数学学習における教授学的状況の構築に関する一考察

―図形ソフトCabri-Geometryの利用を事例として―

辻　　宏子

1．はじめに

高度情報化社会の進展に伴い，学校に様々なテクノロジーが導入され，テクノロジーの利用に関する能力の育成と，テクノロジーの教育利用について考えることは不可欠となった。教育学研究においては，教授＝学習において利用されるソフトの開発研究が盛んに進められると同時に，その可能性と教授＝学習にもたらされる変化についての研究が数多く進められてきている。この結果，テクノロジーの導入とその利用は，教育において利用される新しい道具の出現に留まらず，教育の根本的な変化を求めるまでの影響をもたらす問題の一つとなった。

このような傾向は，数学教育においても例外ではない。文部省(1999)に明言されているように，数学科とコンピュータ等のテクノロジー利用の関わりには二つの形があり，特に数学の教授＝学習に関して，教具としてのテクノロジーの積極的な活用が求められている。数学教育は，教育におけるテクノロジー利用の当初から，利用の対象となっている分野であり，これまでに教授＝学習に関わるテクノロジー利用の理論研究や実践研究が数多く報告されている。このような研究では，テクノロジー利用の可能性を理論的，実証的に検証することが研究課題となり，個々の児童・生徒の活動にもたらされる変化や期待される効果が示されている。その結果，テクノロジーを導入することによって，数学学習における児童・生徒の認識論的なレベルでの経験の変化を予想以上に期待できることが示された。

しかしながら，教育現場において，コンピュータ活用の学習に対する効果の認識や期待は，研究者間で認められているほどではない。この原因として，先行研究がコンピュータなどのテクノロジー利用の可能性を理論的，実証的に検証することを課題としており，テクノロジー利用の方法と技術に関する研究が不足していることが指摘されている(Balacheff & Kaput, 1996；Goldenberg & Cuoco，1998；Clements & Battista, 2000)。このような状況は，日本においても同様であると考えられる。そのため，従来の環境における学習者の活動と，教授の内容と方法を根本的に変えてしまう可能性を持つ，コンピュータを利用した教授計画の設計に対する示唆を与えるには不十分であり，課題が残されている。

以上のような問題状況を克服するために，教材開発から指導計画，その展開などの一連の教育実践を，教師が設定する学習者を取り巻く学習環境の構築として捉え，議論する必要がある。そして，この構築の観点と構築された学習環境を記述し，分析・評価する枠組みの提案はこれからの教育学研究における重要な課題の一つとなる。本研究はこの課題の克服を目指している。

本研究では，学習環境の構築に関する議論を展開するにあたって，フランス数学教授学において Brousseau, G.が1980年代に提唱した，数学における教授学的状況についての理論（Theory of Didactical Situations in Mathematics）を参照し，教師が設定する学習者を含む教授学的状況の構築を考察する。フランス数学教授学は，数学的な知識の分析とそれに基づく教授の方法を研究し，関係する対象を理論化することを目的としている。本理論は，現在のフランス数学教授学の基礎を成す理論として，またフランスのみならず諸外国においても数学教育学における根本的な問題を解決する糸口を提供するものとして広く認められている。Brousseau の理論は，授業などで見られるあらゆる教授現象を説明可能にする概念モデルを提案するものである。しかしながら先にあげた問題状況の克服は，教授現象を分析するだけでなく，教授学的状況を構築するための理論の提案によってなされる。よって本研究では，Brousseau の提唱した概念モデルを，構築のためのモデルに捉えなおし，構築のための観点や方法の提案を行うことが必要である。

また，本研究ではコンピュータの利用を含む教授学

的状況の構築を検討するものである。これまでBrousseauを始め，教授学的状況の議論に関する先行研究は，コンピュータの利用を視野に含むものではなかった。Brousseauと同じフランス数学教授学の立場にある先行研究において，教授学的状況についての理論を背景に，コンピュータ利用についての議論が行われているが，Brousseauのアイデアを部分的に実現する可能性を述べるにとどまっている。また，学習者とコンピュータとの関係や学習者の認識への影響の分析に注目し，この関係を管理し組み立てる教師の立場から議論されていない。本研究は，上記の問題状況の克服のためにこのような点に焦点を当て議論する。

