion)という。転位の個数が偶数個のとき，**偶置換**(Even Permutation)といい，転位の個数が奇数のとき**奇置換**(Odd Permutation)という。そして，偶置換か奇置換かによって，P の**符号**(Signum)を以下のように定める。また，S_n の元で特に M の元をそれ自身に写す置換 $I=\begin{pmatrix}1&2&\cdots\cdots&n\\1&2&\cdots\cdots&n\end{pmatrix}$ を**恒等置換**(Identity Permutation)という。恒等置換 I は偶置換と定める。

$$\operatorname{sgn}P=\begin{cases}1 & P\text{が偶置換}\\ -1 & P\text{が奇置換}\end{cases}$$

互換と符号については，次のような【問題】で確認をおこなった。

【問題】S_3 のすべての元を求め，各元について符号を確認せよ。

(解)　S_3 のすべて元の個数は $3!=6$ (個)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},(2\ \ 3),(1\ \ 3),(1\ \ 2)$$

各元についての符号は，次の2通りになる。

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=1$$

$$\operatorname{sgn}(2\ \ 3)=\operatorname{sgn}(1\ \ 3)=\operatorname{sgn}(1\ \ 2)=-1$$ ■

A3.3. 正三角形の各頂点の対応

正三角形の各頂点に番号を振り，また，三角形の重心を O とする。点 O の点対称を次のように定める。

e：不変，σ：120° 回転，σ^2：240° 回転

また，線対称を図の(1)(2)(3)に関するもの(鏡像)を τ_1，τ_2，τ_3 とする。

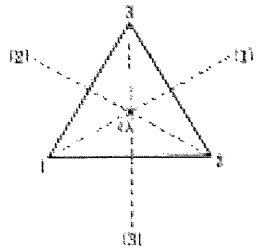


図 A3.1.　正三角形の回転軸と鏡像

これらの対称の作用からできる集合は，

$$H=\{e,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\}$$

となり，群をなす。また，それぞれの元がこの順に

$$S_3=\left\{e,\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},(2\ \ 3),(1\ \ 3),(1\ \ 2)\right\}$$

が対応してくる。このように2つの集合の構造が同一であることから，H と S_3 は**同型**(Isomorphism)である。

A3.4. 正多面体群の同型

次に，正多面体に関する対応関係を探る上で必要となる，回転軸と軸の総数については提示した。**正多面体群**(Polyhedron Group)とは，正多面体の中心 O のまわりの回転群のうち，正多面体をそれ自身に移すすべての回転のつくる部分群をいう。正多面体の対称軸を次の4種類に分け，それぞれの個数を p_a, p_b, p_c, p_d で表すことにすると，**表 A3.2.** のようにまとめることができる。

表 A3.2.　正多面体群の回転軸と軸の総数

	p_a	p_b	p_c	p_d	軸の総数
正四面体	0	0	4	3	7
正八面体	3	4	0	6	13
正二十面体	6	10	0	15	31

(*a*) 向かい合った2つの頂点を結ぶ直線
(*b*) 向かい合った2つの面の中心を結ぶもの
(*c*) 向かい合った1つの頂点と1つの面の中心を結ぶ直線
(*d*) 向かい合った2辺の中心を結ぶもの

＜課題＞次の対応が同型であることを示せ。ただし，A_n は n 次の交代群，S_n は n 次の対称群を表している。

(1) 正四面体群 $\cong A_4$　　(2) 正八面体群 $\cong S_4$

(3) 正二十面体群 $\cong A_5$

(解)

(1) 正四面体群

正四面体の各頂点に 1，2，3，4 と番号を振り，回転軸について，次の図のように考える。

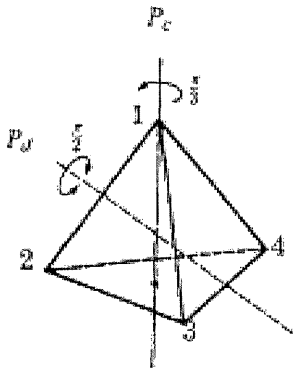


図 A3. 3.　正四面体の回転軸

はじめに，回転軸 p_c は，次のように考える。

p_c：向かい合った 1 つの頂点と 1 つの面の中心を結ぶ直線を軸とする，120° の回転

<u>頂点 1 と△234 の中心を結ぶ直線を軸とする場合</u>

120°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$，240° 回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$

頂点 2，3，4 を通る軸についても，同様に考えると，以下の置換が得られる。

<u>頂点 2 と△134 の中心を結ぶ直線を軸とする場合</u>

120°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$，240° 回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$

<u>頂点 3 と△124 の中心を結ぶ直線を軸とする場合</u>

120°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$，240° 回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$

<u>頂点 4 と△123 の中心を結ぶ直線を軸とする場合</u>

120°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$，240° 回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$

次に，回転軸 p_d は，次のように考える。

p_d：向かい合った 2 辺の中心を結ぶ線を軸とする，180° の回転

<u>辺 12 と辺 34 の中心結ぶ線を軸とする場合</u>

$(1\ \ 2)(3\ \ 4)$

<u>辺 13 と辺 24 の中心結ぶ線を軸とする場合</u>

$(1\ \ 3)(2\ \ 4)$

<u>辺 14 と辺 23 の中心結ぶ線を軸とする場合</u>

$(1\ \ 4)(2\ \ 3)$

よって，恒等置換 e を合わせて全 12 個の置換が得られる。これらの置換はすべて偶置換であり，正四面体群は 4 次の交代群になっている。

各頂点の番号の振り方から，互いに鏡像である形があり，また，一方を自分自身に重ねるときに生ずるのは，偶置換のみである。また，回転軸 p_c は，正三角形を移すので，回転する三角形の頂点の置換となる。回転軸 p_d は，対称になっている各頂点の置換になっている。これから，各回転軸から得られる置換の特徴について，次のようなことが分かる。

p_c：1 個を固定して他の 3 個を巡回的に移すもの

p_d：2 個ずつに分けて，それぞれを互換するもの ■

(2) 正八面体群

正八面体の各頂点に 1，2，3，4，5，6 と番号を振り，回転軸について，次の図のように考える。

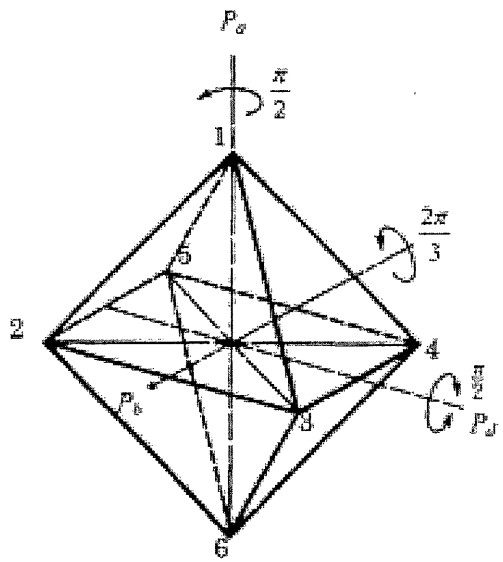


図 A3. 4.　正八面体の回転軸

はじめに，回転軸 p_a は，次のように考える。

p_c：向かい合った 2 つの頂点を結ぶ直線を軸とする，90° の回転

頂点1と頂点6を結ぶ直線を軸とする場合

90°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&4&5&2&6\end{pmatrix}=(2\quad3\quad4\quad5)$

180° 回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&5&2&3&6\end{pmatrix}=(2\quad4)(3\quad5)$

270° 回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&2&3&4&6\end{pmatrix}=(2\quad5\quad4\quad3)$

頂点2と頂点4，頂点3と頂点5を，ぞれぞれ，結ぶ直線を軸とする場合も，同様に3個ずつ置換が得られるので，回転軸 p_a からは計9個の置換が得られる。

次に，回転軸 p_b は，次のように考える。

p_b：向かい合った2つの面の中心を結ぶ直線を軸とする，120° の回転

△236と△451の中心を結ぶ直線を軸とする場合

120°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&2&1&4&3\end{pmatrix}=(1\quad5\quad4)(2\quad6\quad3)$

240°回転 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&6&5&1&2\end{pmatrix}=(1\quad4\quad5)(2\quad3\quad6)$

向かい合う正三角形の組は，上記以外に3組あり，各組から2個ずつの置換が得られるので，回転軸 p_b からは計8個の置換が得られる。

そして，回転軸 p_d は，次のように考える。

p_d：向かい合った2辺の中心を結ぶ線を軸とする，180° の回転

辺25と辺34の中心結ぶ線を軸とする場合

$(1\quad6)(2\quad5)(3\quad4)$

向かい合う2辺の組は，上記以外に5組あり，各組について1個の置換が得られるので，回転軸 p_d からは計6個の置換が得られる。

よって，恒等置換 e を合わせて全24個の置換が得られる。これらの置換は12個の奇置換と12個の偶置換から構成されているので，正四面体群は4次の対称群になっている。

ここで，回転軸 p_a は，正方形を回転させるので，回転する正方形の各頂点についての回転を考えればよい。回転軸 p_b は，正三角形を回転させるので，回転する正三角形の各頂点についての回転を考えればよい。回転軸 p_d は，対称になっている各頂点の置換になっている。これから，各回転軸から得られる置換の特徴について，次のようなことが分かる。

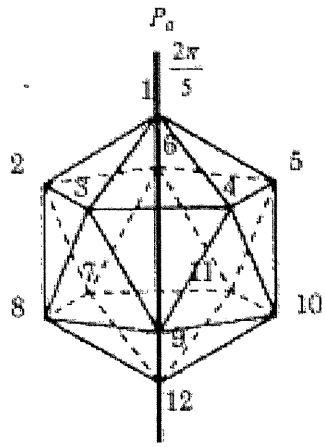
p_a：2個を固定して他の4個を巡回的に移すもの

p_b：3個ずつに分けて，それぞれを互換するもの

p_d：2個ずつに分けて，それぞれを互換するもの ■

(3) 正二十面体群

正二十面体の各頂点に1～20までの番号を，次の図のように振り，回転軸 p_a を考える。



図A3.5.　正二十面体の回転軸 P_a

p_c：向かい合った2つの頂点を結ぶ直線を軸とする，72° の回転

頂点1と頂点12を結ぶ直線を軸とする場合

72°回転

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&3&4&5&6&2&8&9&10&11&7&12\end{pmatrix}$

$=(2\quad3\quad4\quad5\quad6)(7\quad8\quad9\quad10\quad11)$

144° 回転

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&4&5&6&2&3&9&10&11&7&8&12\end{pmatrix}$

$=(2\quad4\quad6\quad3\quad5)(7\quad9\quad11\quad8\quad10)$

216° 回転

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&5&6&2&3&4&10&11&7&8&9&12\end{pmatrix}$

$=(2\quad5\quad3\quad6\quad4)(7\quad10\quad8\quad11\quad9)$

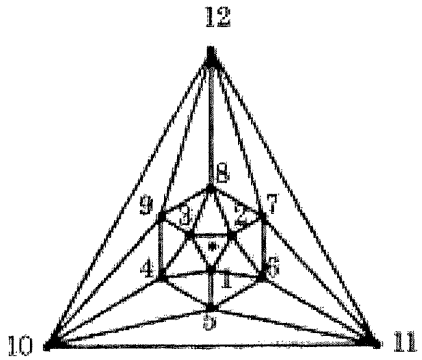
288° 回転

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&6&2&3&4&5&11&7&8&9&10&12\end{pmatrix}$

$=(2\quad6\quad5\quad4\quad3)(7\quad11\quad10\quad9\quad8)$

向かい合う2つの頂点の組は，上記以外に5組あり，各組について4個の置換が得られるので，回転軸 p_a からは計24個の置換が得られる。

次に，正二十面体の1つの面を基準にして展開した，次の図のような正多面体のグラフ表現を用いて，回転軸 p_b を考える。



図A3.6.　正二十面体の回転軸 P_b

p_b：向かい合った2つの面の中心を結ぶ直線を軸とする，120° の回転

△123と△10 11 12の中心を結ぶ直線を軸とする場合

120°回転

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\2&3&1&6&7&8&9&4&5&11&12&10\end{pmatrix}$$

$=(1\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 6\ \ 8)(5\ \ 7\ \ 9)(10\ \ 11\ \ 12)$

240°回転

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\3&1&2&8&9&4&5&6&7&12&10&11\end{pmatrix}$$

$=(1\ \ 3\ \ 2)(4\ \ 8\ \ 6)(5\ \ 9\ \ 7)(10\ \ 12\ \ 11)$

向かい合う正三角形の組は，上記以外に9組あり，各組から2個ずつの置換が得られるので，回転軸 p_b からは計20個の置換が得られる。

そして，回転軸 p_d は，次のように考える。

p_d：向かい合った2辺の中心を結ぶ線を軸とする，180° の回転

辺12と辺12 10の中心を結ぶ線を軸とする場合

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\2&1&6&8&7&3&5&4&11&12&9&10\end{pmatrix}$$

$=(1\ \ 2)(3\ \ 6)(4\ \ 8)(5\ \ 7)(9\ \ 11)(10\ \ 12)$

向かい合う2辺の組は，上記以外に14組あり，各組について1個の置換が得られるので，回転軸 p_d からは計15個の置換が得られる。

よって，恒等置換 e を合わせて全60個の置換が得られる。これらの置換はすべて偶置換であり，正二十面体群は5次の対称群になっている。

ここで，回転軸 p_a は，正五角形を回転させるので，回転する正五角形の各頂点に関する回転を考えればよい。回転軸 p_b は，正三角形を回転させるので，回転する正三角形の各頂点に関する回転と，正六角形の各頂点に関する回転を考えればよい。回転軸 p_d は，対称になっている各頂点の置換になっている。これから，各回転軸から得られる置換の特徴について，次のようなことが分かる。

p_a：2個を固定して，残りの8個を4個ずつに分けて，それぞれを巡回的に移すもの

p_b：3個ずつに分けて，それぞれを互換するもの

p_d：2個ずつに分けて，それぞれを互換するもの ■

A3.5.　正多面体の双対関係

＜課題＞では，3つの正多面体を取り上げ，それぞれについて同型となる群の個数を，回転軸を視点として数え上げた。ここでは，正多面体の双対関係を視点とする＜課題＞の別解を示す。

A3.5.1.　双対正多面体

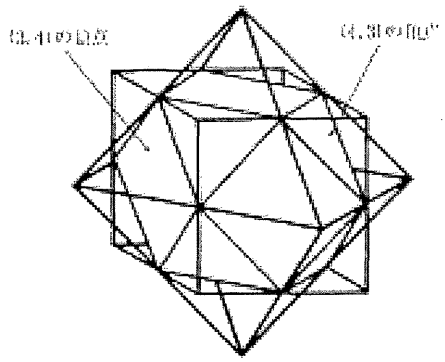
シュレーフリの記号を用いて正多面体を表す。シュレーフリの記号では，正多角形の各面はすべて合同な正 p 角形からなり，各頂点はすべて合同な正 q 角錐からなることを，p と q の組で $(p,\ q)$ と表す。

正四面体　(3，3)

正六面体　(4，3)　　正八面体 (3，4)

正十二面体 (5，3)　　正二十面体 (3，5)

一般に，$(p,\ q)$で表される正多面体の各面の中心を結ぶと，p と q を入れ替えた正多面体ができる。これを**双対正多面体**(Dual Polyhedron)と呼ぶ。

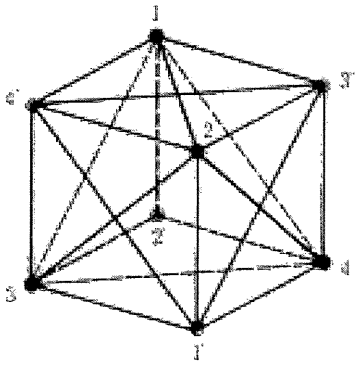


図A3.7.　正六面体と正八面体，正十二面体と正二十面体の双対関係（一松，2002，p.15）

このように，正四面体は自分自身と双対であり，正六面体と正八面体，正十二面体と正二十面体は，それぞれ双対である。

A3.5.2. 正八面体群

正八面体は，双対関係にある正六面体で考える。正六面体の1つおきの頂点は正四面体をなし，正六面体を動かして元の正六面体に重ねたとき，正四面体が元に戻る場合と，ずれた位置にくる場合がある。(1)のときと同様に，正四面体の各頂点に番号を振ると，正四面体が元に戻る場合は偶置換となり，ずれた位置にくる場合は奇置換となる。



図A3.8. 正六面体の一つおきの頂点で構成される正四面体を考える（一松，2002，p.15）

ずれた位置にくる場合は，正四面体の各頂点1，2，3，4に双対する頂点を1'，2'，3'，4'で表すと，番号の順序が鏡像体となり，初めの正四面体の頂点1，2，3，4がそれぞれi_1', i_2', i_3', i_4' に移ったとき，置換 (i_1, i_2, i_3, i_4) を対応させればよい。

A3.5.3. 正二十面体群

正二十面体群は5次の対称群となり，その置換の個数は60個になる。(解)のように，数え上げる方法もあるが，面の塗り分けを用いる方法は有用である。

通常の塗り分けでは，隣り合う面を異なる色で塗り分けるだけならば3色であれば済むが，次のような条件を付して塗り分けをおこなう。

- 頂点を共有する面も異なる色で塗る
- 各頂点の周りの色の順序がすべて異なるように塗る
- 相対する頂点の周りは，それぞれの頂点の真上から見て逆の順序になるようにし，かつ，すべての色の順序が偶置換になるように塗る

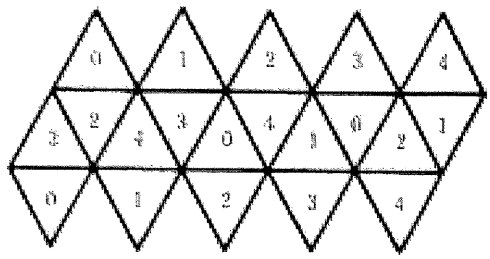
1番目の条件より，塗り分けには5色必要になる。そこで，塗り分けの色に番号0，1，2，3，4を振り，次の操作をおこなう。

操作1　1頂点の周りの5面を，上から見て反時計周りに順次，0，1，2，3，4で塗る。

操作2　その次の5面を，5を法としてすぐ上の面の色に2を加えた色で塗る。

操作3　次の5面の色は，頂点の周りの5色がすべて相異なるので自動的に定まる。

操作4　残りの5面は，操作3で定めた色に隣接する面を，その色に5を法として2を加えた色で塗る。



図A3.9. 正二十面体の特殊な5色塗り分け（一松，2002，p.31）

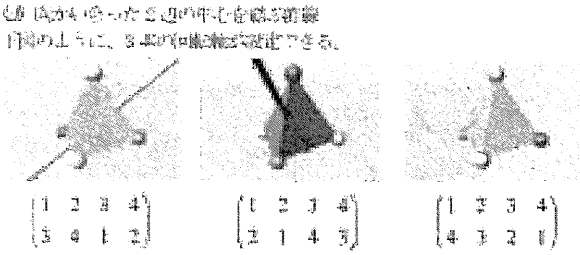
各頂点の周りの色の列は色0の面の位置を定めれば，すべて色0，1，2，3，4の偶置換になる。逆に，60個の偶置換がすべて現れ，頂点とその周りの色0の面をそこに移す変換は，一通りに定まる。したがって，正二十面体群はちょうど5次の交代群となる。

A3.6. 生徒のレポート

生徒が提出した＜課題＞のレポートの中から，解答に様々な工夫が見られたので，その幾つかを紹介する。

A3.6.1. テクノロジー・ツールの利用 (HT君のレポート)

工芸の授業で利用した，CGソフト「Rhinoceros」を用いて，正多面体の回転を視覚化している。



図A3.10. 「Rhinoceros」を用いた考察

利用した「Rhinoceros」は評価版であったことと，「頭上だけで考えることに限界を感じた」ため，正二十面体については，実際に作成して＜課題＞に取り組んだ。

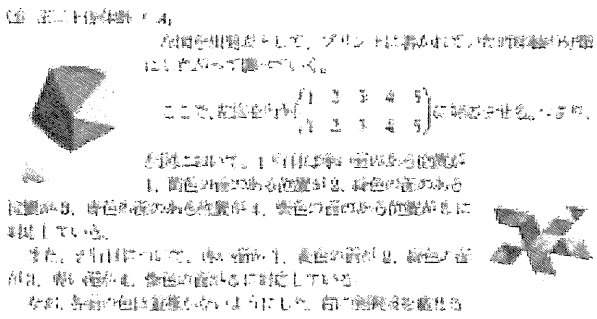


図 A3.11. 正二十面体の考察

最後に，正六面体と正十二面体についても，回転軸や置換について考察をおこない，正多面体の双対関係を見い出している。

表 A3.12. 正多面体群の考察結果

	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の数	4	6	8	12	20
1つの面の辺の数	3	4	3	5	3
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
1つの頂点に集まる辺の数	3	3	4	3	5
対応する行列の数 (a)	0	3	4	5	5
対応する行列の数 (b)	0	4	3	5	3
対応する行列の数 (c)	3	0	0	0	0
対応する行列の数 (d)	2	2	2	2	2
対応する軸の数 (a)	0	4	3	10	6
対応する軸の数 (b)	0	3	4	6	10
対応する軸の数 (c)	4	0	0	0	0
対応する軸の数 (d)	3	0	0	15	15
対応する行列の総数	12	24	24	60	60

A3.6.2. 双対関係の視覚化(NT 君のレポート)

正二十面体が正八面体の内側に存在することを利用し(**図 A3.7.** も参照)，2 つの正多面体を作成して＜課題＞に取り組んでいる。



図 A3.13. 正八面体と正二十面体の関係

正二十面体の各面を 2 色に塗り分け，また，正八面体の各面に「窓」をつくり，正八面体と正十二面体の接し方を視覚化できるように工夫している。

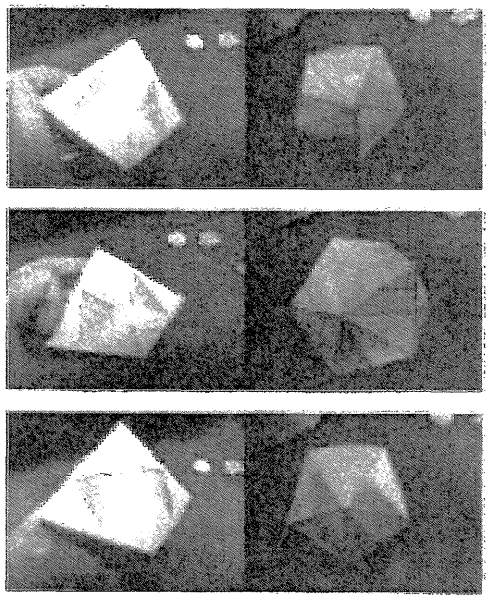


図 A3.14. 正二十面体の考察

正二十面体のすべての面が正八面体に接するのは 5 通りあり，正八面体の各面について 2 色接している。つまり，正八面体の置換の個数は $S_4 = 24$(個) なので，

$$S_4 \times 5 \div 2 = 60 \text{ (個)}$$

となり，正二十面体の置換の個数が求められる。

A3.7. 中学校用の教材化へ向けて

＜課題＞では，正多面体の双対関係を意識して，正六面体と正十二面体については，回転軸に関する資料は掲載しなかった。**表 A3.12.** の生徒 HT の考察にあるように，5 つの正多面体すべてに対して回転軸や置換についてまとめてみることで，双対関係に気づくことが期待される。

正多面体については，オイラーの定理が有名であるが，正多面体の各頂点を，回転軸の取り方によって，回転させ対応させることで置換のアイデアと結びつけることは，中学校の空間図形の内容として取り上げることも可能であると考える。

【参考文献】
1. 山口周・大井武男（1993)『よくわかる線形代数学』産業図書。
2. 平川淳康（1978)「§5. 正多面体」『教育幾何学1：新初等幾何学』, pp.109－119 内田老鶴圃。
3. 上村豊・坪井堅ニ（2002)「9. 行列」『大学生のための基礎シリーズ1：数学入門』, pp.239－263 東京化学同人。
4. 一松信（2002)『正多面体を解く』東海大学出版会。

an1. ２元１次方程式とその応用

関連分野：解析分野
高等数学：関数，解析幾何
対象学年：中学２年生
関連単元：１次関数、座標
教 材 名：２元１次方程式とその応用

≪２元１次方程式とその応用≫

１次方程式，１次不等式，１次関数の学習に引き続き，２元１次方程式に関わる事項（2 直線の交点の個数，方程式の整数解，不等式と領域、分点と三角形の重心・垂心・外心など）を扱う.

an1.1. ２元１次連立方程式の解の個数

(1) $ax+by+c=0$ (a,b,c は定)は次の図形を表す.

$b\neq 0$ のとき、直線 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

$a\neq 0, b=0$ のとき、直線 $x=-\dfrac{c}{a}$

$a=0, b=0, c=0$ のとき、平面全体

$a=0, b=0, c\neq 0$ のとき、表す図形はない

(2) $ax+by+c=0\cdots①, px+qy+r=0\cdots②$ で、

$a^2+b^2\neq 0, p^2+q^2\neq 0$ のとき、①, ②がいずれも直線を表す．このとき、この２直線の交点の個数が 0 個，１個、無数となる条件は、次の通りである.

1 個

$\left(bq\neq 0, \dfrac{a}{b}\neq\dfrac{p}{q}\right)$ または $(b=0, q\neq 0)$

または $(b\neq 0, q=0)$

$\Leftrightarrow aq\neq bp$

$(\Leftrightarrow a:p\neq b:q)$

0 個

$\left(bq\neq 0, \dfrac{a}{b}=\dfrac{p}{q}, \dfrac{c}{b}=\dfrac{r}{q}\right)$

$$\text{または}\left(b=0,q=0,\frac{c}{a}\neq\frac{r}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow aq=bp,\left(br\neq cq\text{または}ar\neq cp\right)$$

$$\left(\Leftrightarrow a:p=b:q,\left(b:q\neq c:r\text{または}a:p\neq c:r\right)\right)$$

無数

$$\left(b\neq0,q\neq0,\frac{a}{b}=\frac{p}{q},\frac{c}{b}=\frac{r}{q}\right)$$

$$\text{または}\left(b=0,q=0,\frac{c}{a}=\frac{r}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow aq=bp,br=cq,ar=cp \quad ※1$$

$$\left(\Leftrightarrow a:p=b:q,b:q=c:r,a:p=c:r\right) \quad ※2$$

注：※印で，第3の式は省略不可（例$b=q=0$）。従って、0を含む数の比で、連比は用いてはいけない。

なお、比については次のように定義した。

自然数a,bに対して、aのbを基準にした倍率$\frac{a}{b}$をa,bの（bを基準にした）比の値という。比$a:b$は比の値について考えることを宣言する記号と考えられる。

a,b,c,dが自然数のとき、$a:b=c:d\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

であるが、0及び負の数への拡張を考えて、

比例式の定義　$a:b=c:d\Leftrightarrow ad=bc$

とする。

an1.2. 2元1次方程式の整数解

(1) $5x+3y=1$の整数解

$$\begin{cases}x=-1+3n\\y=2-5n\end{cases}\quad(n\text{は整数})$$

(2) $12x+7y=6$の整数解

$12x+7y=1$の解を考えて，$12\cdot3+7\cdot(-5)=1$

6倍して、$12\cdot18+7\cdot(-30)=1$

よって、$\begin{cases}x=18+7n\\y=-30-12n\end{cases}$（$n$は整数）

すなわち$\begin{cases}x=4+7m\\y=-6-12m\end{cases}$（$m$は整数）

(3) $2007x+971y=1$の整数解

互除法より

$2007=971\cdot2+65$

$971=65\cdot14+61$

$65=61+4$

$61=4\cdot15+1$

これより、

$$\begin{aligned}1&=61+4\cdot(-15)\\&=61+(65-61)(-15)=65\cdot(-15)+61\cdot16\\&=65\cdot(-15)+(971-65\cdot14)\cdot16\\&=971\cdot16+65\cdot(-239)\\&=971\cdot16+(2007-971\cdot2)\cdot(-239)\\&=2007\cdot(-239)+971\cdot494\end{aligned}$$

したがって、$\begin{cases}x=-239+971n\\y=494-2007n\end{cases}$（$n$は整数）

★$ax+by=c$の整数解

a,bが互いに素のときは無数の整数解があり、

a,bの最大公約数が$d(\neq1)$のときは、

cがdの倍数のときに限り無数の整数解がある。

（それ以外のときは整数解はない。）

(4) $\begin{cases}x+y+z=7\\x-y+2z=9\end{cases}$の整数解

2式を辺々加えて、$2x+3z=16$

これより、$\begin{cases}x=5+3n\\z=2-2n\end{cases}$（$n$は整数）

このとき、第1式より、$y=7-x-z=n$

従って, $\begin{cases} x=5+3n \\ y=n \\ z=2-2n \end{cases}$ （n は整数）

すなわち、$\begin{cases} x=5+3y \\ z=2-2y \end{cases}$ （y は任意の整数）

(5) $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$ の自然数解

2式を辺々加えて、$2x+z=10, z=10-2x$

このとき、第1式より、

$y=12-x-2(10-2x)=3x-8$

x, y, z はいずれも0以上の整数であるから、

$(x, y, z)=(3,1,4),(4,4,2)$

an1.3. 不等式と領域

次の不等式を満たす点(x, y)が表す図形を図示せよ。

(1) $y \geqq 2x+1$　　(2) $x+2y-3 \leqq 0$

(3) $2x-3y-4>0$　　(4) $2x+3 \geqq 0$

(5) $y \geqq ax+b$　　ただし、直線$y=ax+b$は、直線$y=\frac{2}{3}x$に垂直で、点$(4,-4)$を通る。

(6) $cx+dy+1<0$　　ただし、直線$cx+dy+1=0$は、直線$y=-2x$に平行で、$(1,-1)$を通る。

（解答略）

an1.4. 内分外分

(1) $A(4), B(6)$に対して$AP:PB=3:1$となる点は、

$P(\frac{11}{2}), P(7)$

一般に、数直線上で、2点A, Bに対して、

$AP:PB=m:n$　　$(m>0, n>0, m \neq n)$

となる点Pは2つある。このうち線分AB上にあるものを『線分ABを$m:n$に内分する点』、線分ABの延長上にあるものを『線分ABを$m:n$に外分する点』という。

(2) $A(a), B(b)$に対して、

$AP:PB=m:n$　$(m>0, n>0, m \neq n)$となる点は、a, b, m, nの大小に関わらず、内分点が

$P(\frac{an+bm}{m+n})$、外分点が$P(\frac{-an+bm}{m-n})$である。

このことから、『線分ABを$m:n$に外分する』ことを、『線分ABを$m:-n$（または$-m:n$）に分ける』ともいう。

(3) 座標平面で、$A(4,6), B(6,0)$のとき、線分ABを$1:3$に内分する点Dと、$1:3$に外分する点Eは、

$D(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}), E(3,9)$

(4) 三角形の重心

△ABCで、$A(a_1, a_2)$、$B(b_1, b_2)$、$C(a_1, a_2)$とし、辺ABの中点をMとすると、中線AMを2：1に内分する点Gの座標は

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

上の式はa, b, cについて対称的であり、B、Cからの中線をそれぞれ2：1に内分する点はいずれもGに一致する。

(5) 三角形の外心垂心

△OABで最大の角を∠Aとすると、∠O, ∠Bはともに鋭角であるから、Oを原点とし、Bをx軸の正の部分に、Aを第1象限にとり、$A(a_1, a_2)$、$B(b, 0)$　$(0<a_1<b, 0<a_2)$とする。

外心

線分OAの垂直2等分線は、傾き$-\frac{a_1}{a_2}$で

点$(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2})$を通る直線だから、

$y=-\frac{a_1}{a_2}x+\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}=-\frac{a_1}{a_2}x+\frac{a_1^2}{2a_2}+\frac{a_2}{2}$

これと線分OBの垂直2等分線（直線$x=\frac{b}{2}$）の

交点Cは、$C\left(\frac{b}{2}, -\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b}{2}+\frac{a_1^2}{2a_2}+\frac{a_2}{2}\right)$、

すなわち、$C\left(\frac{b}{2},\frac{-a_1b+a_1^2+a_2^2}{2a_2}\right)$

また、線分ABの垂直2等分線は、傾き$\frac{b-a_1}{a_2}$で点$(\frac{a_1+b}{2},\frac{a_2}{2})$を通る直線だから、

$$y=\frac{b-a_1}{a_2}x-\frac{b-a_1}{a_2}\cdot\frac{a_1+b}{2}+\frac{a_2}{2}$$

この式で、$x=\frac{b}{2}$のとき、

$$y=\frac{b-a_1}{a_2}\cdot\frac{b}{2}-\frac{b^2-a_1^2}{2a_2}+\frac{a_2}{2}=\frac{-a_1b+a_1^2+a_2^2}{2a_2}$$

よって、3つの辺の垂直二等分線は、

一点$C\left(\frac{b}{2},\frac{-a_1b+a_1^2+a_2^2}{2a_2}\right)$で交わる。

垂心

Oを通りABに垂直な直線は$y=\frac{b-a_1}{a_2}x$

これとAを通りOBに垂直な直線（直線$x=a_1$）の交点Hは、

$H\left(a_1,\frac{b-a_1}{a_2}\times a_1\right)$、すなわち、$H\left(a_1,\frac{a_1b-a_1^2}{a_2}\right)$

また、Bを通りOAに垂直な直線は、

$y=-\frac{a_1}{a_2}x+\frac{a_1}{a_2}\cdot b$　すなわち　$y=-\frac{a_1}{a_2}x+\frac{a_1b}{a_2}$

これは上の点Hを通る。

よって、頂点を通り各辺に垂直な直線は

一点$H\left(a_1,\frac{a_1b-a_1^2}{a_2}\right)$で交わる。

(6) 三角形の重心外心垂心の性質

(5)と同様に、△OABで、$A(a_1,a_2)$、$B(b,0)$ $(0<a_1<b,0<a_2)$とおくと、外心C、垂心Hは

$C\left(\frac{b}{2},\frac{-a_1b+a_1^2+a_2^2}{2a_2}\right)$、$H\left(a_1,\frac{a_1b-a_1^2}{a_2}\right)$

また、重心は(4)より、$G(\frac{a_1+b}{3},\frac{a_2}{3})$

2点 C,G のx座標の差を$\overline{CG}_x$、y座標の差を$\overline{CG}_y$とすると、

$$\overline{CG}_x=\frac{a_1+b}{3}-\frac{b}{2}=\frac{2(a_1+b)-3b}{6}=\frac{2a_1-b}{6}$$

$$\overline{CG}_y=\frac{a_2}{3}-\frac{-a_1b+a_1^2+a_2^2}{2a_2}$$

$$=\frac{2a_2^2-3(-a_1b+a_1^2+a_2^2)}{6a_2}$$

$$=\frac{3a_1b-3a_1^2-a_2^2}{6a_2}$$

2点 G,H のx座標の差を$\overline{GH}_x$、y座標の差を$\overline{GH}_y$とすると、

$$\overline{GH}_x=a_1-\frac{a_1+b}{3}=\frac{3a_1-(a_1+b)}{3}=\frac{2a_1-b}{3}$$

$$\overline{GH}_y=\frac{a_1b-a_1^2}{a_2}-\frac{a_2}{3}=\frac{3(a_1b-a_1^2)-a_2^2}{3a_2}$$

$$=\frac{3a_1b-3a_1^2-a_2^2}{3a_2}$$

したがって、

$\overline{CG}_x:\overline{GH}_x=\overline{CG}_y:\overline{GH}_y=1:2$ ----①

よって、直線CG、直線GHの傾きが等しく、
3点C、G、Hは一直線上にある。
また、①より、重心Gは、外心Cと垂心Hを結ぶ線分CHを、1：2に内分する点である。

以上

An1. ２次関数

関連分野：解析分野，幾何分野
高等数学：解析学
対象学年：高校１年生
関連単元：「２次関数」（数学Ⅰ）
「いろいろな関数」（数学C）
教材名：「放物線は２次関数である」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

中学校では２乗に比例する関数を表す図形に関連して，放物線を学んでいる。高等学校で数学Ⅰ「２次関数」となるが，その表す図形が放物線になることは公理的である。放物線の数学的な定義は数学C「いろいろな曲線」まで待つ必要がある。

一方，物理においては，「２次曲線」を実生活での応用を含んだ放物線として指導している。

このような数学科と理科との指導内容の前後は，今はじまったことではないが，ＳＳＨにおける共通の目的を実現するために互いの協力は不可欠である。

そこで，２次関数が表す図形が放物線になること，あるいは，放物線が２次関数であることについての教材例を取り上げた。

An1.1. 平面上における放物線の定義

平面上における放物線の幾何学的定義は，以下のとおりである。

定義：「放物線は，平面上の任意の点Ｐに対して，１つの定点Ｆと１つの定直線l について，ＰとＦの距離とＰとl との距離がそれぞれ等しいＰの軌跡である。」

普通，軌跡が原点を通るように，また簡略化するように，定点Ｆをy軸上に，定直線l をx軸に平行な直線として設定して考える。

点Ｐを$P(x,\ y)$，$F(0,\ f)$，$l: y=-f$とすれば，定義から，

$$\sqrt{x^2+(y-f)^2}=y-(-f) \quad (1.1)$$

両辺を２乗して整理すると

$$y=\frac{1}{4f}x^2$$

を得る。 ■

定点 F を焦点(Focus)，定直線l を準線(directrix)という。

An1.2. 紙を折って放物線つくる

An1.1 の平面上の放物線を紙を折ってつくってみよう。

Ｂ５判またはＡ４判の紙を用意する（横におく）

＜手順＞

y軸上に定点Ｆ（０，f）を設定し，長方形の紙を下においたときの下辺を定直線ℓとする。

そのために。

①左右の頂点を重ねて紙を折って，y軸をつくる。

②下辺l と定点Ｆを意識して，下辺がy軸に垂直になるように紙を折って，x軸をつくる。

③そのときの折り目の線がx軸，下辺とy軸が重なったところがＦになる。

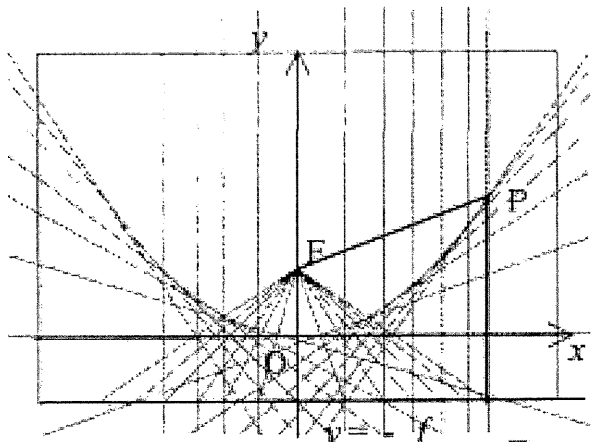
定直線ℓは$y=-f$となる。

④y軸と平行な直線$x=p$を折る。

⑤ℓと$x=p$との交点はＴ（p，$-f$）となる。

⑥ＴとＦを重ねて折ったときの折り目の線と$x=p$の交点がＰになる。すなわち，ＰＦ＝ＰＴとなる。

⑦繰り返し④，⑤，⑥の作業を行い，点Ｐをつくる。



図An1.1. 折り線におけるＰＦ＝ＰＴ

この紙折りでできた折り目の線は，いろいろなことを教えてくれる。

(1) $x=p$を衛星からの電磁波と考えれば，放物線（厳密には放物面）にＰあたってＦにはね返ることがわかるだろう。すなわち，ＢＳアンテナの原理である。

同様にして，太陽光線が放物面で反射すれば１点Ｆで集められる。すなわち，太陽熱を１点で集めることができる。オリンピックの聖火はこの方法でつくる。

(2) 点Ｆに光源をおく。その光源は放物面で反射し平行に直進する。この原理が灯台やサーチライトなどの仕組みである。 ■

An1.3. 放物線が２次関数であることの証明

斜め上方投げ上げ運動により，証明を行う。

(1) 水平方向よりθ角で初速度v_0で投げ上げる．ただ

し，重力加速度をgとする．また，空気による抵抗は考えない．

空気による抵抗以外何も力を受けないから

水平方向　$v_x = v_0 \cos\theta$

垂直方向　$v_y = v_0 \sin\theta - gt$

2）xy 座標平面において，時刻 t の物体の位置は次の式で表される．

水平方向　$x = v_0 \cos\theta \cdot t$　　・・・・①

垂直方向　$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$　　・・・・②

①より，$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ であるから，②に代入すると

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

すなわち，

$$y = \frac{\sin q}{\cos q}^3 x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 q} \quad (3.1)$$

となり，斜め上方投げ上げ運動で得られる放物線は，y は x の2次関数であることが証明された。

■

2次関数のグラフが放物線とよばれる理由はここにある．

An1.4. この式を変形して，θの関数方程式とみる

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$，$\frac{1}{\cos^2 q} = 1 + \tan^2 q$ だから，

(3.1)式は，

$$y = \frac{\sin q}{\cos q}^3 x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 q}$$

$$= \tan q^3 x - \frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2 q)^3 x^2$$

よって

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) \cdot x^2 \quad (4.1)$$

考察1　関数 $y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) \cdot x^2$ において，$y = 0$ とおくことで，射程がわかる．

$$\tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) \cdot x^2 = 0$$

$$x\left\{\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) \cdot x\right\} = 0$$

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = \frac{2v_0^2 \tan q}{g(1+\tan^2 q)}$$

第2式を変形すると

$$x = \frac{2v_0^2 \tan q}{g(1+\tan^2 q)} = \frac{2v_0^2 \tan q^3 \cos^2 q}{g}$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin q \cos q}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (4.2)$$

■

(4.2)を射程（水平到達距離）という。

考察2　射程の最大値は $\theta = 45°$ のときである。

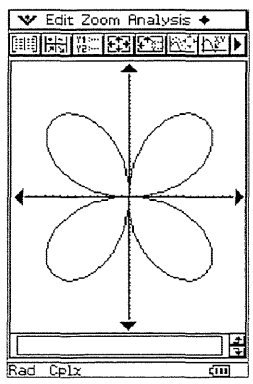
g，v_0 は定数だから，(4.2)が最大になるのは，$\sin 2\theta = 1$ のときである。すなわち，$2\theta = 90°$　ゆえに $\theta = 45°$ のとき，射程は最大となる。

■

考察3

$x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$　(4.2)のグラフをかく。

極座標を用いて，長さ x が角 θ の関数のグラフをかけば，$\theta = 45°$ のとき射程が最大になることが視覚的にわかる。



■

An.1.5. $y = \tan q^3 x - \dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2 q)^3 x^2$ を

$\tan q$ の２次方程式とみる

(4.1)を $f(x,y)=0$ 型に変形して整理する。

$$gx^2\cdot\tan^2\theta - 2v_0^2 x\cdot\tan\theta + 2v_0^2 y + gx^2 = 0 \quad (5.1)$$

と変形して，(4.1)式を，$\tan q$ の２次方程式とみる。

> 考察４　２次方程式
>
> $gx^2\cdot\tan^2\theta - 2v_0^2 x\cdot\tan\theta + 2v_0^2 y + gx^2 = 0$ (5.1) の解が意味するものを考察する。