先行研究より，コンピュータを利用することは，個々の学習者の活動を支援する役割を果たす。図形学習においては特に，図形の認識における学習者の知覚的な活動を支援し，論理的な活動への導入段階において重要な役割をコンピュータが果たすことが示されている（例えばMariotti, 2001）。さらにこの知覚的な活動の支援は，先の数学的な活動を経験させるものである。よってコンピュータによって実現される環境を充実させるための観点を示すことは，これからの数学科の指導に期待される方向性を示すことにつながる。このような可能性がある一方で，コンピュータを利用した学習環境は，学習者の解釈や学習の方法などにおいて従来の環境と異なる性質を持つものであり，教授学的状況の構築を議論するに当たって考慮されなければならない問題を含み，本研究において克服しなければならない課題となる。

そこで，本稿では，数学学習のための教授学的状況の構築を議論するための基礎作業として，Brousseauの理論を整理し，コンピュータを利用した教授学的状況の構築において，学習者が相互作用する状況として教材を見直すことが必要であることを提案する。また本稿における開発の観点の事例の検討は，教授学的状況の構築の観点を提案し，構築された教授学的状況の分析と評価の枠組みの提案に対する見通しを与えてくれる。本稿では特に，図形学習におけるCabri-Geometryの事例を用いる。

2．数学における教授学的状況についての理論

2．1．理論の概観

Brousseauによれば，授業場面は学習する主体（以下学習者）が，ある数学的な知識を自ら構成し確立することを目的とした教授学的状況として捉えられる。この状況は，学習者，教師，*milieu*の間の関係によって組織される複数のシステムが複雑に係わりあって作り上げられている。教授学的状況の基本的なモデルは図1のように示すことができる。

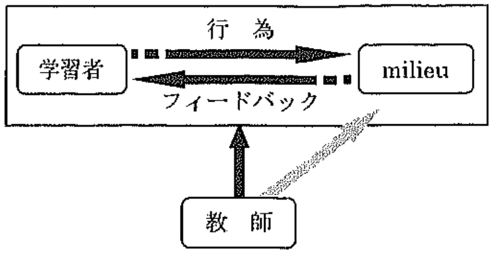

図1．教授学的状況のモデル

数学の教授と学習についてのBrousseauの見解をまとめ，このモデルの説明を以下に述べる。

Brousseauによれば，数学の教授とは，学習者による知識の構成を期待する，教師による様々な活動を指している。そのひとつとして，数学者の活動に類似する様々な活動を学習者が行う状況の設定が挙げられる。Brousseauのいう数学者の活動とは，自分の数学的な考えや，新しい発見を同定し，知識として伝達することにある。伝達において，その受け手は数学者が行った作業の再生のプロセスを行う必要なく，その知識を説明できる。同時に受け手がその知識を利用し，利益を得ることができるということで知識の妥当性は示される。すなわち，自分の考えや発見は，一次的な段階で公表されるのではなく，脱文脈化，脱個人化を経た状態で公表されなければならない。この立場で教授と学習を見直すと，教授は，数学者が行う一連の活動：自分の考えや発見の同定から他者への伝達を行うこと，ができるような状況の設定から始まる。よって教師の活動は，学習者に期待する活動を行わせるように数学的な知識を再文脈化することから始まる。また学習は，教師によって設定された状況において，数学的な知識の構成に向けて，数学者の活動に類似の一連の活動プロセスを展開することである。すなわち，学習者自身が数学的な知識に関連する考えや発見をし，他者，ここでは教師や他の生徒に伝達することによって，数学的な知識が構成される。Brousseauのモデルにある*milieu*は，この学習者の知識の構成を促す働きを期待され，学習者の相互作用の相手として，教師によって設定される。

2．2．教授学的状況と亜教授学的状況

2．1．より，Brousseauの見解において知識の構成は，個人的な段階と社会的な段階の二つの段階を必要

とする。この見解は，教授学的状況をさらに二つの状況：教授学的状況と亜教授学的状況を区別することに現れている。

教授学的状況は，先の知識の構成における社会的な段階である。対して亜教授学的状況は，個人的な段階である。亜教授学的状況における教師の活動は，教授の委譲（devolution）で具体的に説明される。