水平方向より，θ 角で初速度 v_0 で投げ上げたときの θ である。この θ が存在することとは，$\tan\theta$ が存在すること。

その条件は，$\tan\theta$ についての２次方程式(5.1)

$$gx^2\cdot\tan^2\theta - 2v_0^2 x\cdot\tan\theta + 2v_0^2 y + gx^2 = 0$$

の判別式より，

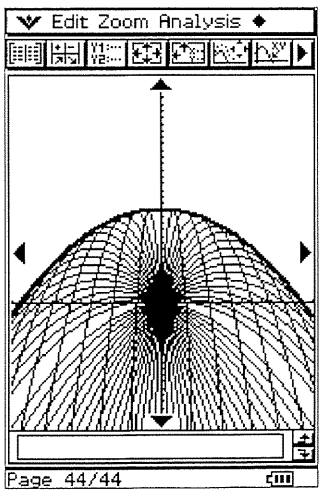
$$\frac{D}{4} = (v_0^2 x)^2 - gx^2(2v_0^2 y + gx^2)$$

$$= x^2\left(v_0^4 - 2v_0^2 gy - g^2x^2\right)$$

より，D＞0から，

$$y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \qquad (5.2)$$

は，斜め上方に投げ上げた物体の通過領域を表す。



■

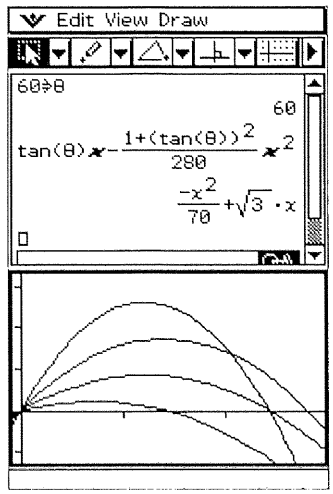
> 考察５　ドーム型野球場の屋根はどういう形であればよいか。

仮定：強打者Ｆの打球が水平面と 45° の角をなして射程距離約 140m飛んだとする。

その場合，打球の初速度は $v_0 = \sqrt{140g}$ [1] (m/s) である。

それを，$y = \tan\theta\cdot x - \dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)\cdot x^2$ に代入して，

θをいろいろと変えて，グラフ化すると次のようになる。



先ほどの条件ならば　秒速 37m≒時速 133.3 Km であるが，(5.2) $y < \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g}{2v_0^2}x^2$ より，

$$y < 70 - \frac{1}{280}x^2 \qquad (5.3)$$

■

[1] およそ 37m/s である。

An1.6. 存在領域と包絡線

kがすべての実数値をとって変わるとき，放物線

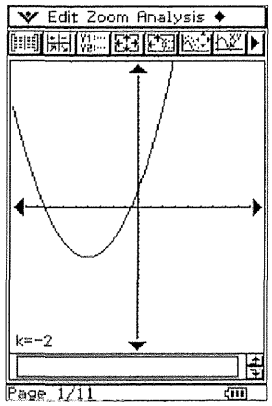
$$y = x^2 - 4kx + k^2$$

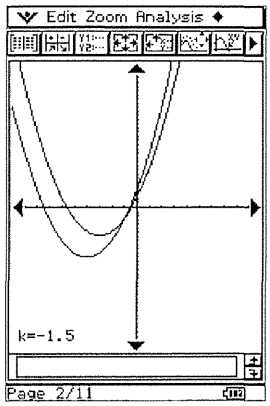
が通る点の存在範囲を求めなさい。

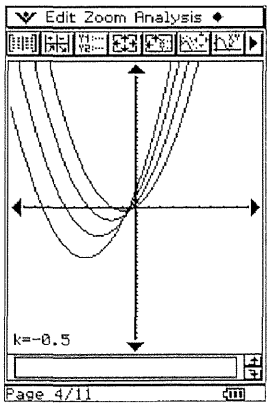
【解答例】点P（x，y）がこの範囲にあるためには，点Pを通る直線が存在すること，従ってkについての２次方程式$k^2 - 4xk + x^2 - y = 0$が実数解をもつことが必要で十分。よって

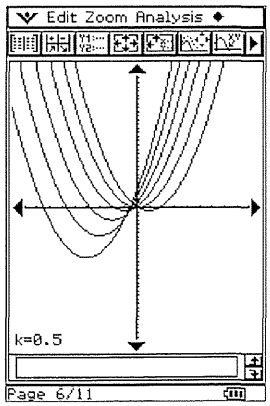
$$D/4 = (-2x)^2 - (x^2 - y) \geq 0$$

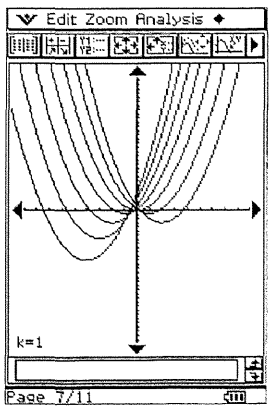
ゆえに　　$y \geq -3x^2$

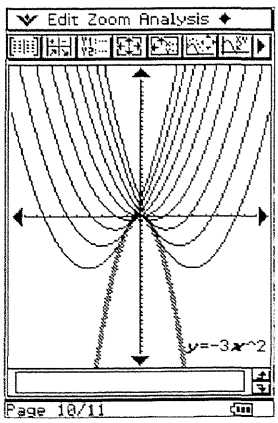












【参考文献等】

平成14年7月18日，東京ドームにおける読売ジャイアンツ対横浜ベイスターズ戦において，ジャイアンツの松井秀喜選手（当時）が打ったボールがドームの屋根にかくれてしまったことや，平成２年６月６日，近鉄バッファローズ(当時)のブライアント選手が同球場において中央スピーカーに打球を当てたことを題材にした。

なお，第57回関東都県算数・数学教育研究神奈川大会(14. 11. 20)において発表した内容に加筆したものである。

g2. チェバ・メネラウスの定理

関連分野：幾何分野
高等数学：平面幾何
対象学年：中学２年生
関連単元：「相似な図形」（中学３年）
「平面図形」（数学A）
教 材 名：「チェバ・メネラウスの定理」

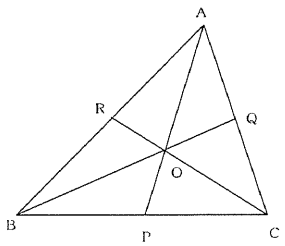
≪チェバ・メネラウスの定理の活用≫

中学校の幾何は、作図から始まり、三角形・四角形・円などの性質を学習し、中点連結定理や三平方の定理へと幾何の定理を学習する。それらは学習の内容に関連性を見つけられないままに進度が組み込まれており、興味を持ちながらもいまひとつ盛り上がらない教材となっている。そこで、似た定理でありながらも、発表が 1500 年以上も異なるということでも生徒に興味を持って取り組めるチェバ(Ceva 1647～1734 ｲﾀﾘｱ)・メネラウス(Menelaus 98 頃 ｷﾞﾘｼｬ)の定理を用い、それまでに学習した内容の応用、または、他の分野との関連へと活用してみたい。

g2.1. チェバの定理

△ABC の頂点 A，B，C と、この三角形の辺上にもその延長上にもない点 O を結ぶ各直線が、対辺またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき、次の等式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$



チェバの定理は、面積比と線分比の関係の応用問題として、導入しやすい。

【問題１】△ABC の内部に１点 O がある。直線 AO，BO，CO が辺 BC，CA，AB と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする。

このとき、$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}$ の値を求めなさい。

(解) BP：PC＝△AOB：△AOC

より $\frac{BP}{PC}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}$

同様に考えて

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}\times\frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}\times\frac{\triangle COA}{\triangle COB}=1$$ ■

g2.2. チェバの定理の逆

△ABC の辺 BC，CA，AB 上に、それぞれ３点 P，Q，R があり、この３点のうち、１個または３個が辺上の点であるとする。このとき

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つならば、３直線 AP，BQ，CR は１点で交わるか平行になる。

このチェバの定理の逆は、外心以外の三角形の五心が１点で交わることの証明に活用できる。

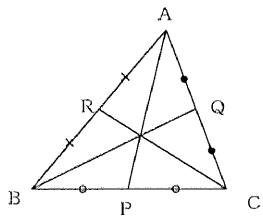
①重心の証明(三角形の３つの中線は１点で交わる)

(仮定) AR：RB＝BP：PC＝CQ：QA＝1：1

(証明) 仮定より

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1\times1\times1=1$$

チェバの定理の逆より△ABC の３つの中線は１点で交わる。 (Q.E.D.)



②内心の証明(3 つの内角の二等分線は１点で交わる)

(仮定) ∠BAP＝∠CAP，∠ABQ＝∠CBQ
∠BCR＝∠ACR

(証明) 角の二等分線定理より

AB：AC＝BP：PC

だから $\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$

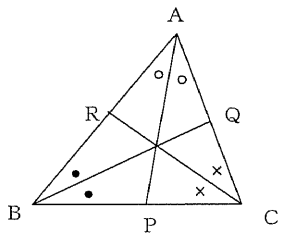
同様に

BC：CA＝CQ：QA

CA：CB＝AR：RB から

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{BA}\times\frac{CA}{AB}=1$$

チェバの定理の逆より △ABC の 3 つの内角の二等分線は１点で交わる。 (Q.E.D.)



③垂心の証明(各頂点から対辺へ下ろした３つの垂線は１点で交わる)

(仮定) AD⊥BC，BE⊥CA，CF⊥AB

(証明) △ABE と△ACF

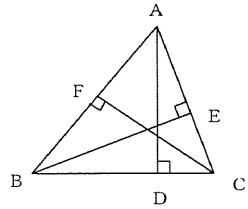
において

∠BAE＝∠CAF (共通)

∠AEB＝∠AFC＝90° (仮定)

２角相等より

△ABE∽△ACF



$\therefore$ AE : AF = AB : AC

$$\therefore \frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}$$

同様に $\frac{BD}{BF}=\frac{AB}{CB}$, $\frac{CE}{CD}=\frac{BC}{AC}$ から

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{BF}\times\frac{AF}{AE}\times\frac{CE}{CD}$$

$$=\frac{AB}{CB}\times\frac{AC}{AB}\times\frac{BC}{AC}=1$$

チェバの定理の逆より △ABC の各頂点から下ろした3つの垂線は1点で交わる。 (Q.E.D.)

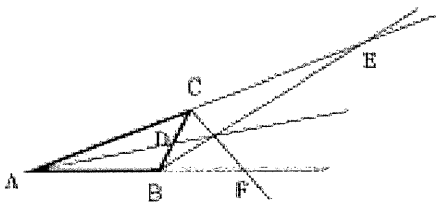
なお、三角比を利用すると、

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}$$

$$=\frac{AB\cos B}{AC\cos C}\times\frac{BC\cos C}{AB\cos A}\times\frac{AC\cos A}{BC\cos B}=1$$

④傍心の証明(2 つの外角の二等分線と残りの内角の二等分線は1点で交わる)

(仮定) ∠CAD = ∠BAD, ∠FBE = ∠CBE
∠ECF = ∠BCF



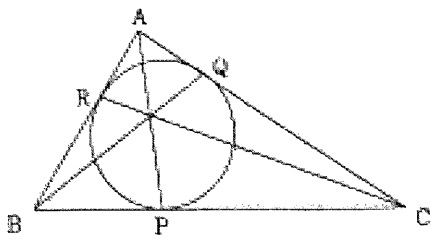
(証明) ∠A の角の二等分線定理より
AB : AC = BD : DC
∠B, ∠C の外角の二等分線定理より
BC : BA = CE : EA
CA : CB = AF : FB

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{BA}\times\frac{CA}{CB}=1$$

チェバの定理の逆より △ABC の 2 つの外角の二等分線と残りの内角の二等分線は1点で交わる。
(Q.E.D.)

g2.3. チェバの定理の用いた問題

【問題2】△ABC の内接円の辺 BC, CA, AB に接する点を P, Q, R とすると、AP, BQ, CR は1点で交わることを示しなさい。

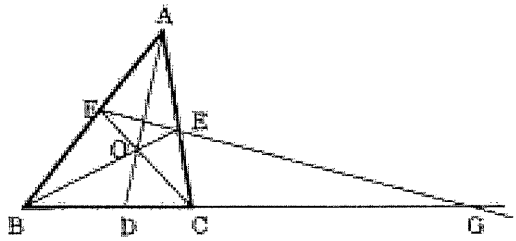


(解) 円の接線の性質より
AQ = AR, BP = BR, CP = CQ だから

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{CQ}\times\frac{CQ}{AR}\times\frac{AR}{BR}=1$$

チェバの定理の逆より、3直線は1点で交わる。■

【問題3】△ABC 内の1点を O とし、AO, BO, CO が対辺 BC, CA, AB と交わる点をそれぞれ D, E, F とする。 直線 EF が辺 BC の延長と交わる点を G とするとき、4点 B, C, D, G において、
BD : DC = BG : GC が成り立つことを示しなさい。



(解) △ABC にチェバの定理を用いて

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \quad \cdots\cdots①$$

△ABC と直線 FEG にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{BG}{GC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \quad \cdots\cdots②$$

①, ②より $\frac{BD}{DC}=\frac{BG}{GC}$

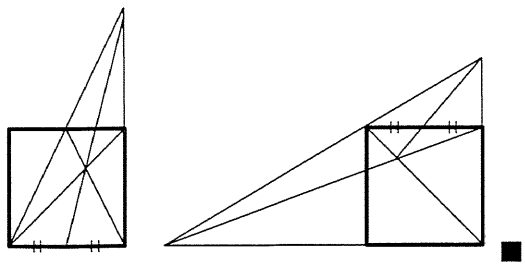
よって、BD : DC = BG : GC ■

一直線上に4点 B, C, D, G があり、
BD : DC = BG : GC がなりたつとき、この4点のことを調和点列という。

ちなみに、1つの角の内角と外角の二等分線が対辺またはその延長と交わる点は、調和点列となる。

【問題4】一本の定規だけを使って、正方形の辺の中点を作図しなさい。ただし、定規は直線を引くだけに使用する。

(解) 図のみ(2通り)



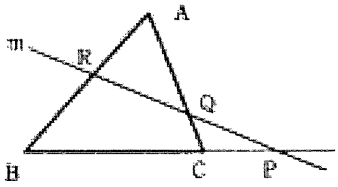
■

(「たけしのコマネチ大学数学科」2006.12.21.放送内容から)

g2.4. メネラウスの定理

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線 m とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき、次の等式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

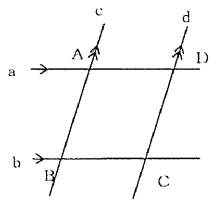


メネラウスの定理の導入として、平行線と線分比の応用として提示することができる。

2 組の直線 a，b と c，d の関係について

① 2 組平行(a // b，c // d)のとき

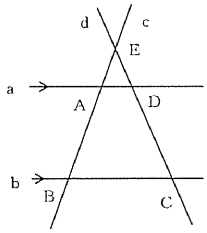
AB = DC，AD = BC



② 1 組平行(a // b)のとき

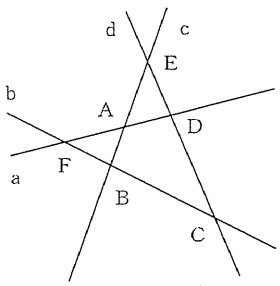
EA : AB = ED : DC

$$\Leftrightarrow\frac{EA}{AB}=\frac{ED}{DC}$$



③ どちらも平行でないとき、

どのような関係があるでしょうか？

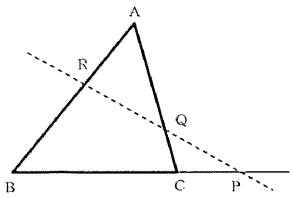


g2.5. メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長上に、それぞれ点 P，Q，R があり、この 3 点のうち、1 個または 3 個が辺の延長上の点であるとする。このとき

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

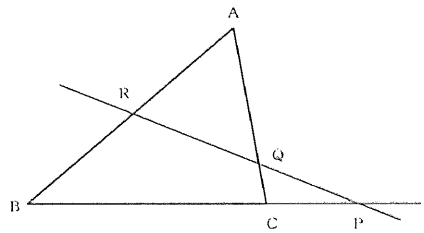
が成り立つならば、3 点 P，Q，R は一直線上にある。



この定理の逆は 3 点が 1 直線上にあることの証明によく用いられる。

g2.6. メネラウスの定理を用いた問題

【問題 5】ある直線が△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長とそれぞれ P，Q，R で交わり、線分 AP，BQ，CR の中点をそれぞれ L，M，N とする。このとき、3 点 L，M，N は一直線上にあることを示しなさい。



(解) BC，CE，EB の中点をそれぞれ P，Q，R とする。CB，CA，CE の中点が P，L，Q だから、

中点連結定理より AB = 2LP，EA = 2LQ ……①

同様にして DE = 2MR，CD = 2PM……②

FC = 2NQ，BF = 2RN……③

△EBC と直線 ADF にメネラウスの定理を用いて

$\frac{BF}{FC}\times\frac{CD}{DE}\times\frac{EA}{AB}=1$ に①～③を代入

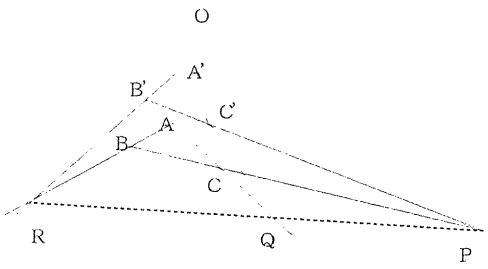
$$\frac{2RN}{2NQ}\times\frac{2PM}{2MR}\times\frac{2LQ}{2LP}=1$$

$$\frac{RN}{NQ}\times\frac{QL}{LP}\times\frac{PM}{MR}=1$$

よって、メネラウスの定理の逆により、3 点 L，M，N は一直線上にある。 ■

どの 2 本も互いに交わり、どの 3 本も共通の交点をもたない、相異なる 4 本の直線にとって決定される図形を完全四辺形という。この問題のなかで、4 直線 AB，BC，CA，PQ を完全四辺形の辺、A，B，C，P，Q，R を頂点、3 つの線分 AP，BQ，CR を対角線という。L，M，N を含む直線を完全四辺形のニュートン線という。

【問題６】２つの三角形 ABC，A'B'C'があって、３直線 AA'，BB'，CC'が１点 O で交わるならば、直線 BC と B'C'の交点 P と、直線 CA と C'A'の交点 Q と、直線 AB と A'B'の交点 R は一直線上にあることを示しなさい。



(解)　△OBC と直線 B'C'P，△OAC と直線 A'C'Q，△OAB と直線 A'B'R にそれぞれメネラウスの定理を用いて

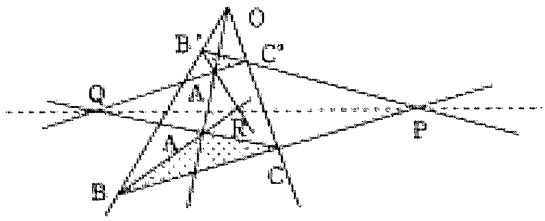
$$\frac{BP}{PC}\times\frac{OC'}{C'O}\times\frac{OB'}{BB'}=1,\quad \frac{QC}{AQ}\times\frac{C'O}{CC'}\times\frac{A'A}{OA'}=1$$

$$\frac{AR}{RB}\times\frac{BB'}{B'O}\times\frac{OA'}{A'A}=1$$

これらの辺々を掛けて $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$

よって、メネラウスの定理の逆により３点 P，Q，R は一直線上にある。 ■

三角形 ABC と A'B'C'の対応する頂点を結ぶ直線 AA'，BB'，CC'が同じ１点 O を通るとする。辺 AB と A'B'，BC と B'C'，CA と C'A'のそれぞれの交点 L，M，N が存在すれば、それらの交点は１直線上にある。

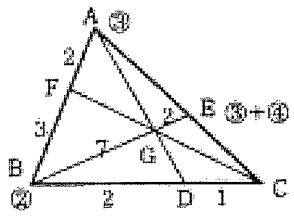


これは、デサルグ(Desargues 1593～1662 フランス)の定理といい、美術の透視図法の理論に用いられる定理である。とくに、この技法を用いて活躍した人物にレオナルド・ダ・ヴィンチがいる。

g2.7. 他の分野との関連

チェバ・メネラウスの定理で線分比を求めさせる問題がよく出題されるが、ここでモビールを用いて、バランスの問題と関連させて説明すると、数値の意味をまた、別の視点で理解することができる。

【問題】次の図において、次の比を求めなさい。
AF：FB＝2：3，
BD：DC＝2：1 のとき BG：GE





モビール

g2.8. 教材化へ向けて

チェバ、メネラウス、ニュートン、デサルグ、オイラー、シムソン、トレミー、９点円など、平面幾何には名前の付いた生徒が興味を持って取り組めそうな定理・性質がたくさんある。これらを体系づけ、また、円や立体に絡めることで、射影幾何学などにもつなげていきたい。

【参考文献】

1. 山崎昇（2000）「射影幾何学」『みえる数学の世界２』，pp443－453 大竹出版。
2. 林恵津雄（1994）『基礎から学べる平面幾何』旺文社。

g3－1. 立方体の切断

関連分野：幾何分野
高等数学：射影幾何
対象学年：中学３年生
関連単元：空間図形、空間ベクトル
教 材 名：立方体の切断

≪立方体の切断≫

空間図形をイメージすることは難しい。立方体の切断面を見取り図に作図することを通して、空間図形に親しみ、空間をイメージできるようにする。

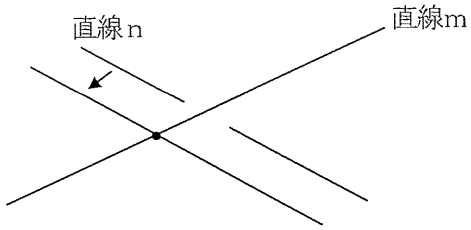
g3－1.1. 空間図形の基本

(1) 異なる２直線の位置関係

交わる or 平行 or ねじれの位置

交わる２直線及び平行な２直線は、それぞれ、同一平面上にある。

また、２直線m，ｎがねじれの位置にある場合、平行移動して交点を持つようにしたときに作る角を、もとの２直線の作る角という。

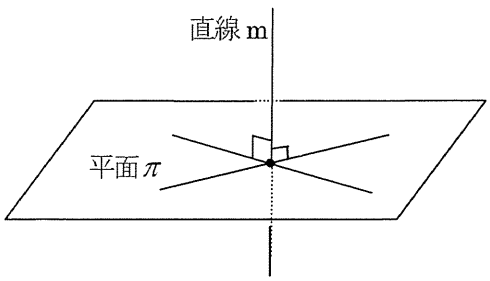


(2) 直線と平面の位置関係

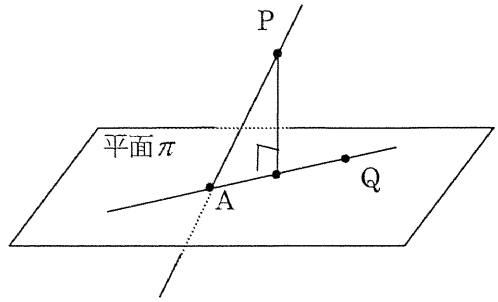
一点で交わる or 平行

or 同一平面上（直線が平面上にある）

平面πと直線mが一点で交わる場合で、直線mが平面π上の２本の直線と垂直であるとき、直線mは平面π上の全ての直線と垂直となる。このようなとき、平面πと直線mは垂直であるという。



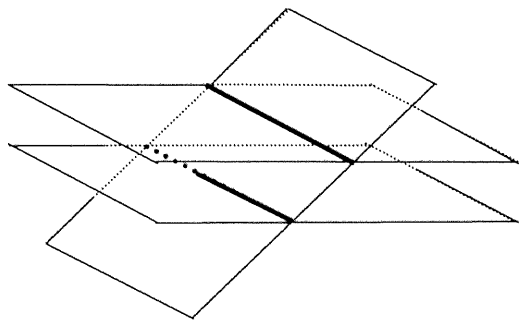
また、直線と平面の交点をＡとし、直線上に点Ｐ、平面上に点Ｑをとり∠ＰＡＱを考えると、∠ＰＡＱが最小になるのは、図のように、Ｐから平面πに引いた垂線が直線ＱＡと交わるときである。このときの∠ＰＡＱを平面と直線の作る角という。



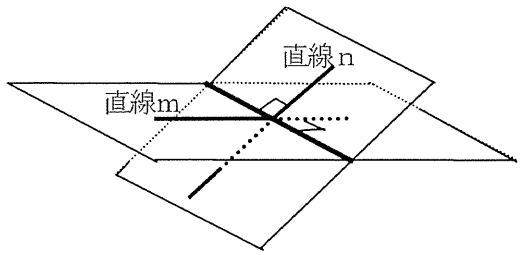
(3) 異なる２平面の位置関係

平行 or 交わる

平行な２平面にもう１つの平面が交わってできる２本の交線は、平行である。



交わる２平面は交線を軸として回転すると重なる。それぞれの平面上にある直線で、交線に垂直なものが作る角を、２平面の作る角という。（２通りできるが、通常は90°以下の方をいう。）



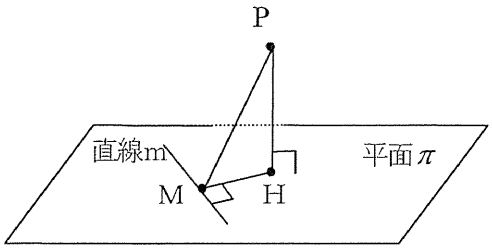
(4) 平面の決定条件

次の点及び直線で、それぞれ一つの平面が決まる。

- **一直線上にない３点**
- **１つの直線とその直線上にない１点**
- **交わる２直線**
- **平行な２直線**

(5) 三垂線の定理

平面π上に直線ｍ、平面π上にない点Ｐがある。Ｐから平面πに引いた垂線をPH、Ｈから直線ｍに引いた垂線をHMとすると、面PHMは直線ｍに垂直となるので、PM⊥直線ｍである。

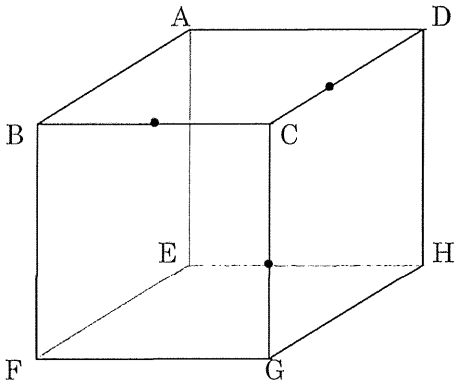


g3－1.2. 立方体の切断

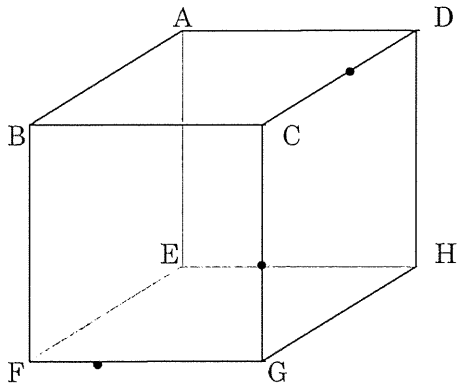
立方体の面上に３点をとり、それらを通る平面による切り口を作図する。様々な作図法を考えることが出来るが、『平行な２直線は同一平面上にあり、同一平面上の２直線は平行か１点で交わる』ことが基本である。

問. 次の３点を通る平面での、立方体 ABCD-EFGH の切り口を作図せよ。

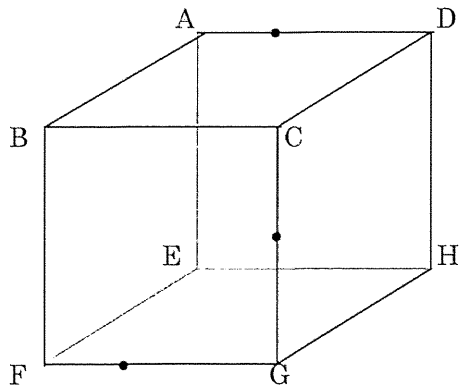
(1)



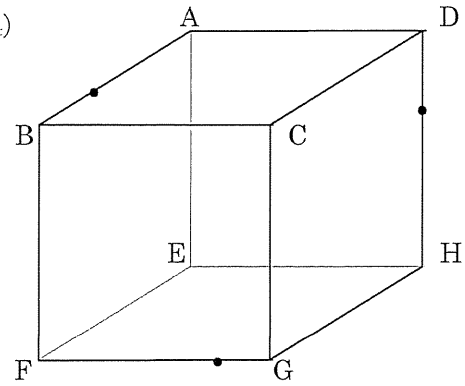
(2)



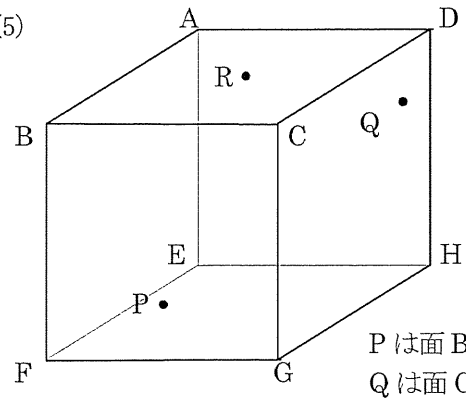
(3)



(4)

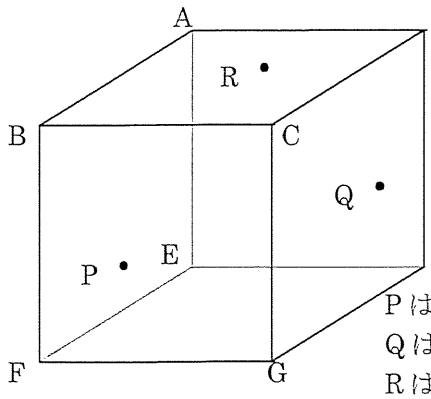


(5)



P は面 BFGC 上
Q は面 CGHD 上
R は面 ABCD 上

(6)



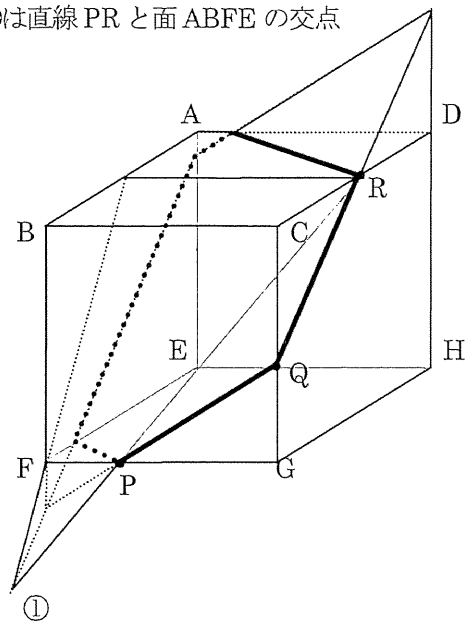
P は面 BFGC 上
Q は面 CGHD 上
R は面 AEHD 上

解答例)

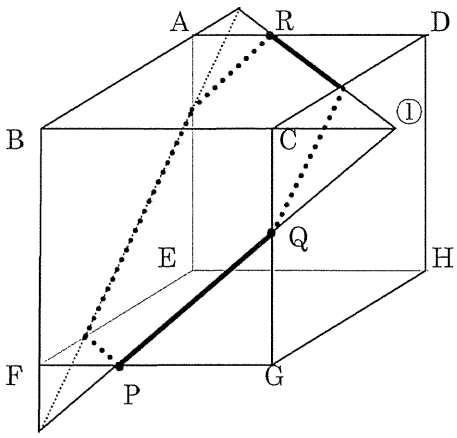
太い実線・点線が切り口である。なお、作図では平行線を引くことが出来るとして良いが、以下の解答例では、辺の平行線以外の平行線をできるだけ用いずに示した。

(1) (解答略)

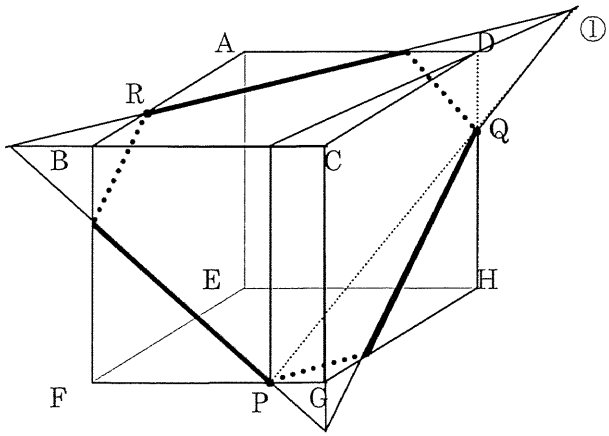
(2) ①は直線 PR と面 ABFE の交点



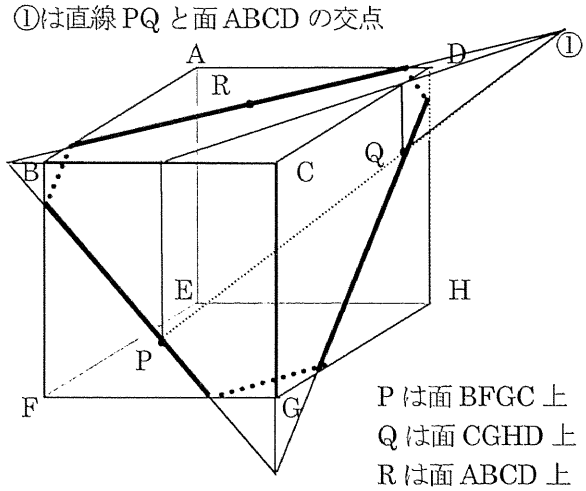
(3) ①は直線 PQ と面 ABCD の交点



(4) ①は直線 PQ と面 ABCD の交点

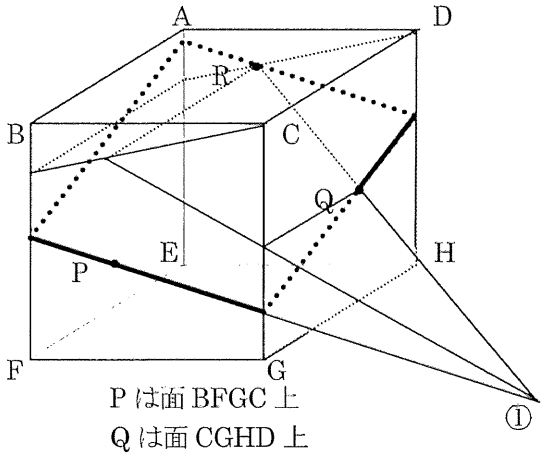


(5) ①は直線 PQ と面 ABCD の交点



P は面 BFGC 上
Q は面 CGHD 上
R は面 ABCD 上

(6) ①は直線 QR と面 BFGC の交点



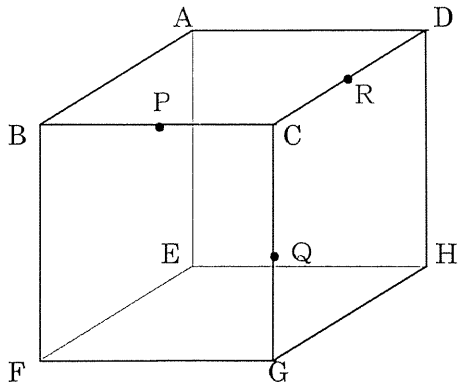
P は面 BFGC 上
Q は面 CGHD 上
R は面 AEHD 上

g3−1.3. 切断面の計量

図形の総合演習として、立方体の切断面について、周の長さと面積を求める。

問. 一辺の長さが 8 の立方体 ABCD-EFGH を、3 点 P, Q, R を通る平面で切ったとき、切り口の周の長さと面積をそれぞれ求めよ。

(1) P, Q, R は、それぞれ、辺 BC, CG, CD の中点

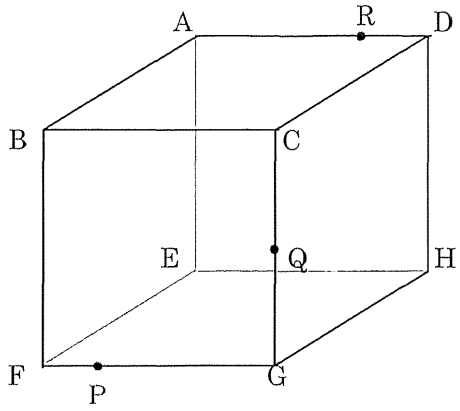


解) 切断面は、PQ=QR=RP=$4\sqrt{2}$ の正三角形。

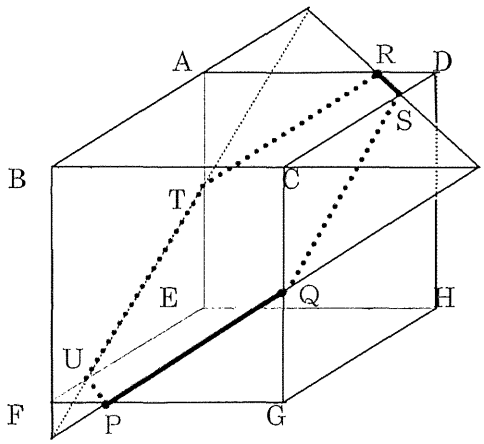
周の長さは、$12\sqrt{2}$,

面積は、$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}=8\sqrt{3}$

(2) Q は辺 CG の中点、P は FG, R は AD 上にあり、FP=DR=2



解) 切断面は図のような六角形 PQSRTU



$PU=2\sqrt{2}$,$PQ=2\sqrt{13}$ だから、

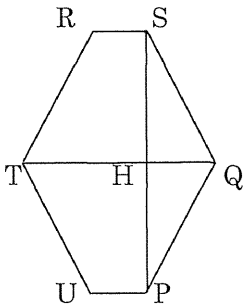
周の長さは $4\sqrt{2}+8\sqrt{13}$

また、右図で、

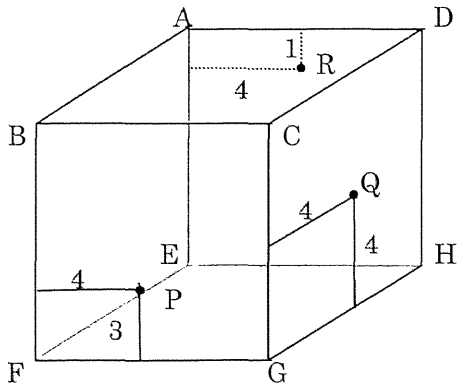
$TQ=8\sqrt{2}$,$HQ=3\sqrt{2}$

$SH=\sqrt{34}$ より

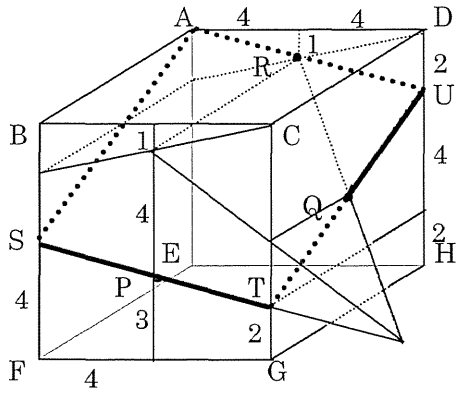
面積は $20\sqrt{17}$



(3) P は面 BFGC 上、Q は面 CGHD 上、
R は面 AEHD 上の点。また、面上の線は立方体の辺に平行で、数値はそれぞれの長さ。



解) 切断面は図のような平行四辺形 ASTU



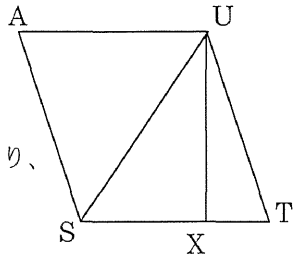
$AU=2\sqrt{17}$,$AS=4\sqrt{5}$ より

周の長さは $4\sqrt{17}+8\sqrt{5}$

また、$SU=2\sqrt{33}$

$SX=\dfrac{30}{\sqrt{17}}$,$UX=\dfrac{8\sqrt{21}}{\sqrt{17}}$ より、

面積は、$16\sqrt{21}$



g3－2. 反転法

関連分野：幾何分野
高等数学：幾何学
対象学年：中学３年生
関連単元：「方べきの定理」
題 材 名：「反転法」

≪大学での学びへつながる中学での学び≫

中学校で学ぶ図形（幾何）分野の内容は，学習指導要領の改訂により薄くなっているように感じる。生徒自ら図形を論理的に捉え，正しく使っていく態度を醸成するためには，よりよい教材を用意する必要があるだろう。

幾何で指導する円と直線は，和算では非常に多く取り上げられた図形であるが，図形の接触関係からピタゴラスの定理や方べきの定理を応用する範囲に限られている。そもそもその範囲を超えると問題が急激に複雑になったり，難しくなるからである。しかし，これらの課題に対しても「円による反転」（以降，「反転」という）を用いると，簡単に問題が解ける場合がある。反転を利用すると和算[2]などに見られる多円がらみの問題に対しても，有効な解法となる場合が少なくない。

ここでは，方べきの定理に関連して反転法を取り上げて，その利用例について解説する。

g3－2.1. 反転の定義

反転を次のように定義する。

点Ｐを直線ＴＰ上で点Ｔに関してＰと同じ側の

$$\mathrm{TP}\cdot\mathrm{TP'}=k^2$$

を満たす点Ｐ'に移すことを，点ＰのＴを中心とする半径kの円による反転という。また，その円を反転円という。

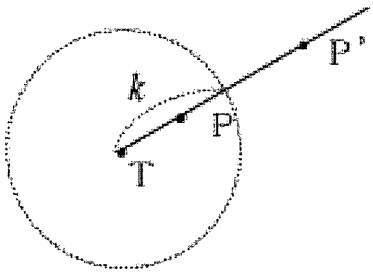


図 g3－2.1. 反転円Ｔ(k)

反転には，次のような性質がある。ここでは，反転円の中心をＴ，半径をkとする。

g3－2.2. 反転の性質

Ⅰ．反転円Ｔ(k)の周上の点Ｐの反転は点Ｐそれ自身である。（自明）

Ⅱ．反転円の中心Ｔを通る直線の反転は，それ自身である。（自明）

Ⅲ．点Ｔを通らない直線はＴを通る円に反転される。

Ⅳ．点Ｔを通る円はＴを通らない直線に反転される。

Ⅴ．Ｔを通らない円はＴを通らない円に反転される。

Ⅵ．反転円に直交する円は，それ自身に反転される。

Ⅶ．反転円の中心Ｔで接する円は，平行な直線に反転される。逆も成り立つ。

Ⅷ．交わらない２つの円は，反転の中心を適当にとれば，２つの同心円に反転される。

Ⅸ．Ｐ，Ｑの反転を．Ｐ'，Ｑ'とすると，

$$\mathrm{P'Q'}=k^2\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{TP}\cdot\mathrm{TQ}}$$

Ⅹ．円Ｏ(r)が円Ｏ'(r')に反転されるとき，Ｔから円Ｏ'(r')に引いた接線の長さをt'とれば，

$$\frac{r}{r'}=\frac{k^2}{t'^2}$$

g3－2.3. 反転の性質の証明

g3－2.3.1. Ⅰ，Ⅱの証明

自明

g3－2.3.2. Ⅲの証明

Ｔを通らない直線→Ｔを通る円

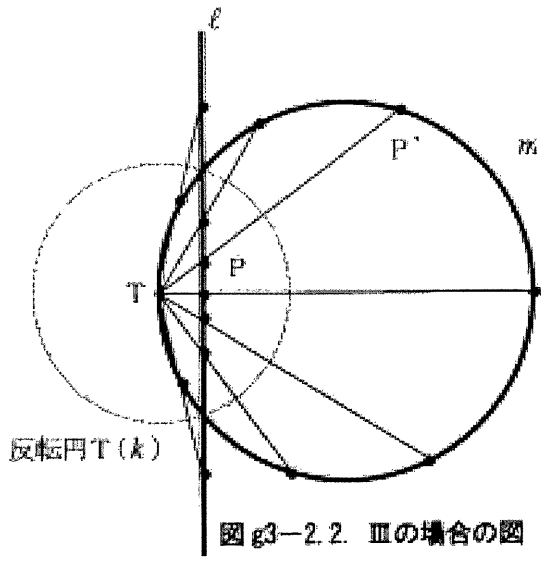


図 g3－2.2. Ⅲの場合の図

[2] 江戸時代末期のころ，法導寺善による算変法も反転法の一つである。

図のように、T(0，0)を通らない直線$\ell : x = p$上の点をP(x_1, y_1)とする。Tを中心として半径kの円によって、点Pが反転された点をP′(X, Y)とする。$x_1 = p$，y_1は任意である。

ここで，反転の性質によって，

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{Y}{X}$$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} = k^2$$

を満たす。

$$(p^2 + y_1^2)(X^2 + Y^2) = k^4$$

$$\left(p^2 + \frac{Y^2}{X^2} p^2\right)(X^2 + Y^2) = k^4$$

$$p^2 (X^2 + Y^2)^2 = k^4 X^2$$

$$(X^2 + Y^2)^2 = \frac{k^4 X^2}{p^2}$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{k^2 X}{p}$$

$$\left(X - \frac{k^2}{2p}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{k^2}{2p}\right)^2 \qquad (2.1)$$

$y_1 \to \pm\infty$のとき$X = 0$であり，この場合も，円mに移される。

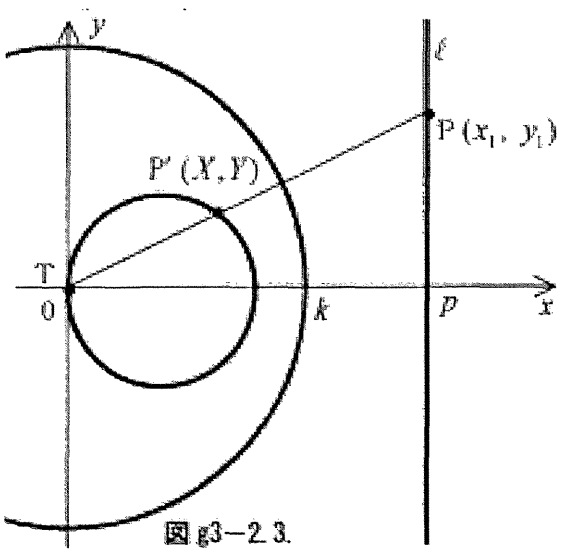


図 g3−2.3.