知識の一つの表現形式は，関連する問いとそれに対する解答のつながりである。この立場に立てば，学習者は亜教授学的状況において，教師によって与えられた問題の解決が自分の責任であることを意識し，問題に対する解答と解答を得るまでのプロセスを作ることによって，知識の生成を行うことができる。教授の委譲とは，学習者が問題の解決を自分の責任と意識するような教師による作用を説明する概念であり，学習者による知識の生成のための学習者と *milieu* との相互作用を生じる状況の教師による設定からなる。

この亜教授学的状況における学習者の活動と生成された知識は，次に教授学的状況においてその妥当性を図ることとなる。

教授学的状況は先述したように，数学者が自分の考えや発見を公表するコミュニティを擬似するものである。学習者は，主に他者とのコミュニケーションを通して，自分の考えや発見を個人的で多くの文脈を持つものから，数学的な知識としてのより一般的な特徴と意味を持つものへと洗練する。この活動によって知識の生成から構成が期待される。またこの活動を通すことによって，個々の学習者が自由に生成したものにとどまらないという社会的に担っている責任を教師が果たすことが可能になる。

2．3．*milieu* 概念の導入

Brousseau の提案するモデルの特徴は，先の知識の構成を2つの段階に分けて議論した点と，学習者の知識の構成のプロセスを支える概念装置として *milieu* 概念を設定したことにある。*milieu* とは，先述したように，学習者の相互作用の相手として定義される。この *milieu* は先の二つの状況のどちらにも含まれるものであるが，その性質や教授状況において果たす役割，*milieu* となりうるものは異なる。

この *milieu* 概念の起源は，生物学にある。金森(1996)によれば，生物学における *milieu* 概念は主体を囲む物理的な環境のすべてではなく，主体自身にとって有意味な刺激を発するもののみからなる。すなわち *milieu* は，主体にとって与えられたものではなく，主体にその構成基準が存在し，主体によって能動的に構成され，その時々の様々な条件に応じて，流動的に変化するものである。しかし，これは主体の解釈に関わる問題であり，主体が *milieu* そのものを制御することはできない。この生物学における *milieu* 概念は，Brousseau の理論において，学習者に設定される学習状況の考え方に現れている。学習者に与えられる状況は，学習者がこれまでの経験で自然に反応することができ，学習者との相互作用を促す刺激を発する。そして，状況そのものは，教師によって設定され，学習者によって制御されるものではない。ここに，生物学における *milieu* 概念との一致が見られる。Brousseau のいう学習は，*milieu* 概念を用いて次のように説明される。学習者は *milieu* に働きかけ(行為)，その働きかけに対する *milieu* からの反応（フィードバック）を受ける。学習者の次の行為はその反応の解釈を受けて行われ，行為とフィードバックの繰り返しで説明される *milieu* との相互作用を通して，これまでの自分の経験や既知の事実とは矛盾すること，解決できないなどの困難を克服し，*milieu* へ適応することによって知識を生成する。

2．2．ならびに2．3．について，Brousseau の例示する『The Race to 20』を用いて具体的に説明する。『The Race to 20』は，ペアを組んで順に数を数えていくゲームである。1から順に，数字を示していき"20"といった方が勝者となる。ただし，一人が一回に言うことができる数字は2つまでとする。このゲームに勝つためには，数の間に不変にある関係と解を得るために必要な操作を見つけなければならない。このゲームを通して，乗法，除法の演算の意味を再考することが学習者に期待される。

まず学習者に対して *milieu* は教授学的状況の部分として与えられる。「The Race to 20」が状況であり，ゲームのルール，相手の示した数字に1か2を足す，20を言った方が勝利することが状況に潜む数学的な構造である。教師によってこのゲームの説明，勝つための条件，ゲームを進めるときのルールが生徒に示される段階は，教授学的状況である。そしてこのルールによって決定され，学習者によって示される20までの実際の数の並びが *milieu* である。次に学習者が他の学習者と1対1で何回かゲームを行う。この段階は亜教授学的状況に入った状況であり，教師によって教授学的な委譲が行われる。そしてこの段階で，学習者にとっての *milieu* は，教師にとってのそれと一致するものではない。つまり学習者はゲームに負ける。教師にとって *milieu* は，"2，5，8，11，14，17"であり，初項2，公差3の数列が見える。しかし，学習者はルールが示

す状況の不変な構造を捉えることができていないため，とにかく不規則に1か2を足した数字を示す（行為）ことで，学習者自身の *milieu* を構成する。次に，1対1，あるいは数人対数人で，何度かゲームを行い，自分がゲームに勝った（フィードバック）ときの数の並びつまり *milieu* からのフィードバックの解釈から，“17を言えば勝てそうだ” や “11を言えば勝てそうだ” という予測が生まれる。そして次に予測に基づき，勝つときの条件によって *milieu* を構成し始める。学習者はこのような *milieu* への行為とフィードバックを通して，様々な情報を得て，*milieu* からのフィードバックの解釈を変化させる。それに伴って，学習者にとっての *milieu* が随時再構成されるため，学習者の認識が進むにつれて *milieu* も変化する。最終的に状況に潜む不変な構造を見つけ出し，定式化する。このような学習者の認識の能動的な変化の結果，学習者はいくつかの項目を組織化した知識の生成，知識に関する個人的な文脈を作る。次にこの状況に参加する学習者を二つに分けてゲームを行う。そのとき，それぞれのチームから一人代表者を出し，他のものは，ゲームの流れを見て相談しながら，代表者に指示を出す。さらに，得点のつけ方に，なぜ勝つか，なぜ負けるかを証明すると加算されるというルールを設け，学習者が自分の考えを公表する機会を二重に作る。すなわち，この証明によって保証されたストラテジーを実行すれば，いつでもこのゲームに勝つことができる，あるいは負けてしまう状況が，学習者に即座に見えなければならない。この段階は教授学的状況であり，学習者の脱個人化，脱文脈化が行われるような状況の設定がなされている。この時の *milieu* は，前に出て2人の代表者が進めるゲームの動きと，相談するチームの仲間である。構成した知識の妥当性は，ゲームに勝つという事実と，勝つための原理を他人に証明することによって示される。

2．4．理論の導入の利点と教授学的状況の構築に向けて

Brousseau の提案する数学の教授学的状況に見られる概念や理論と，従来の教育学研究や数学教育学研究における概念には，類似なものが多く見られるかもしれない。例えば，*milieu* 概念の設定は，教授の三角形に見られる第三者としての教材の位置づけに類似する。学習者は教材に直面することによって数学的な知識や考え方などを学ぶ。教師は教材を研究し，学習者が教材に直面するような指導過程を計画し，それを展開する中で，学習者のさまざまな活動を支援する。学習者と教材の相互作用性は，このような議論において既に考えられていたと想定できる（例えば，長谷川，1967 a/b，1978；平林，1987）。しかしながら，実際の教授においてこのような相互作用性の実現には限界があり，学習者自身が数学を創造し，発展させる活動を行うまでの自由な裁量の範囲を広げることは，日本における一斉授業の形式を主とした状況では困難であった。この点の克服に対するアイデアを示すものとして，Brousseau の理論を導入することには，次のような利点がある。

Brousseau の提案した教授学的状況についての理論にある諸概念は，様々な教授現象を説明するものである。これにより教授学的状況に含まれる学習者，教師，教材（*milieu*）の関係が明確にされた。そして，授業の展開が，この関係を保持しながら，展開する流れの中で変化する，*milieu* の役割と学習者と *milieu* との相互作用の意味内容によって説明された。

このような教授現象に見られる関係などは，実際の状況において，複雑に絡み合い，切り離して考えることができないものであるがために，これまで個々の教師の裁量にまかされていた部分である。しかしながら Brousseau の理論を導入することによって，教授現象を構成するすべての要素を，全体的に関係付けて構成する一つの理論的な枠組みを示すことができる。これは，本研究の課題とする教授学的状況の構築のための土台となる。

ここから教授学的状況の構築のための議論を展開するためには，図1にある Brousseau の教授学的状況の基本的なモデルを現象の説明のための観点から構築のための観点へと変換することが必要である。特に *milieu* の設定と学習者と *milieu* との関係について検討し，教師の活動のための観点を示すことが課題となる。