よって，点Tを通らない直線はTを通る円mに反転される。 ■

g3−2.3.3. Ⅳ，Ⅴの証明

ⅣはⅢの逆であり，Ⅴも同様にして証明できる。

g3−2.3.4. Ⅵの証明

図 g3−2.4. のように，まず円周上に任意の点Pをとり，直線TPとこの円のもうひとつの共有点をP'とする。Tから引いた接線の接点をQとすれば，

$$\angle TQP = \angle TP'Q$$

だから

$$\triangle TQP \backsim \triangle TP'Q$$

よって

$$TP : TQ = TQ : TP'$$

すなわち

$$TP \cdot TP' = TQ^2$$

である。

ここで，Tを中心として半径TQの円による反転を考えると，上記の点T，P，P'の間の関係式は，反転の定義そのものであり，2つの円は直交している。

すなわち，点PはP'に，点P'はPに反転される。よって，この円は不動円である。 ■

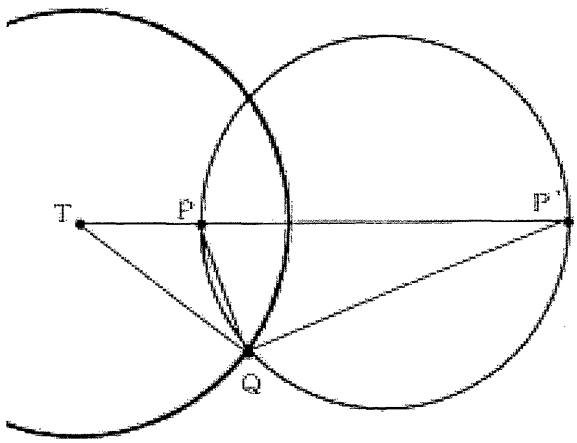


図 g3−2.4.

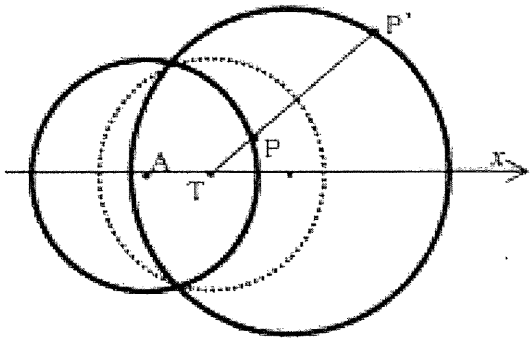
g3−2.3.5. Ⅶの証明

Ⅶは，Ⅳを用いて図形の対称性を考慮すれば明らかである。

g3−2.3.6. Ⅷの証明

交わらない２つの円→２つの同心円

まず，点A(a，0)を中心とする半径αの円A(α)を，点T(t，0)を中心とする半径kの円で反転することを考える（**図g3−2.5.**）。



図g3−2.5.

２つの円は，

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

$$(x-t)^2+y^2=k^2$$

である。

円A(a)上の任意の点P(x_1，y_1)の反転をP'(X，Y)とすると，次の３つの式が得られる。

$$(x_1-a)^2+y_1^2=a^2 \qquad (2.1)$$

$$\frac{x_1-t}{y_1}=\frac{X-t}{Y} \qquad (2.2)$$

$$\sqrt{(x_1-t)^2+y^2}\cdot\sqrt{(X-t)^2+Y^2}=k^2 \qquad (2.3)$$

ここで，(3.2)を変形して

$$x_1-t=\frac{X-t}{Y}y_1 \qquad (2.4)$$

また　$Yx_1=(x-t)y_1+Yt$　(2.5)

(3.3)と(3.4)から

$$\sqrt{\frac{(X-t)^2}{Y^2}y_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{(X-t)^2+Y^2}=k^2$$

よって　$\{(X-t)^2+Y^2\}\dfrac{y_1}{Y}=k^2$　(2.6)

一方，(2.1)と(2.4)から

$\{(X-t)y_1+(t-a)Y\}^2+Y^2y_1^2=Y^2a^2$

$(X-t)^2y_1^2+2(t-a)(X-t)y_1Y+(t-a)^2Y^2+Y^2y_1^2=Y^2a^2$

$\{(X-t)^2+Y^2\}y_1^2+2(t-a)(X-t)Yy_1+\{(t-a)^2-a^2\}Y^2=0$

この２次方程式を解いて

$$\frac{y_1}{Y}=\frac{-(t-a)(X-t)\pm\sqrt{D}}{\{(X-t)^2+Y^2\}} \qquad (2.7)$$

ただし，

$$D=(t-a)^2(X-t)^2-\{(X-t)^2+Y^2\}\{(t-a)^2-a^2\}$$

(2.6)と(2.7)から，$\pm\sqrt{D}=(t-a)(X-t)+k^2$

よって，

$$D=(t-a)^2(X-t)^2-\{(X-t)^2+Y^2\}\{(t-a)^2-a^2\}$$

$$=(t-a)^2(X-t)^2+2k^2(t-a)(X-t)+k^4$$

$$\{(t-a)^2-a^2\}(X-t)^2+2k^2(t-a)(X-t)+\{(t-a)^2-a^2\}Y^2+k^4=0$$

$$(X-t)^2+\frac{2k^2(t-a)}{\{(t-a)^2-a^2\}}(X-t)+Y^2+\frac{k^4}{\{(t-a)^2-a^2\}}=0$$

よって

$$\left\{X-t+\frac{k^2(t-a)}{(t-a)^2-\alpha^2}\right\}^2+Y^2=\left\{\frac{\alpha k^2}{(t-a)^2-\alpha^2}\right\}^2$$

$y_1=0$のときも，この円に含まれる。

点(b，0)を中心とする半径bの円B(b)についても同様に，

$$\left\{X-t+\frac{k^2(t-b)}{(t-b)^2-\beta^2}\right\}^2+Y^2=\left\{\frac{\beta k^2}{(t-b)^2-\beta^2}\right\}^2$$

この２円が同心円である条件は，

$$t-\frac{k^2(t-a)}{(t-a)^2-a^2}=t-\frac{k^2(t-b)}{(t-b)^2-b^2}$$

よって　$\dfrac{t-a}{(t-a)^2-a^2}=\dfrac{t-b}{(t-b)^2-b^2}$

$$(a-b)t^2-\{(a^2-b^2)-(a^2-b^2)\}t+\{ab(a-b)+(ab^2-ba^2\}=0$$

ゆえに，これを満たす点T(t，0)で反転すれば同心円が得られる。　■

＜反転の性質Ⅷの同心円を反転させる例＞

$$\begin{cases} x^2+y^2=4^2 & (a=0,\alpha=4) \\ (x-10)^2+y^2=4^2 & (b=10,\beta=4) \end{cases}$$

この２つの交わらない円を同心円になるように反転させる（**図 g3−2.6.**）。

結果の式に，a，b，a，b を代入すれば，

$t^2 - 10t + 16 = 0$

よって，$t = 2,\ 8$

$t = 8$ ，$k = 4$ とすると，反転によって点$\left(\frac{16}{3}, 0\right)$

を中心とする同心円になる。k を変化させれば，同心円の中心と半径がともなって変化する。

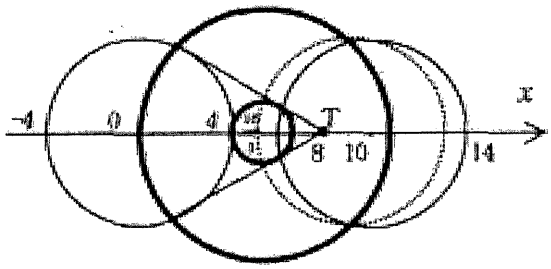


図 g3−2.6.

g3−2.3.7. Xの証明

(i) 円O(r)の直径ＡＢが点Ｔを通り，Ｔ，Ｂ，Ａの順に並んでいるとすると，

$$2r = \mathrm{TA} - \mathrm{TB} = \frac{k^2}{\mathrm{TA}'} - \frac{k^2}{\mathrm{TB}'}$$

$$= (\mathrm{TA}' - \mathrm{TB}')\frac{k^2}{\mathrm{TA}' \cdot \mathrm{TB}'} = 2r'\frac{k^2}{t'^2}$$

よって

$$\frac{r}{r'} = \frac{k^2}{t'^2}$$

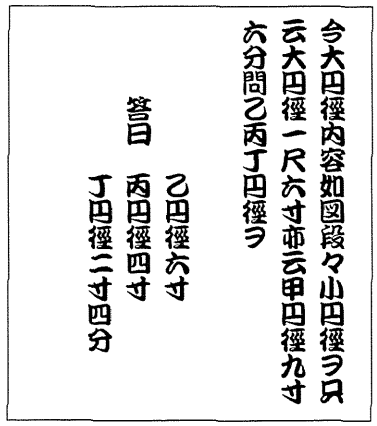
(ii) Ｔが線分ＡＢ上にあるときも同様に証明される。■

g3−2.4. 江戸時代の算額の問題に挑戦

江戸時代の算額の問題を反転法で解いてみよう。

g3−2.4.1. 奈良県大和郡山市の庚申堂の算額

奈良県大和郡山市の庚申堂には，全７問ある算額が１面奉納されている。ここで取り上げるのは，第４番目の問題(**図 g3−2.7.**)である。風化が激しく判読できないが，白文(漢文)で書かれている


今大円徑内容如図段々小円徑ヲ只
云大円徑一尺六寸弐分甲円徑九寸
六分問乙丙丁円徑ヲ

答曰　乙円徑六寸
　　丙円徑四寸
　　丁円徑二寸四分

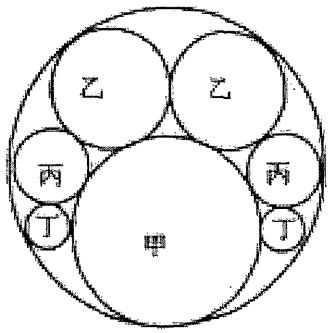


図 g3−2.7.

＜現代訳＞

図 g3−2.7. のように，大円の内につぎつぎに小円を入れる。大円と甲円の直径がそれぞれ 16 尺，9 寸 6 分のとき，３円乙，丙，丁の直径をそれぞれ求めなさい。

＜解法＞

大円(R)と甲円(r)の交点Ｏを中心として，半径ＯＡ($=a$)の円で反転すると，大円(R)と甲円(r)はそれぞれ平行な２直線L，ℓに反転される。またこの反転によって，乙円は$C_1(r_1)$(自身)に，丙円，丁円はそれぞれ$C_2(r_2)$，$C_3(r_3)$に反転する。(**図 g3−2.8.**)

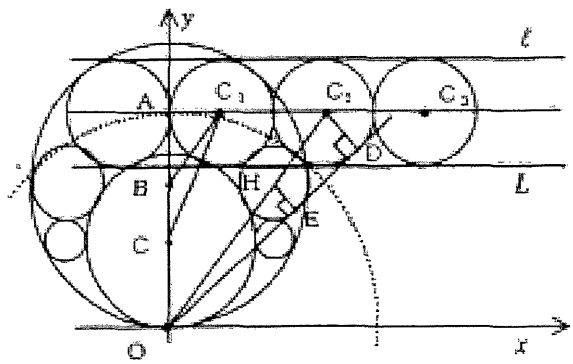


図 g2−2.8.

反転した円は，$r_3 = r_2 = r_1$ であることに注意すれば，

図の各点の座標と直線の方程式は次のようになる，。

A(0，a)，B(0，R)，C(0，r)，$C_1(r_1$，a)，C

$_1(3r_1$，a)，$C_3(5r_1$，a)

直線 $L : y = a - r_1$，直線 $\ell : y = a + r_1$

である。

次の三角形に三平方の定理を用いて

$$\triangle ACC_1 : (r_1 + r)^2 = r_1^2 + (a - r)^2 \quad (2.8)$$

$$\triangle ABC_1 : (R - r_1)^2 = r_1^2 + (a - R)^2 \quad (2.9)$$

(2.8)より，$2rr_1 = a^2 - 2ar$

(2.9)より，$2Rr_1 = 2Ra - a^2$

(2.9)を r_1 について解き，(2.8)に代入すると，

$$a = \frac{4Rr}{R + r} \qquad (2.10)$$

$$r_1 = \frac{4Rr(R - r)}{(R + r)^2} \qquad (2.11)$$

丙円の半径を m とすると，

△OHE相似△OC_2Dより

$$(r_1 + a) : (a - m) = r_1 : m$$

よって　　$m = \dfrac{ar_1}{a + 2r_1}$

(2.10)，(2.11)より

$$m = \frac{ar_1}{a + 2r_1} = \frac{\dfrac{4Rr}{R + r}\dfrac{4Rr(R - r)}{(R + r)^2}}{\dfrac{4Rr}{R + r} + 2\dfrac{4Rr(R - r)}{(R + r)^2}}$$

ゆえに　　$m = \dfrac{4Rr(R - r)}{(3R - r)(R + r)}$ (2.12)

この結果より，条件の $R = 8$（寸），$r = 4.8$（寸）から，丙円の半径 m は

$$m = \frac{2 \times 4.8 \times 8 \times (8 - 4.8)}{(3 \times 8 - 4.8)(8 + 4.8)} = 2 \quad (寸)$$

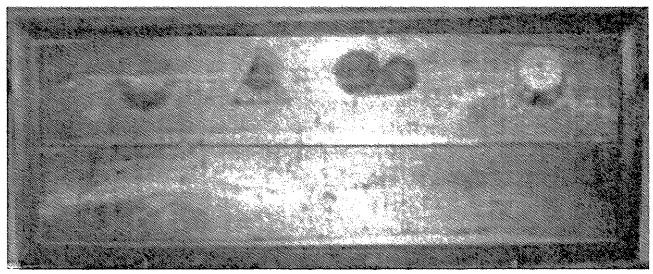
ゆえに，**丙円の直径は４（寸）‥‥（答）**

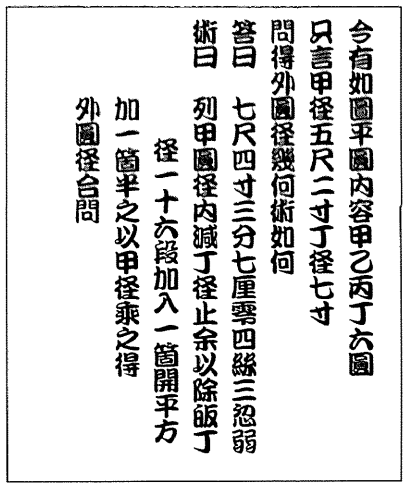
乙円，丁円についても同様にして求めればよい。

■

g3－2.4.1.　奈良県橿原市の耳成山口神社の算額

奈良県橿原市の耳成山口神社には，全４問ある算額が１面奉納されている。ここで取り上げるのは，第４番目の問題(**図 g3－2.9.**)である。庚申堂の算額と同様，問題文は白文(漢文)である。神社の社務所で大切に保管されていたためか，色鮮やかな算額である。嘉永７年(1854 年)奉納。





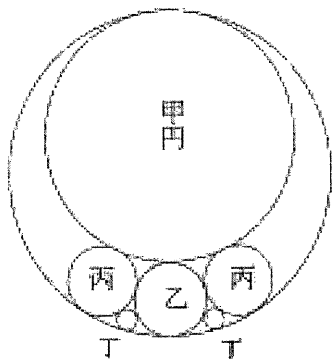


図 g3－2.9.

（現代訳）　**図 g3－2.9.** のように，平円の内側に甲円，乙円，丙円，丁円が接するように入れてある。甲円の直径が５尺２寸，丁円の直径が７寸のとき，外円の直径を求めなさい。

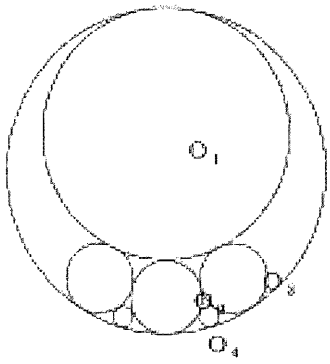


図 g3−2. 10.

図 g3−2. 10. のように，問題の甲円，乙円，丙円，丁円をそれぞれO_1，O_2，O_3，O_4とする。

外円をO，題意よりO_1の直径は 5.2，O_4の直径は 0.7 である。O_2の直径をaとおく。

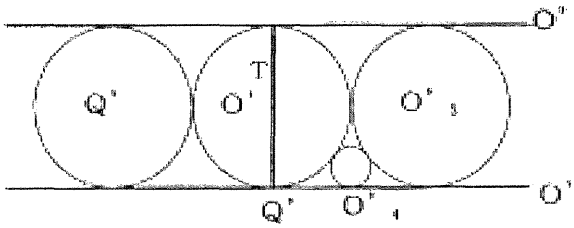


図 g3−2. 11.

ここで，**図 g3−2. 11.** のように中心T，半径１の円で反転させると，円Ｏ１，Ｏ２は２つの平行円に反転され，３つの反転円は図のような接解関係にある。円Ｏ４'の半径をｒとおく

ところで，反転の性質X

「円O(r)が円O'(r')に反転されるとき，Tから円O'(r')に引いた接線の長さをt'とれば，

$$\frac{r}{r'}=\frac{k^2}{t'^2}$$

ここで，kは反転定数（反転に使う円の半径)」より，円Ｏ４，円O'４について

$$\frac{0.35}{r}=\frac{1}{t^2} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

$$t^2=\left(\frac{1}{a}-r\right)^2+\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{5.2}\right)\right\}^2-r^2 \cdots\cdots(2.14)$$

さらに，下の図より，

$$\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}+2r\right)^2=\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}-2r\right)^2+\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\right)^2$$

が導ける。これより，

$$8r\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}+\right)=\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}+\right)^2$$

$\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\neq 0$ より，$8r=\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}$ ……(2.15)

$\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}=x$ とおくと，$\frac{1}{a}=x-\frac{1}{5.2}$ であり，

(2.14)，(2.15)より

$$r=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{8}x \text{ だから}$$

$$t^2=\frac{1}{a^2}-\frac{2r}{a}+\frac{1}{4}x^2$$

$$=\left(x-\frac{1}{5.2}\right)^2-\frac{x}{4}\left(x-\frac{1}{5.2}\right)+\frac{1}{4}x^2$$

$$=x^2-\frac{35}{104}x+\frac{25}{26^2}$$

(2.13)より $\quad\frac{2.8}{x}=\frac{1}{x^2-\frac{35}{104}x+\frac{25}{26^2}}$

よって $\quad x^2-\frac{35}{104}x+\frac{25}{26^2}=\frac{5}{14}x$

２次方程式 $\quad x^2-\frac{505}{728}x+\frac{25}{676}=0$

$$x=\frac{505\pm 15\sqrt{785}}{1456}$$

$$\frac{1}{a}=x-\frac{1}{5.2}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{505\pm 15\sqrt{785}}{1456}-\frac{1}{5.2}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{225+15\sqrt{785}}{1456}$$

ゆえに，円Ｏの直径は

$a=\frac{13(\sqrt{785}-15)}{75}\approx 2.256427585$（尺）である。

■

(注)　この結果は，算額の答えと若干ではあるが一致していない。

g3−2.3.5. 反転の例

反転では，反転の中心をどこに取るのかによって反転後の図（和算では『極図』という）がかわる。このことは，反転を難しい数学にしているように思う。

ここでは，反転の中心によって極図がどのようになるのかをいくつか示しておく。

＜例＞　次の**図 g3－2.12.**において，反転してできる極図を作りなさい。

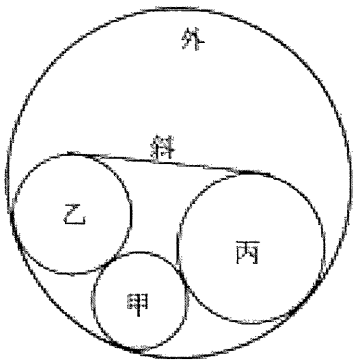
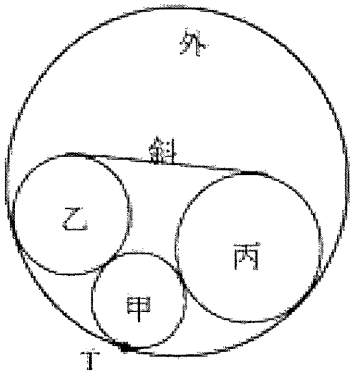


図 g3－2.12.

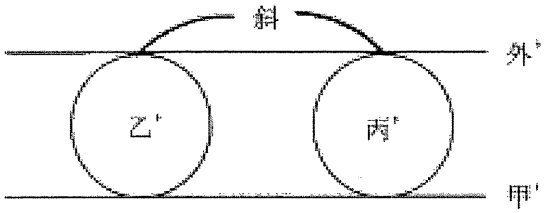
(1) 外円と甲円の接点Ｔを反転の中心とした極図



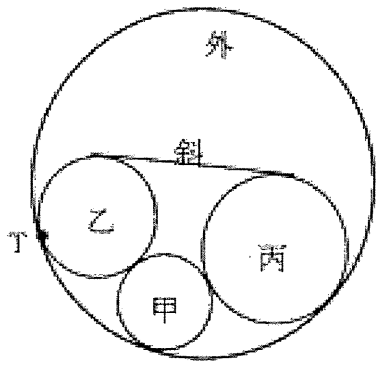
(図(1))

＜極図＞

(図' (1))



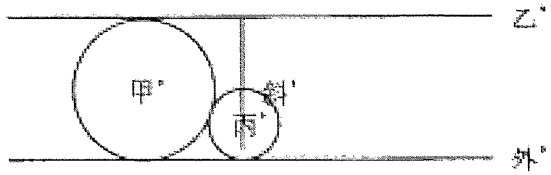
(2) 外円と乙円の接点Ｔを反転の中心とした極図



(図(2))

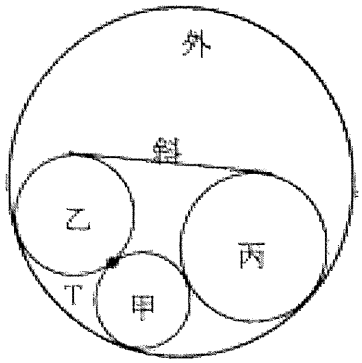
＜極図＞

(図' (2))



(注) 斜'が外'に届いていない。

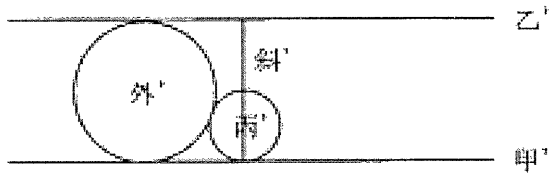
(3) 甲円と乙円の接点Ｔを反転の中心とした極図



(図(3))

＜極図＞

(図' (3))



【参考文献】

1. 清宮俊雄　『初等幾何学』(裳華房)
2. 岩田至康　『幾何学大辞典第１巻』(槇書店)
3. 米山忠興　『算額４』(東洋大学紀要 43 号)
4. 北原　勲　『「観新考算変」による長野県ないの算額の解法』(第３回全国和算研究大会)
5. 牧下英世　『数学教育を通して取り組んだ総合的な学習とその実証的な研究』(筑波大学附属駒場論集第 42 集)

D2. グラフ描画の方法

―テクノロジーへの挑戦―

関連分野：解析分野
高等数学：解析
対象学年：高校２，３年生
関連単元：微分法・積分法
教材名：「グラフ描画の方法」

≪グラフを描くことに挑戦する教材≫

グラフを描くことは，関数の表現として大変重要な位置を占めている．高校数学では，微分して増減表を書き，グラフを描く学習をするが，関数は簡単な式であっても，微分して増減表を書くこともできないものも多数存在する．そんな場合にもグラフの概形を描く方法を教えたい．また，グラフから計算せずに導関数のグラフの概形を描いたり，関数のグラフを与えて，その不定積分のグラフの概形を描いたりする指導もしたい．

D2.1. 関数のグラフの基本指導

これまでの授業経験から，関数のグラフの基本事項は次の３つであると考えている．

基本１：プロットとファイバーの違い

$y=f(x)$ のグラフとは，$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in\Re\}$ なる集合を正規直交座標系の座標平面に表現することである．プロットとは，点 (x,y) をこの座標平面にとるコンピュータ的（デジタル）思考のことである．一方，ファイバーとは，x において，基準線 $y=0$ から $f(x)$ 分だけ上下に変化させる人間的(アナログ)思考のことである．

これらの違いは，基準線を意識しているかの違いであり，前者は機械的である利点はあるが，基準線の変化に対応するしなやかな力は育ちにくい．

基本２：$y=m(x-p)+q$

１次関数は，中学２年での学習内容であるが，教師は，１次のテーラー展開であることを認識しておく必要がある．中学では，$y=ax+b$ とおいて，

連立方程式で係数を求める計算を繰り返すが，それで終わっては，式自身が持つ生き生きした姿を理解できない．１次式は，

$y=2x+1=2(x-1)+3=2(x-2)+5=2(x+1)-1$

$=\cdots$　と無限に変身が可能である．これが基本である．

ここで，‘変身’とは，恒等的に等しい等式変形のことである．あえて，式変形と言わないのは後述 **D2.7.**の例４)で示すような多項式関数以外も配慮しているからである．一つの式を色々な式の形に変えることは自由であり，どう変身させるかは考える人の工夫に任されている．変身することで，式が生き生きしてくるときがある．

基本３：基本関数の和

関数が和の形で表現されている場合は，基準線（曲線の場合もあり）が内包されていることである．（後述する **D2.7.**の例５で，積にも基準線（包絡線）が内包されていることを示す．）

例えば，$y=-x^2+2x+2$ では，$y=2x+2$ が基準線である．この基準線から，x^2 だけ下回ればよい．

多項式関数は，式を昇べきの順に見て考えることが基本である．

平方完成は必要に応じて計算をすることである．平方完成は１次が欠損しているテーラー展開であることも，認識しておくことが深い理解をすることになる：$y=a(x-p)^2+q$ で，$a>0$ のとき，$x=p$ 以外は $y=q$（$x=p$ での接線）より大きくなることを読み取ることが基本である．単に，頂点 (p,q)，ｙ切片では，単なる記憶の世界へ追いやる．

問題　「$y=ax^2+bx+c$ のグラフが**図 D2.1.**のようであるとき，係数 a,b,c の正負は？」について，b が即答できないと，構造を理解していないことになる．これら２次関数のグラフの構造については，駒野(1995)（早稲田大会）があるが，未だに，頂点の位置で b の正負を決定している参考書が多数である．

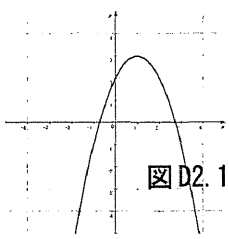


図 D2.1.

D2.2. グラフ描画の課題

(1)式とグラフが関連していることを理解するのには，いろいろな場面でこれらのリンクについて，強調した指導が重要である．

⑵また，グラフの概形を描くために，新しい概念『グラフを制御する』を導入する．テクノロジーを確認として用い，数学の良さを実感できる数学的活動とする．

では，グラフを描くとは，どういうことなのか？実関数に関して，定義域の，すべての実数の値を得ることは不可能であり，作図と同様，概形しか描けない．
では，概形とはどんなことを考慮すればよりよく描けるのだろうか．

D2.3. 式からグラフを描く

D2.3.1. 等式から関数へ：1次元から2次元へ

方程式 $f(x)=0$ とは，零点を隠している等式と見ることができる．しかし，全体像がそこにはない．$y=f(x)$ と置くことで，1次元の数直線上の話が2次元の座標平面上の話に移行する．

基本の2次方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ もそうである．$y=ax^2+bx+c$ と平面上の関数を考えることで，世界は広がる．また，$y=ax^2, y=-bx-c$ など2つの関数を考えることもできる．しかも分割は自由である．グラフと方程式がリンクしていることの大切さを学ばせたい．この1次元から2次元へを授業では，「ナスカを見よう」と話する．

D2.3.2. 関数の式からグラフを描く

これまで，2次関数のグラフは，平方完成によって，3次関数以上の多項式のグラフや超越関数のグラフは微分によって増減表によるグラフ描画が指導の中心であった．しかし，微分したからといってグラフが描けるわけではないことは，簡単な式でもすぐにわかる．

グラフを描く方法の一つに，グラフ電卓やMathematica等のテクノロジーで描く方法がある．しかし，当然であるが，出力で描かれるのは入力する人が*入力した関数のグラフのみ*である．しかし，この研究では，描きたい関数のグラフを描くためには，その関数そのものだけではない，その関数の式に含まれている，隠された情報を引き出して，制御する関数のグラフを描くことが重要であることがわかってきた．これはテクノロジーへの挑戦でもある．

D2.4. グラフの概形とは何なのか？

陽関数 $y=f(x)$ のグラフは，定義域のすべての x について，y の値を求め，その組である点 (x,y) を座標平面に表現することで描くのが基本である．

これは比喩的に表現すれば，無限マンツーマンディフェンスのようなもので，コンピュータのデジタル処理である．しかし，非可付番無限である実数の値を調べるわけにはいかない．

それでは，‘グラフの概形’とは何なのか？
これを比喩的にゾーンディフェンスというアナログの考え方に切り換えてみる．
グラフの概形を描く考え方をまとめると：
順不同であるが，
（1）：グラフが存在するゾーンを調べる．
（2）：グラフを制御するグラフを描く．
　①：描きたいグラフを制御するグラフを描く．
　　ゾーンをより狭めた境界ライン(漸近線，包絡線，接線)を描く．
　②：制御のグラフ(同一平面上には描けない)
　　が間接的に制御・誘導しているもの．
（3）：グラフの特殊な通過点や極限も調べる．
　x切片，y切片，接点，$x\to\pm\infty$，$x\to\pm 0$，
　$s\to\pm a$ などの極限も考える．
これら(1)，(2)について少し詳しく見てみよう．

D2.5. (1)：ゾーン

・定義域や分母＝0の線などによって，座標平面が分割され，グラフがその分割された座標平面のどこに出現するのか．
・グラフの対称性や周期性を考え，どこを重点的に考えればよいのか．

例1）$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ について

分母＝$x^2-1=(x-1)(x+1)$ から，漸近線 $x=\pm 1$

また，$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ から，漸近線 $y=x$

よって，座標平面は6つに分割され，奇関数だから，3つの領域を考えればよい．

原点を通り，原点近くで y の値の変化は小さいことがわかるとよりよいグラフが描ける．

D2.6. (2)：制御するグラフ

・図形では，見えない線（補助線）が重要な働きをする．グラフにおいても，補助線（補助曲線）が有効なはずである．それは，見える式に含まれた，見えない情報である．

では，制御するグラフについて例をあげて説明する．
制御するとは，描きたい関数のグラフの動きをコント

ロールすることである. 時に, 境界ラインであったり, 関数の特別な値を決定したりするものである.

描きたいグラフを描くために. 制御する基本のグラフがあってこそ, 概形が描けると考える.

例2） $y = x\sin x$ を考えてみる.

$y = x\sin x$ について, $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから,

$-x \leqq y \leqq x$ つまり, $y = x$, $y = -x$ がその制御する関数である.

また, 制御する関数のグラフと接する値は, $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ のときであるから, それぞれ

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

のときである.

増減表を作ろうと思って, 微分すると,

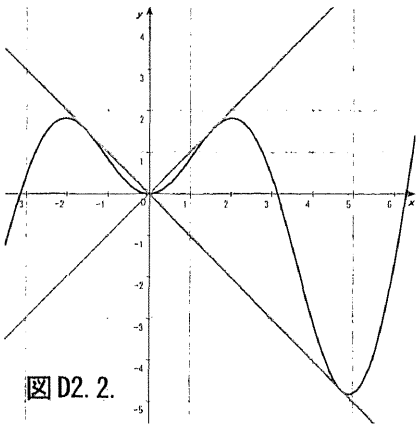


図 D2. 2.

$y' = \sin x + x\cos x$

$= \sqrt{x^2+1}\cos(x-\alpha)$ ただし, $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ であるから, 零点は計算では無理である. この導関数のグラフを制御するグラフは, $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ である.

数式処理ソフト Mathematica で計算させると,

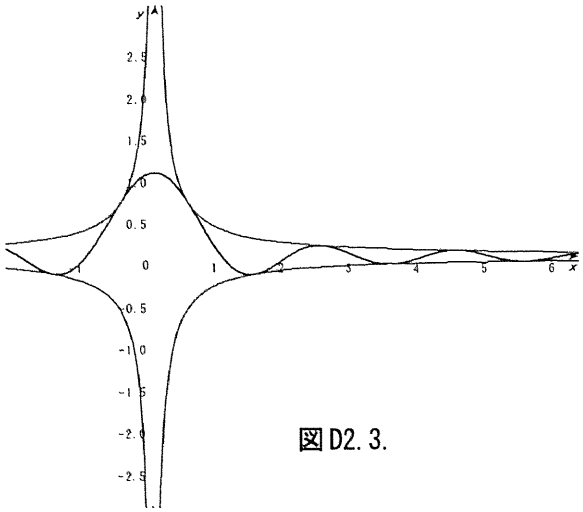


図 D2. 3.

FindRoot[Sin[x] +x Cos[x] == 0, {x, 2}]

$x \approx 2.02876$

FindRoot[Sin[x]+x Cos[x]== 0, {x, 4}]

$x \approx 4.91318$

D2.7. 接するとは, どういうことなのか

接するとは, 接点での共通な接線が存在するときである. 接点の近くでは曲線と接線とのギャップがその左右でほぼ等しいようにグラフを描く.

接線を共有していることを考えさせるよい例を示す: 極大・極小が接点から少しずれる様子を理解しやすい.

例3） $y = \frac{1}{x\sin x}$ のグラフ

これも, 微分しても増減表が書けないため, 教科書等には現れない. 「数学II」で, 生徒に制御する関数を考えさせるとよい問題であって, 教師が講義するようなら, 生徒に負担をかけるだろう.

図 D2. 4. には $y = x\sin x$ も描き入れてあるが, その逆数よりはこの制御する関数のグラフ $y = \pm\frac{1}{x}$ に接することがわかると, グラフ描画ソフトとほぼ同じようなグラフを手で描け, 人間の能力に驚く.

テクノロジーに頼ることなく, 描けることに感動がある. これによって, 手書きのグラフの確認としてのテクノロジーの利用法がある.

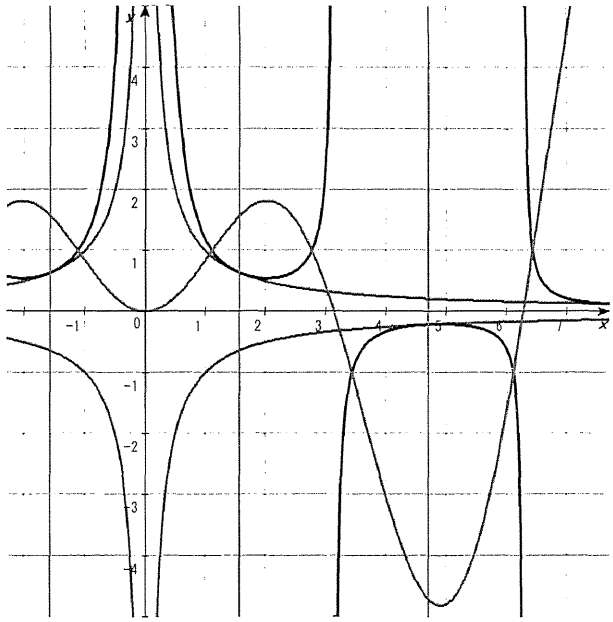


図 D2. 4.

例4） $y = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$ のグラフは, 制御する関数は,

$y = \pm\frac{1}{\pi x}$ であるから, 次のようである.

x 軸との交わりから, $\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

という無限次数の変身ができる．また，

$\sin x$ が $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$ と多項式に変身できるから，係数比較によって，ツェータ関数

$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ も導ける．

例５） $y=\sin 51x+\sin 49x$ について

２つの周波数が近いサインカーブの和は一方を基準線として和を描くにはｘ軸方向に相当拡大しないと困難である．たとえ，微分したとしても，$y'=0$ を満たす x の値を求めることができず，増減表を書くことは不可能である．このままでは制御する関数が見えないが，積にすることで隠れていた制御する関数が見えてくる．和積の公式の意義を納得させるにも，この‘制御する’概念を指導するよい教材である．物理のうなりとの関連である．

$y=\sin 51x+\sin 49x=2\sin 50x\cdot\cos x$

$y=\pm 2\cos x$ が制御する関数のグラフ（包絡線）であり，この間で，100 回接するように描く．

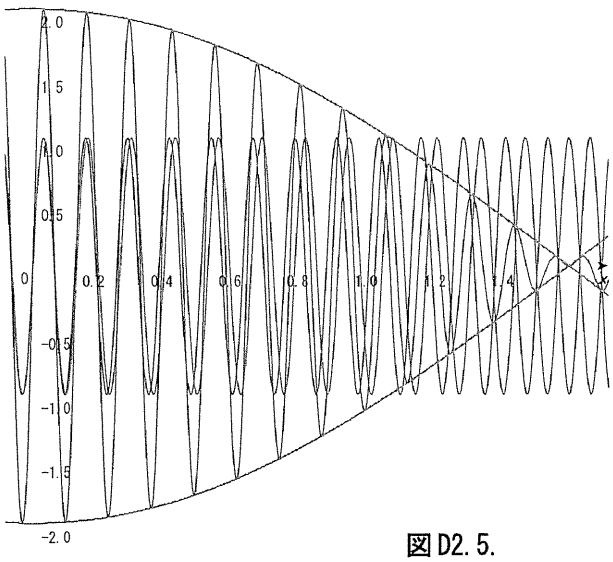


図 D2. 5.

例６） $y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ のグラフを再考してみよう．

①$x=0$ で微分可能である：$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

②$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$ などよい問題がかくれている．グラフは，式に隠れた制御する関数を考えれば描ける．

包絡線の $y=\pm x$ に接するのは，$\frac{1}{x}=\pm\frac{\pi}{2}+n\pi$ つまり，$x=\frac{2}{(2n\pm 1)\pi}$ であるから，ｎの値が大きくなるにつれて，ｘの値は小さくなるので，原点近くでは振動が激しくなる．最大のｘの値は $n=0$ のときで，$x=0.636619772\cdots$ である．

解析概論[7]では，$y=1$ の制御するグラフが描いていない．

制御の概念はなかったと思われる．

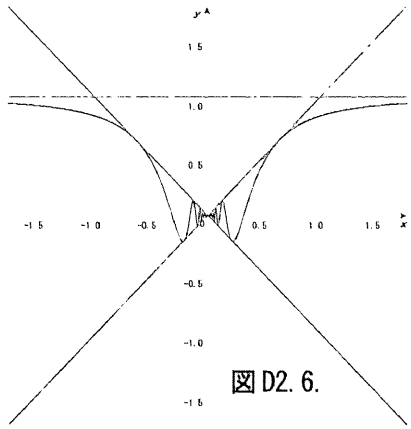


図 D2. 6.

D2.8. 2次微分なしに凹凸をどのように考えているのか

（１）日本の教科書[8]

単調増加についての記述：

「ある区間で常に $f'(x)>0$ のとき，グラフの接線は右上がりであるから，その区間では，x の値が増加すると，$f(x)$ の値も増加する.」そして，**図 D2. 7.** のようなグラフが描かれている：

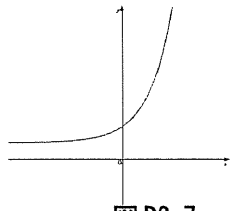


図 D2. 7

これでは，単調増加が下に凸と勘違いさせてしまうと思われる．３次関数のグラフについても，導関数を求め，x, y', y についての増減表をかき，それからグラフを描いている．なぜ，その増減表で３次関数のグラフの凹凸が言えるのだろうか？

（２）外国のテキストを調べる

最も論理的に書かれていると考えられるフランスのテキスト[9]より，紙面の関係上，流れのみを紹介すると，

①$f(x)=x^3$ について，$f'(x)=3x^2$（$x=0$ 以外では $f'(x)>0$ で増加である．また，$x>1$ では $x^3>x^2$ である．f は奇関数であるから，原点対称である．

$f'(0)=0$ また，$0<x<1$ では $x^3<x^2$

②$f(x)=x^3+px+q$　$f'(x)=3x^2+p$ で，$p>0$ のとき単調増加．$p<0$ のとき $f'(x)=0$ をみたす解を x_1, x_2（$x_1<x_2$）とすると，$x_1<x<x_2$ では $f'(x)$ は負である．よって，$f(x)$ は単調でない．

例1　$f(x)=x^3+2x-3$　$y=2x-3$ 上の点 $P(x,2x-3)$ と曲線上の点 $M(x, x^3+2t-3)$ との距離 $\overline{PM}=(2x-3)-(x^3+2x-3)=x^3$

例2）$f(x)=x^3-2x+3$ についても同様にPMを計算している．その後，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $f(x)=a(x-\alpha)^3+p(x-\alpha)+q$ と変形する α を求め，$g(X)=aX^3+pX+q$ に帰着させている．（下線筆者）

このテキストのよい点は，下線の内容が書かれていることである．

さて，これまでの3次関数のグラフの描画法では欠陥があった．増減表の矢印のyに関する増加・減少では，グラフの凹凸がわからない．

数学学習が論理的思考力の養成を謳うなら，ここはきちんとしたい．

極大点・極小点・切片とyの増減だけでグラフの概形を描くのは無理である．そもそも，3次関数の極値を与える数が無理数の場合にその極大値・極小値を求めることは易しくないし，それらを小数に直してグラフを描くのも容易ではない．参考までに，3次関数 $y=f(x)$ は，次のような変身ができる：$y=f(x)=k\,f'(x)\times f''(x)+mx+n$　このとき，$y=mx+n$ は，極大点・変曲点・極小点の3点を通過する直線である．これによって，極大値・極小値を1次式で求められる．この変身を知らないと，増減表を作ることさえ簡単ではない．しかも，単調増加には下に凸と上に凸の2つのタイプがあるが，それは x, y', y の増減表には現れていない．では，「数学Ⅲ」の2次微分を持ち出さずに，「数学Ⅱ」の範囲でグラフの指導をすればよいのだろうか．

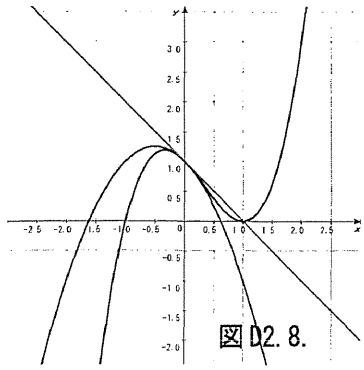
$y=x^3-x^2-x+1$　のグラフを制御する関数

図D2.8. で，制御する関数のグラフは，$y=-x^2-x+1$ である．また，これを制御する関数は，$y=-x+1$ である．これによって，y軸の左側は，2次関数に制御されているので，x軸方向へ開いた下に凸なグラフになり得ない．では，y軸の右側はどうなのか？「数学Ⅱ」での3次関数について，指導の根幹であるが，これまで教科書で蔑ろにされてきたことである．

（3）調査問題

筑波大学附属駒場高校3年生「数学Ⅲ」選択者（84名）に，次の調査問題を1学期に実施

調査結果：正解は1割であった．これらの生徒は，期末考査でも高得点であった．他校の先生方と教育実習生にもヒヤリングをしたが，即答正解者はいなかった．生徒の多くは，$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty$ であるからとする解答が見られた．これによって，yの＋∞によって，グラフが下に凸で上昇するイメージを生徒がもっていることが感じられた．


図D2.8.

凹凸は学習していなくとも，2次関数が理解できていれば，いろいろな発見があるはずであり，指導も可能である．（具体的には，後述 **D2.10. グラフからグラフを描く** を参照のこと）

駒野県　教員採用試験2008（6題150分の1番）

［1］　高校2年のAさんは，「3次関数 $y=x^3-x^2-x+1$ のグラフの概形を描く」問題で，下に示すような点対称なグラフを描きました．正しいグラフが描けるようになるために，あなたはAさんにどのような説明をしますか．ただし，「数学Ⅱ」の範囲ですので，y'' とグラフの凹凸の関係は学習していません．ここではグラフの凹凸を用いずに説明して下さい．

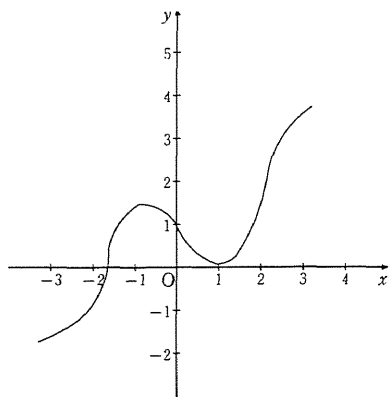
【Aさんの解答】

例2）$y=x^3-x^2-x+1$

$y'=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

x	・・・	−1/3	・・・	1	・・・
y '	＋	0	−	0	＋
y	増加	極大	減少	極小	増加

極小値＝$\frac{33}{27}$，極大値＝0，y切片＝1



D2.9. 描かせたいグラフとその関数の式の作成

グラフを見て，それがどんな式からできているかを考えさせる．(確認のために，テクノロジーの助けを借りることもよい利用法)

たとえば，次のようなグラフがあったとき，関数の式はどんな式なのか．

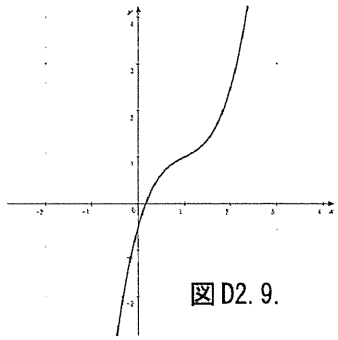


図 D2. 9.

3次関数の授業でこんなグラフを描かせたいのだが，式をどうすればよいのか．悩むときがあるのでは．こんなとき，制御するグラフを考えることで解決することがある．

図 D2. 9. なら，制御する直線は点 $(1,1)$ を通る直線が，$y=\frac{1}{2}(x-1)+1$ とし，$y=(x-1)^3$ を足し合わせたものと見ることができ，$y=(x-1)^3+\frac{1}{2}(x-1)+1$ と考えられる．確かめたい場合は，グラフ電卓やフリーソフトが便利である．工学実験結果から関数を取り出すにも有効であろう．

D2.10. グラフからグラフを描く

D2.10.1. $y=f'(x)$ のグラフから $y=f(x)$ のグラフを描く

導関数 $y=f'(x)$ のグラフを与えて，元の関数 $y=f(x)$ を考えさせる問題．初期条件に気付かせることも大切である．

元の関数を捜させるわけで，数学的には積分であるが，「数学Ⅱ」の積分導入までは伏せておいてもよい．

課題　**図 D2. 10.** のようなグラフ（$y=f'(x)$）を与え，y切片が1である $y=f(x)$ を描いて見よう．x軸との交点は，$-\frac{1}{3}$，1である．

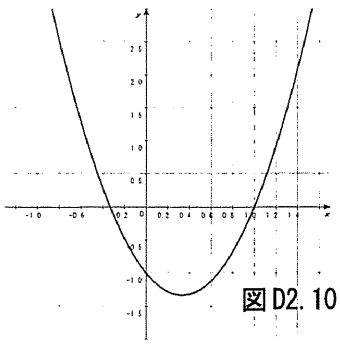


図 D2. 10

これに対して，3次関数のグラフを描くのであるが，与えられたグラフが接線の傾き具合を表していることを認識して描くことになる．もちろん，導関数，つまり微分方程式であるから，初期条件として，ある点を通らなければグラフは決まらないことに気付く．後の積分定数の布石でもある．

これによって，調査問題の一つの解答が得られる．

導関数のグラフを与えて，その元の関数のグラフを考えさせると，脳がフル回転し，導関数の役割を認識出来ると考えている．

例）**図 D2. 11.** は，ある関数の導関数のグラフを描いたものである．元の関数のグラフの概形を描け．

ただし，　$x\to\pm\infty$ のとき $y=0$ であるとする．

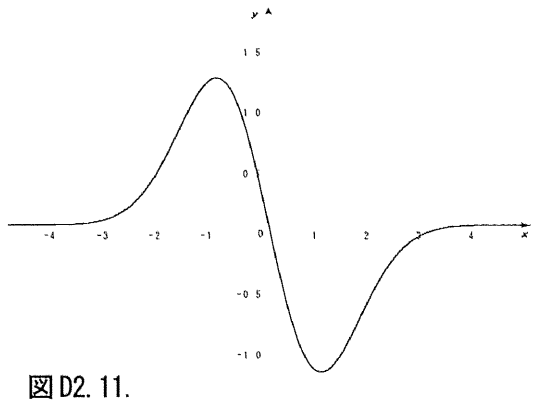


図 D2. 11.

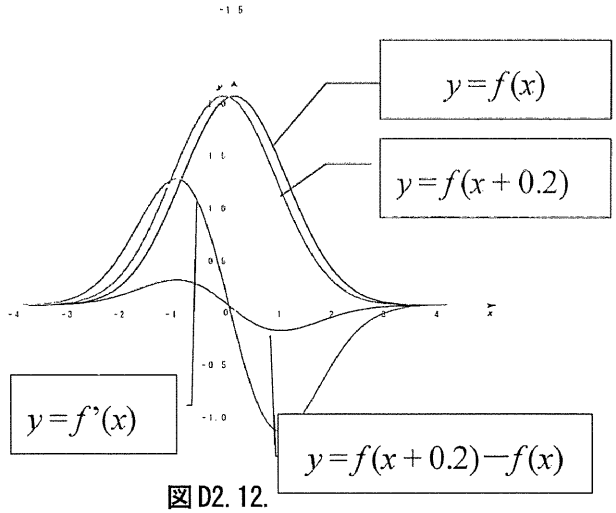


図 D2. 12.

x軸の左では，$y'>0$ であるから，単調増加．

x軸の右では，$y'<0$ であるから，単調減少．

$x\to\pm\infty$ で，$y'=0$ であるから，グラフの漸近線はx軸である．よって，**図 D2. 12.** のようになる．

D2.10.2. 与えられたグラフから導関数のグラフを描く

逆に，関数 $y=f(x)$ のグラフを与えておいて，その導関数 $y=f'(x)$ のグラフを描かせる問題．

ここで，導関数の定義を振り返ると，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

このhを極めて小さい数であるとすると，

$f'(x)h\approx f(x+h)-f(x)$

であり，*差が微分である*ことがわかる．

つまり，描かれている $y=f(x)$ のグラフと，それを平行移動（$h>0$ として，左に）したグラフを描き，それらの‘差’を求め，縦軸のy方向に拡大すれば，

導関数の概形が次のようにして得られる（駒野(2006)）. 描く要領を簡単に説明すると, ままず $y'=0$ の極大・極小・停留点を与えている点をｘ軸上にとり, グラフを**図 D2. 12.** のようにずらす. ｙ軸に平行に近くなるほど差は大きく, ｘ軸に平行に近いほど差は小さいことを頭に入れながらグラフを描く. これは, 各点での接線の傾きを調べるコンピュータ的(デジタル)思考ではない人間的(アナログ)思考である. 計算抜きで導関数のグラフの概形が描けるのである.

例) **図 D2. 13.** はある関数のグラフである. この導関数のグラフの概形を描け.

導関数のグラフを考えさせることは,「微分するとは微小な差を見つけること」であることを理解するに適していると考える.

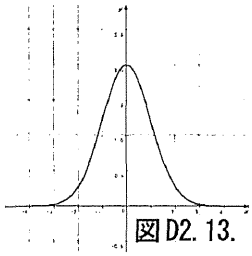


図 D2. 13.

引用・参考文献

(1) 駒野誠 1995「2 次関数のグラフの構造」日本数学教育学会臨時増刊号（東京大会）

(2) 岩波書店　解析概論　改訂第三版　高木貞治著　軽装版　p.19

(3) 数研出版株式会社の数学Ⅱの教科書　Ⅱ104 数研　数Ⅱ010

(4)駒野誠(2006)「多角的な視点に立った教材開発ー微分の代数化とデジタル化ー」長野大会

(5) MATHEMATIQUES PREMIERE C, D, E tome1

O2. 有限世界の数学

関連分野：代数分野, 幾何分野, 他
高等数学：代数学
対象学年：高校
関連単元：式と計算, 図形と方程式, 平面幾何
教 材 名：「有限世界の数学」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

『無限の学』といわれるように, 数学が対象としているのは殆どが無限集合である。関数や微積分を扱う解析では, 極限の概念にしろ, 連続性の概念にしろ, 無限でなければ意味がない。幾何学においても, 線分とか直線のような単純な図形ですら, 点集合を考えると無限集合である。無限的であることは数学の本質的特徴であるといえる。

そこで, 逆手をとって有限の条件で扱ってみるとどのようなことになるか。これは有限体の理論にもつながるし, 実際的な統計学やゲームの理論にも関連している。コンピューターの利用とあいまって, 20 世紀にはこのような分野が発展したことも事実である。現代数学の入り口を紹介する教材として検討してみたい。

O2.1. 1 元世界

要素がない集合, すなわち 0 元の世界は意味がないので, まず 1 元のものから始める。

要素が 1 つ, 0 しかない集合 Ω_1 を考える。

$$\Omega_1=\{0\}$$

加法と乗法は

$$0+0=0,\quad 0\times 0=0$$

としか決めようがない。加法の逆算としての減法を考え

$$a+x=b \quad \text{の解を} \quad b-a$$

と定義すると, $0-0=0$ である。

Ω_1 は加減乗の三則が出来る集合（環）である。

O2.2. 2 元世界

異なる要素が 2 つ, つまり 0, 1 しかない集合 Ω_2 を考える。

$$\Omega_2=\{0,\ 1\}$$

これは 2 元的対立の世界, つまり「＋と—」とか「偶と奇」とか「真と偽」「有と無」「○と×」などの世界である。

加法では0が零元，つまりどんな数に0を加えても変わらないとすると，

$$0+0=0,\quad 0+1=1+0=1$$

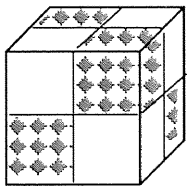
残りの1+1は1にすると

$$1+1=1=0+1$$

の両辺から1をとると1=0となってしまい，2つの要素が一致してしまう。よって　1＋1＝0となる。

＋	0	1
0	0	1
1	1	0

この加法では交換法則･結合法則が成り立っている。結合法則は



図のような白と黒の立方体を隣が別の色になるように積んだ立体の対称性からも直観的にわかる。

加法の逆算としての減法を考え

$a+x=b$　の解を　$b-a$

と定義すると。

$$0-0=0,\quad 1-0=1,\quad 0-1=1,\quad 1-1=0$$

となり，表にまとめれば加法とまったく同じものになる。

次に乗法であるが，零元0にどんな数をかけても0になると考えれば，残りは1×1だけである。

1）1×1＝0とする場合

×	0	1
0	0	0
1	0	0

こう決めると，結合法則も分配法則も成り立つ。この場合Ω_2は2元をかけても0になる環である。

2）1×1＝1とする場合

×	0	1
0	0	0
1	0	1

こう決めると，1はどんな数にかけても変わらない単位元の役割を果たす。すなわち$a\times 1=1\times a=a$。

その上，0を除いて1だけの部分集合Gを考えると，

$G=\{1\}$は単位元1だけからなる群になっている。

O2.3. 2元世界の多項式

まず1次式$ax+b$であるが，係数a，bは0か1であるから，その組み合わせは$2^2=4$通り。しかし1次式ならa＝1なので

$$x,\quad x+1$$

の2つしかない。

2次式ax^2+bx+cではb，cが0か1なので

$$x^2,\quad x^2+1,\quad x^2+x,\quad x^2+x+1$$

の4つしかない。このうち，既約つまり2つの1次式の積にならないのは最後のものだけである。なぜなら

$$x\times x=x^2$$
$$x(x+1)=x^2+x$$
$$(x+1)^2=x^2+x+x+1=x^2+1$$

例

$$(x+1)(x^2+x+1)=x^3+x^2+x+x^2+x+1=x^3+1$$

例

3次式ax^3+bx^2+cx+dは8つ

$$x^3,\quad x^3+1,\quad x^3+x,\quad x^3+x^2,$$
$$x^3+x+1,\quad x^3+x^2+1,\quad x^3+x^2+x,\quad x^3+x^2+x+1$$

このうち既約なのは

$$x^3+x+1,\quad x^3+x^2+1$$

の2つである。

O2.4. 2元世界の関数

集合Ω_2は要素が2つしかないから，Ω_2からΩ_2への写像の組み合わせは$2^2=4$通りしかない。

F(x)	0	x	x＋1	1
x＝0	0	0	1	1
x＝1	0	1	0	1

つまり，Ω_2では関数はすべて，「たかだか1次関数」なのである。2次の多項式は存在しても，例えば

$f(x)=x^2+x+1$　　については

$f(0)=0+0+1=1,\quad f(1)=1+1+1=1$ だから定数関数になってしまう。

Ω_2では$x^2=x$が成り立つから冪関数といっても実

はｘしかない。多項式としてはいくらでも高次のものが考えられるが，多項式関数としては２次以上のものは意味がない。

分数関数としては

$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x}{x+1}$ $\frac{x+1}{x}$

の４つが考えられる。

F(x)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{x}{x+1}$	$\frac{x+1}{x}$
ｘ＝０	なし	１	０	なし
ｘ＝１	１	なし	なし	０

O2.5. 3 元世界

同様に異なる要素が３つ，０，１，２しかない集合Ω_3を考える。

$$\Omega_3 = \{0,\ 1,\ 2\}$$

加法・乗法の表は次のようになる。

＋	０	１	２
０	０	１	２
１	１	２	０
２	２	０	１

×	０	１	２
０	０	０	０
１	０	１	２
２	０	２	１

Ω_3は３元的対立の世界，つまり「＋，－、０」とか「賛成、反対、保留」とか「上、中、下」「真，偽、不定」などの解釈をすることも出来る。

O2.6. ｐ元世界（ｐは素数）

ｐを素数とするとき，異なる要素がｐ個しかない集合Ω_pを考えることができる。その加法の表は，各行各列の数字がきれいに巡回的に配置されているはずである。つまり，普通の自然数のように加えて，ｐを法として最小の正のあまりをとればよい。

乗法については，ｐ＝２の場合のように場合わけをする。

- １×１＝０の場合，
  どんな２数をかけても０となる。
- １×１≠０の場合，
  かりに１×１＝ａとすると，
  ０×１＝０
  １×１＝ａ
  ２×１＝（１＋１）×１＝ａ＋ａ
  …

これらの列は集合Ω_pの要素をすべて尽くしていなければならない。したがって任意のｙに対して未知数ｘについての方程式

ｘ×１＝ｙ

はただ１つの解をもつ。とくにｙ＝０とおくと

ｘ×１＝０

を満たす数ｘはただひとつしか存在しない。またとくにｙ＝１とすると

ｅ×１＝１

を満たすｅがただひとつ存在するはずである。よってすべてのｘに対して

ｘ×ｅ＝ｘ×ｅ＝ｘ

が成り立つ。これは乗法の単位元である。

そこでｅを１と書いてもよく，ａ≠０をとると，

写像ｘ→ｘ×ａ　はやはりΩ_pからΩ_pへの双射である。つまり，ｘ＝０，１，２，…、としたときにその像　０，ａ，２ａ，３ａ，…は　Ω_pの数を尽くしていなければならない。したがって任意のｙに対して未知数ｘの方程式

ｘ×ａ＝ｙ

はただひとつの解をもつ。

例

ｐ＝７の場合

$\Omega_7 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

加法の表

＋	０	１	２	３	４	５	６
０	０	１	２	３	４	５	６
１	１	２	３	４	５	６	０
２	２	３	４	５	６	０	１
３	３	４	５	６	０	１	２
４	４	５	６	０	１	２	３
５	５	６	０	１	２	３	４
６	６	０	１	２	３	４	５

乗法の表

×	０	１	２	３	４	５	６
０	０	０	０	０	０	０	０
１	０	１	２	３	４	５	６
２	０	２	４	６	１	３	５
３	０	３	６	２	５	１	４
４	０	４	１	５	２	６	３
５	０	５	３	１	６	４	２
６	０	６	５	４	３	２	１

加法の表が巡回的になるのは，すべての加法が１を加えることの繰り返しによって得られることを意味している。

そこで乗法の表の０を抜いて順番を

１，３，２，６，４，５

にしてみると次のように巡回的になる。

×	1	3	2	6	4	5
1	1	3	2	6	4	5
3	3	2	6	4	5	1
2	2	6	4	5	1	3
6	6	4	5	1	3	2
4	4	5	1	3	2	6
5	5	1	3	2	6	4

これより乗法が３をかけることを繰り返して得られるということがわかる。また，１の次を５にしても同じである。

O2.7. q元世界（qは合成数）

合成数qについて異なる要素がq個しかない集合Ω_qを考える。

例えばq＝６をみてみよう。

$$\Omega_6 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

として６以上となったら６で割った余りをとるようにすると，加法の表は次のようになる。

加法の表①

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

初の行が下に行くにつれて左へ１つずつ巡回的にずれていくだけであることはｐ＝７と同じである。
しかし，要素の並べ方を

０，２，４，１，３，５

にしてみるとおもしろい。

加法の表②

+	0	2	4	1	3	5
0	0	2	4	1	3	5
2	2	4	0	3	5	1
4	4	0	2	5	1	3
1	1	3	5	2	4	0
3	3	5	1	4	0	2
5	5	1	3	0	2	4

この表では０，２，４と１，３，５が分離しており，前者をA，後者をBとすると集合Ω_2の加法に似た様相を呈する。

+	A	B
A	C	D
B	D	C’

乗法の場合は１×１の値によっていろいろ考えられる。

乗法の表①　１×１＝１の場合

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

乗法の表②　１×１＝２の場合

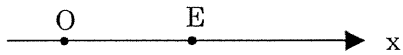
×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	2	4	0	2	4
2	0	4	2	0	4	2
3	0	0	0	0	0	0
4	0	2	4	0	2	4
5	0	4	2	0	4	2

O2.8. 有限の幾何学

有限個しか数がないときの幾何学は，純粋な数学的な方面からと，実験計画法に関する方面の両面から生まれてきた。実験計画については、有限個のものをいくつかのブロックに配置する必要が起こってくるが、その可能性や構成法は、そっくり点と直線や平面の所属関係に焼きなおして幾何学的問題に直せるのである。

O2.9. 2元の直線

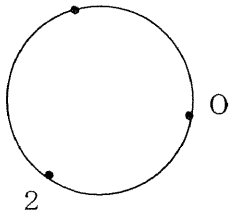
点の座標としてはｘ＝０，１しかない。したがって直線上の点もそれらを座標とする２点O,Eしかない。もちろんOが原点，Eが単位点である。



座標に１を加える操作は、点ＯとＥを交換すると言う幾何学的操作を表す。

O2.10. 3元の直線

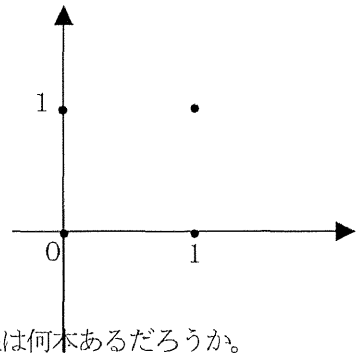
点の座標としてはｘ＝０，１，２しかない。したがって直線上の点もそれらを座標とする３点しかないので，これらを円形に並べた方が見やすい。座標に１を加える操作は、120°回転と言う幾何学的操作を表す。



O2.11. 2 元の平面

点の座標としては次の４点しかない。

(0, 0), (0, 1)(1, 0), (1, 1)



ここに直線は何本あるだろうか。

まとめると次の６本になる。

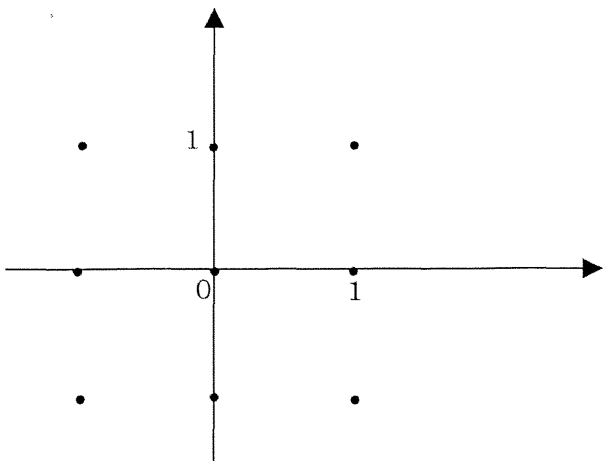
方程式	通る点
x＝0	（0，0）と（0、1）
x＝1	（1，0）と（1、1）
y＝0	（0，0）と（1、0）
y＝1	（0，1）と（1、1）
x＋y＝1	（0，1）と（1、0）
x＝y	（0，0）と（1、1）

これらが異なっていることは明らかである。もし一致するものがあれば、その直線上には３個の異なる点があることになるからである。一方これで尽くされているかと言えば，１次方程式ａｘ＋ｂｙ＋ｃ＝０の係数ａ、ｂを同時に０にする組み合わせ

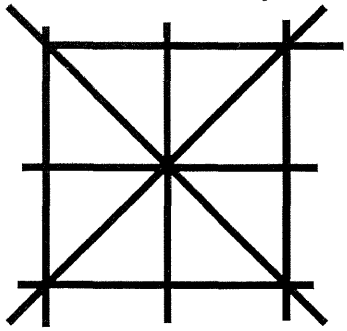
（ａ，ｂ，ｃ）＝（0，0、0)、(1，1，0）を除いた$2^3-2=6$通りだけが可能なので確認できる。

O2. 12. 3 元の平面

数として１，０，－１だけを考える。点の座標としては９点しかない。



ここに直線は何本あるだろうか。軸に平行な６本と原点を通る斜めの２本ｘ±ｙ＝０はすぐわかる。

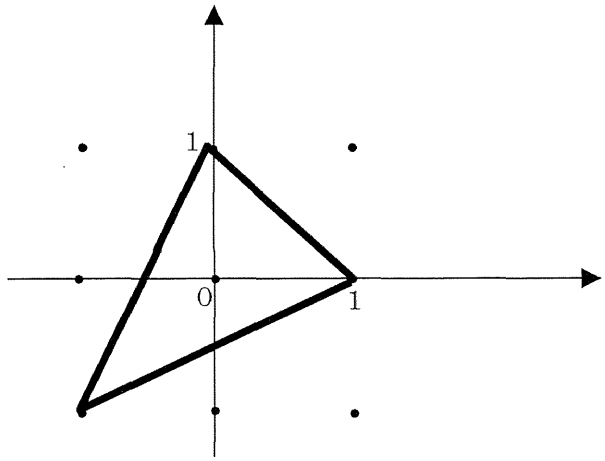


しかし１次方程式ａｘ＋ｂｙ＋ｃ＝０の係数を考えると，$3^2+3=12$通り可能なはずである。つまりさらに４本

$$x \pm y \pm 1 = 0$$

が考えられる。

例えばｘ＋ｙ―１＝０は３点（１，０），（０，１），（－１，－１）を通るものである。



合計１２本の直線があることになる。これらはすべて異なっており，どの直線上にも３個の点があり、どの点をとっても４本の直線がひける。

O2.13. q 元の平面

一般化すると，ｑ元の平面解析幾何学では次のことが言える。

- 点はq^2個ある
- 直線は　ｑ（ｑ＋１）本
- どの直線上にもｑ個点がある
- どの点を通ってもｑ＋１本の直線が引ける

与えられた２点(x_1, y_1), (x_2, y_2)を通る直線を求めたければ、直線の方程式をａｘ＋ｂｙ＋ｃ＝０と仮定して

連立方程式$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$を解いて係数の比を

だせばよい。あるいは行列式 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ によって

1）異なる２点を通る直線はただひとつ存在する

ことがわかる。

また２直線

$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を求めたければ，連立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

を解けばよい。これは係数の比が等しくない限り、言い換えれば $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ である限り、ただひとつ解を持つ。

一方 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ の場合には、この２直線は交わらないか、一致するかどちらかである。このとき２本は平行であると書くことにする。

直線Ｌ：ａｘ＋ｂｙ＋ｃ＝０とその上にない点 (x_1, y_1) が与えられると，これを通ってＬに平行な直線はａｘ＋ｂｙ＋ｄ＝０という形をしているから、ｄ＝－ａｘ$_1$－ｂｙ$_1$となりただひとつに決定できる。

2）直線Ｌ外の１点を通ってＬに平行な直線がただひとつ引ける

ことがわかる。これは『平行線の公理』である。

また，

3）同一直線上にない３点が存在する

ことは明らか。これは三角形の存在といってもよい。

O2.14. ブロックデザイン

有限平面幾何をみていくと次のような特徴に気づく。

「有限個の点が有限本の直線にのっており，どの直線上にも同数の点がのり、どの点を通っても同数の直線が引ける」

一般に

「ｖ個のものをｂ個のブロックに配置し、どのブロックもｋ個のものを含み、どのものもｒ個のブロックに属している」ような構造のうち「どの２つのものもちょうどλ個のブロックに属する」配置をブロックデザインと言う。この概念はもともと実験計画法からきている。

例えば，比較試験のようなケースで、比較した試料の数をｖ，試験官の人数をｂ，１人が比較できる試料の数をｋとする。公平にやるには、１つの試料の検査回数ｒは一定で，しかもどの試料も同一人に同じ回数λでテストされたほうがよい。つまりブロックデザインのような配置が最適なのである。

例題　16人の人が１人５回ずつ計延べ20卓を囲むマージャン大会をやりたいが、公平にどの２人もちょうど１回だけ同じ卓で顔を合わせるようにするには、どうすればよいか。

解答・研究

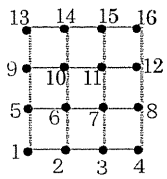
この問題は，人を点，卓を直線に言い換えると

① どの点を通っても５本の直線が引ける
② どの２点を通ってもただ１本の直線が引ける
③ どの直線にも４点がのっている
④ 点の数は16個である

というふうに有限幾何の問題と見ることができる。この場合，１直線ｍ上にない１点Ｐを通ってｍに平行な直線はただｌつであるから，ユークリッド幾何学に対応する。

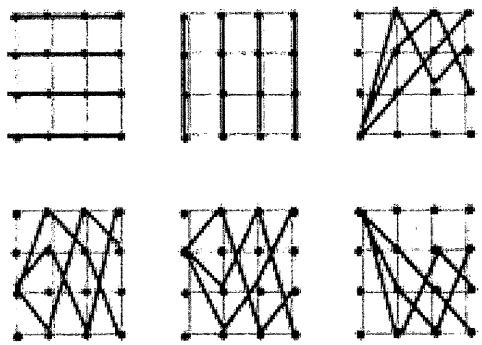
16個の点を**図02.1.**のように配置すると

図02.1.



求める20本の直線は**図02.2.**のようになる。

図02.2.



O2.15. 教材化へ向けて

有限の数学というと難解な現代応用数学というイメージがあるかもしれないが，通常の学校教育の過程になぞらえて展開すれば，計算自体は具体的な扱いやすいものになり、面白い教材になるのではないかと考えた。

「点，直線、平面のかわりにテーブル、イス、ビールコップを使っても幾何学ができるはずだ」とヒルベルトが行ったと言う逸話があるが、特に幾何学では、高校と大学をつなぐ教材がいろいろ考えられる。

なお２００７年度，高校２年生の少人数講座「ゼミナール」は上の例題「16 人のマージャン」からスタートしてこの教材に取り組んでいる。この講座に特別に参加している筑波大学数学科の大学院生からは、関連して２元の場合の解析についての考察がでた。

また，発展事項として『ガロア理論』について外部講師として銀林浩（明治大学名誉教授）を招いて特別講義を開講した。内容は難解に感じる生徒もいたようだが、現代数学の一端に触れることはできた。

【参考文献】

1. 銀林浩(1972)『有限世界の数学（上・下)』国土社
2. 銀林浩『かぞえる幾何学』東京図書
3. 都筑俊郎『有限群と有限幾何』岩波書店
4. 永尾汎(1974)『群とデザイン』岩波書店
5. アルティン〔寺田文行訳〕(1974)
   『ガロア理論入門』東京図書

Of. 4 元数を高校数学へ

関連分野：代数分野，幾何分野，他
高等数学：線形代数
対象学年：高校生
関連単元：複素数，ベクトル，三角関数
教 材 名：「4 元数ー複素数からの発展，あるいはベクトル，三角関数の応用としてー」

SSH の数学科研修として，2007 年 8 月 30 日～9 月 1 日の日程で，秋田工業高等専門学校を訪問した。研修の 2 日目の 8 月 31 日には，訪問先の吉井洋二(自然科学系，准教授)先生による講演がおこなわれた。

講演の内容は，ペリー来航の 10 年前の 1843 年にハミルトンが発見した 4 元数を，高等学校用の教材とすることをねらいとしたものである。本稿は，その講演資料である。

実数を係数に持つ i と j の文字式に

$$ij=-ji,\quad i^2=j^2=-1$$

という関係式を入れた式を数とみなし，4 元数と呼ぶ。

例えば，

$$\begin{aligned}&3i^3-2j^6+7ij-i^2j-ij^2-4ji+(ij)^2\\ =\ &-3i+2+7ij+j+i+4ij-i^2j^2\\ =\ &1-2i+j+11ij\end{aligned}$$

同様の簡約化により，4 元数はいつも

$$a+bi+cj+dk\quad (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},\ k:=ij)$$

と書ける。ここで，k は，i や j と同様の関係式を持つ：

$$k^2=(ij)(ij)=-i^2j^2=-1$$
$$ik=i(ij)=-iji=-ki$$
$$jk=j(ij)=-ijj=-kj$$

4 元数の集合を $\mathbb{H}$ で表す。

$$\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk\,|\,a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}\}$$

4 元数 $\mathbb{H}$ が複素数

$$\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,\ b\in\mathbb{R}\}$$

を部分集合として含むことは明らかであろう。

4 元数 $\mathbb{H}$ は複素数と違って積の交換法則が成り立たないが，いろいろな面白い性質を持つ。例えば，

$$(i+j)^2=i^2+ij+ji+j^2=i^2+j^2=-2$$

従って，

$$\left(\frac{i+j}{\sqrt{2}}\right)^2=-1$$

同様に，

$$(bi+cj+dk)^2=b^2i^2+c^2j^2+d^2k^2=-b^2-c^2-d^2$$

が成り立つので，

$$\left(\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right)^2=-1$$

が成り立つ。従って，

$$U=\{\,bi+cj+dk\,|\,b^2+c^2+d^2=1\,\}$$

とおけば，任意の $u\in U$ に対して，$u^2=-1$ が成り立つ。ここで，

$$I:=\{\,bi+cj+dk\,|\,b,\ c,\ d\in\mathbb{R}\,\}$$

を通常の xyz 空間と同一視すれば(x 軸を i 軸，y 軸を j 軸，z 軸を k 軸と考える)，U は通常の空間 $I\approx\mathbb{R}^3$ における，原点中心の半径1の球面となる。即ち，

$$U\approx S^2=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\,\}$$

また，

$$\{a+eu\,|\,a,\ e\in\mathbb{R}\,\}$$

は $\mathbb{C}$ と同一視できる。即ち，$\mathbb{H}$ は無限個の $\mathbb{C}$ のコピーを含んでいる。さらに，

$$\mathbb{H}=\{a+eu\,|\,a,\ e\in\mathbb{R},\ u\in U\}$$

と書けることに注意すれば，

$$x^2=-1$$

という方程式の解は無限個あり，その解集合は U であることが分かる。

4元数 $\mathbb{H}$ は4次元の数と考えてよいが，4次元は未だ人間にはよく見えない。ところが，$\mathbb{H}$ の部分集合 I は3次元であり，そこでの積はとても興味深い。実際，

$$\alpha=b_1i+c_1j+d_1k,\ \ \beta=b_2i+c_2j+d_2k\ \in I$$

に対して，

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(b_1i+c_1j+d_1k)(b_2i+c_2j+d_2k)\\&=-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2\\&\quad+(c_1d_2-d_1c_2)\,i+(b_2d_1-b_1d_2)\,j+(b_1c_2-b_2c_1)k\end{aligned}$$

となる。ここで，$i\approx\mathbb{R}^3$ により，$\alpha=(b_1,\ c_1,\ d_1)$，$\beta=(b_2,\ c_2,\ d_2)$ と考えれば，前半は $-\alpha\cdot\beta$ になっている。では後半は？

$ij=k,\ jk=i,\ ki=j$ という関係があり，これは $i,\ j,\ k$ を基本ベクトルと考えたときの外積が満たす関係式に等しい。従って，後半部分は $\alpha\times\beta$ になっている！即ち，

$$\alpha\beta=-\alpha\cdot\beta+\alpha\times\beta$$

である。実は，内積や外積は4元数から生まれたのである！！

(注) $\alpha,\ \beta\in I$ に対して，$\alpha\beta\notin I$ であり，これはリサランドールが提唱する5次元の世界に対応してないか？($\mathbb{H}$ に時間軸を加えて5次元！)

さて，複素数と同様，$\alpha=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}$ に対して，

$$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

と定義すると，$\beta\in\mathbb{H}$ に対して，

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \qquad (1)$$

が成り立つ。(これは自明ではなく，大きな発見だった。)複素数の部分集合

$$S:=\{\alpha\in\mathbb{C}\,|\,|\alpha|=1\}$$

は積について閉じていて，この集合は複素平面の原点を中心とした半径1の円と同一視できた。では

$$S^3:=\{\alpha\in\mathbb{H}\,|\,|\alpha|=1\}$$

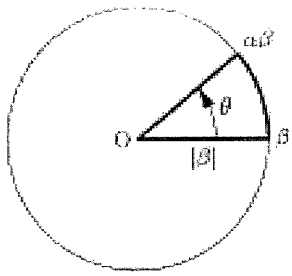
は何か？

これも(1)より積について閉じていて，4次元の中の3次元球と考えられる。(昨年のフィールズ賞はこの球がもつ幾何学的性質を証明した数学者に与えられた。)

複素数と $\alpha\in S$ との積は回転を与える。実際，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と書けるから，$\beta=a+bi\in\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(\cos\theta+i\sin\theta)(a+bi)\\&=a\cos\theta-b\sin\theta+i(b\cos\theta+a\sin\theta)\\&\approx\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから，$\alpha\beta$ の位置は β の位置を原点の周りに θ だけ回転した位置にある。(最後の $\approx$ は $x+yi\in\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ の点$(x,\ y)$と同一視したということ)



同様に4元数と $\alpha\in S^3$ との積は4元数の回転を与える。ところが，4元数の回転はこれまた人間の目ではほとんど見ることができない。(数学的記述は簡単だが，どのような動きかは分からない。物理学では S^3 をユニタリー群 $SU(2)$ と同一視して，素粒子モデルに応用している。この理論では，4元数を数と見ず，複素数成分の2×2行列と見ている。)

そこで，$\alpha\in S^3$ を3次元(空間 $\mathbb{R}^3$)の回転を表すのに使えないか？という疑問が起きる。

実はこれも可能なのである！！

まず，準備として，$\mathbb{C}$ における共役という概念を拡張する。即ち，$\alpha=a+bi+cj+dk\ \in\mathbb{H}$ に対して，共役4元数

$$\overline{a+bi+cj+dk}=a-bi-cj-dk$$

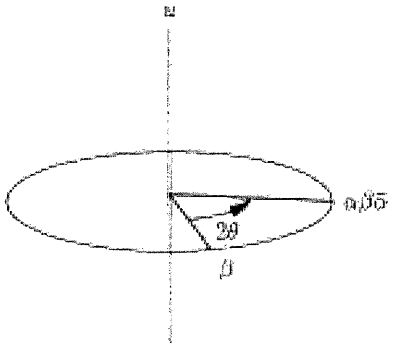
を定義する。次に，ある $u\in U$ があって，$\alpha=a+eu$ と書けたわけだから，$|\alpha|=1$ ならば $a^2+e^2=1$ であ

ることがわかる。従って，$\alpha=\cos\theta+u\sin\theta$ と書ける。

このとき，$\beta\in I\approx\mathbb{R}^3$ に対して，$\alpha\beta\bar{\alpha}\in I$ が言えて，

$\alpha\beta\bar{\alpha}$ の位置は β の位置を u 軸の周りに
2θ だけ回転した位置にある

ことが証明できる。従って，θ を動かしたり，u を動かすことにより，$\alpha=\cos\theta+u\sin\theta$ は空間のすべての回転を表現することができる！！！



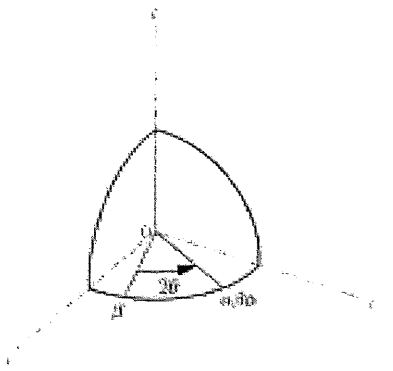
(例) $u=k$ の場合，即ち $\alpha=\cos\theta+k\sin\theta$ ならば，
$\beta=bi+cj$ に対して，

$$\begin{aligned}\alpha\beta\bar{\alpha}&=(\cos\theta+k\sin\theta)(bi+cj)(\cos\theta-k\sin\theta)\\&=bi\cos^2\theta-bik\cos\theta\sin\theta+cj\cos^2\theta\\&\quad-cjk\cos\theta\sin\theta+bki\cos\theta\sin\theta-bkik\sin^2\theta\\&\quad+ckj\cos\theta\sin\theta-ckjk\sin^2\theta\\&=bi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2ci\cos\theta\sin\theta\\&\quad+2bj\cos\theta\sin\theta+cj(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=i(b\cos2\theta-c\sin2\theta)+j(b\sin2\theta+c\cos2\theta)\\&\approx\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(注) $\alpha(dk)\bar{\alpha}=(\cos\theta+k\sin\theta)(dk)(\cos\theta-k\sin\theta)$

$=(\cos\theta+k\sin\theta)(\cos\theta-k\sin\theta)(dk)$

$=dk$



従って，線形写像 $\alpha(\cdot)\bar{\alpha}$ を表す行列は，

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta&0\\\sin2\theta&\cos2\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

である。

一般の $u\in U$ に対しては，うまく $v, w\in U$ を取って，$\{v, w, u\}$ が I の正規直交基底になるようにすると，なんと v, w, u は i, j, k と同じ関係を持つ！

例えば，

$$v^2=w^2=u^2=1$$

また $vw=-v\cdot w+v\times w=u$

$wv=-w\cdot v+w\times v=-u$ より，

$vw=-wv$ 等々。

従って，上と全く同じ計算から，$\alpha=\cos\theta+u\sin\theta$ に対して，この基底に関する，線形写像 $\alpha(\cdot)\bar{\alpha}$ を表す行列は上と全く同じ

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta&0\\\sin2\theta&\cos2\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

になる！

もちろん，$\alpha=\cos\dfrac{\theta}{2}+u\sin\dfrac{\theta}{2}$ にとっておけば，

$\alpha(\cdot)\bar{\alpha}$ を表す行列は，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

である。

4 元数などは使わず，初めから線形代数を使えば，空間の回転は上記行列で表せることが分かるわけだが，座標変換，固有値，直交行列の理論が駆使されるわけである。4 元数のかけ算にさえ慣れておけば，4 元数による回転の表現はより直接的で分かり易いと言える。

さらに，空間の回転を表すのにオイラー角，あるいはロールピッチヨー法が有名だが，これらはいくつか欠点があり(例えばシンバルロックの問題)，最近の工学者あるいはコンピュータ・プログラマーは，回転の表現に 4 元数を使うようになっている。

問 空間上の点 A が点 B へ原点中心の回転で移ったとする。この回転軸，回転角度，そしてこの回転を表す 4 元数を求めよ。また，ある点 $C(c_1, c_2, c_3)$ がこの回転で移る先を求めよ。

(答) 原点を 0 とすると，回転軸はパラメータ t を使って，$t\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)$，回転角度を θ とすれば

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|}$ で計算できる。ここで，

$\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ として，$u = u_1 i + + u_2 j + u_3 k$ とおけば，回転を表す4元数 α は

$\alpha = \cos\dfrac{\theta}{2} + u\sin\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} + u\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ と計算できる。($0 \leqq \theta \leqq \pi$ としてよいので，$\cos\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$，$\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ としてよい。)

また，点Cの行き先は $\alpha(c_1 i + c_2 j + c_3 k)\bar{\alpha}$ を計算すればよい。(即ち，$\alpha(c_1 i + c_2 j + c_3 k)\bar{\alpha} = d_1 i + d_2 j + d_3 k$ なら，移る先は点 $(d_1,\ d_2,\ d_3)$ である。)

謝辞

本文の図は，上林一彦氏(秋田工業高等専門学校・自然科学系)によるものです。ここに感謝の意を表します。

【参考 Web サイト】

1. http://staff.aist.go.jp/toru-nakata/quaternion.html
2. http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/coordtrans.htm

【参考文献】

1. J.H. コンウェイ・D.A. スミス [著] 山田修司 [翻訳] (1993)『四元数と八元数ー幾何，算術，そして対称性』培風館。

4．おわりに

まず，3年計画の数学科研究プロジェクト「創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発」について振り返る。1年次(平成17年度)は，「統計」と「微分方程式」の教材開発ならびに開発した教材の実践を中心におこなった。2年次(平成18年度)は，これまでに開発した教材と1年次に開発した教材についてカリキュラムへの位置づけに着手した。これらは，平成14年度に指定を受けたSSH事業「先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発」と連動する形で取り組んできた。そして，3年次にあたる本年度は，「統計」と「微分方程式」以外の内容についても教材開発をおこない，カリキュラムへの位置づけをおこなった。「A. 代数」「An. 解析」「G. 幾何」「P. 確率」「S. 統計」「O. その他」の7項目を整理の視点として，本年度の「年間指導計画」にもとづき単元と開発教材を配置したが，今後更なる議論を重ねて整合していく必要がある。

次に，本年度より始まった取り組みを見ていく。

1点目は，新SSH事業である。数学科は，これまでのSSH事業に引き続き，教材開発とカリキュラムの整備を進めていくことになる。また，キーワードの1つとなっているサイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した取り組みも模索している。今年度は，近隣の目黒区立駒場小学校の「サマースクール」においてワークショップを開いた。また，SSH研修として，秋田工業高等専門学校を訪問した。研修中に講演をして下さった吉井先生の講演資料をOf.として掲載した。紙面の関係上，詳細を記載していないが，高専の取り組みには，本校の目指す「大学への学びにつながる」内容が数多く見られ，大変実りのある研修であった。

2点目は，教員養成GPである。従来の大学生のおこなう教育実習とは異なり，教科教育に特化した大学院生の実習に相当する。高校2年生の数学Ⅱの単元「微分と積分」につながるトピック教材を開発した。本校は，教育実習生の受入推進校でもあり，筑波大学の学生ならびに卒業生を受け入れてきた。今後，この取り組みが継続するのであれば，大学生の実習生のチューター的役割を担うような実践も試してみたい。

3点目は，大学院生インターンシップである。大学院生が参加している「ゼミナール」の前半は，講義中心に授業が進められた。後半は，小グループによるディスカッションを通じて，研究テーマ設定をおこなっていく。数学を専門に研究している大学院生との話し合いを通じて，テーマの深化を期待している。