3．状況としての教材の開発と学習者の活動の誘発

3．1．学習者と相互作用する状況としての教材

2．4．で述べたように，教授学的状況の構築について議論するために，*milieu* の設定と学習者と *milieu* との関係について考察することが課題となる。この課題に応えることは，次に説明する教授計画の問題点を克服し，教授学的状況の構築の観点を与えてくれる。

第一に *milieu* の設定について議論することは，教材の相互作用性の問題の克服につながる。学習者と教材との相互作用を実現することは困難である。なぜならば，学習者の教材に対する働きかけ（行為）は可能であっても，その働きかけ（行為）を評価するフィードバックの実現は，従来，教師の反応や，問題が解けな

いという事実などによるものが多くある。よって，これまでにも指摘されてきた教師と学習者の直接的な教授によって生じる問題点は克服されないままであり，学習者自身で知識を生成するような一連の活動を行うことには限界がある。また，学習者が実験などの活動を通して得られた結果について示すことができても，利用される教具の特殊性などの問題と係わり，結果の検証を個人的な知識の生成の側面において実現することは困難である。この時，教室全体での討議の場面などにおいて，学習者が教師や他の生徒の説明を聞き入れるのみになってしまう情況に陥ることが想定される。図１に示される教授学的状況の基本的なモデルにある *milieu* の設定の議論は，学習者と相互作用する状況としての教材の必要性を示し，それを設定するための観点の提案につながる。これによって，これまでの教材の開発や指導の計画，展開の捉え方，教授状況における教師自身の役割に対する見方や考え方に変化をもたらし，このような問題状況の克服が期待できる。

次に，Brousseau の理論における知識の構成の二つの段階を意識した，学習者と *milieu* との関係について議論することは，学習者の活動の自由度と教師の社会的な責任に関わる問題点の克服につながる。『The Race to 20』の最終段階にみられたような，他者との相談，指示の機会や原理を示し証明する機会を設けることは，数学のコミュニティの一員としての意識を学習者に持たせることとなる。知識の構成における個人的な段階については認知的な研究で，社会的な側面については社会的構成主義の立場の研究で，そのプロセスの分析や考察がこれまでなされてきた。しかしながら学習者の活動の自由度と教師の社会的な責任に関わる問題点の克服は，この二つの側面を併せ持った教材の開発や指導計画の実施によってなされる。この開発や指導の計画のための観点は，数学の教授と学習における特有性を示す *milieu* の設定と，知識の構成の二つの段階における学習者と *milieu* との関係の変化によって示すことができる。これより，学習者と相互作用する状況としての教材の開発と指導の計画と展開のための観点を与えてくれる。

３．２．ルールの設定とその意味

３．１．で触れた学習者と相互作用する状況としての教材の開発に関して，Brousseau の理論にある事例の分析から，教材の開発の観点が見出され，状況を制御するルールの設定をその観点として考えることができる。先述の『The Race to 20』は，乗法・除法の学習のために開発された状況である。この状況において，“20を言った方が勝ち”，“１か２しか足すことができない” などのいくつかのルールがあった。このルールが状況を制御する数学的な構造であり，学習者によって制御されることのない *milieu* の性質を決定付けるものである。また学習者の行為に対するフィードバックの意味内容も決定され，学習者の行為に対する評価を行うことができる。このようなルールは，状況の数学的な構造を示すものであるが，教授学的状況における二つの指示物：解決のための条件と方法とその制約に大別して考え，上記について説明することができる。

解決のための条件とは，先述のゲームで言えば，“20を言った方が勝ち” であり，*milieu* からのフィードバックの中で学習者の問題解決の指標となり，責任が果たされたかどうかの判断に関わるものである。次に解決のための制約とは学習者が *milieu* に対して働きかける方法とその制約となるものであり，先述のゲームで言えば，“相手の言った数に足す” と “１か２しか足すことができない” である。そしてこの方法とその制約は，学習者が学習を通して吸収することが期待される数学的な知識と考え方を反映するものでなければならない。例えば，先述のゲームでは，勝つために自分が最初に示さなければならない数は，20を，足すことができる数の和，つまり１と２の和である３で割った余り（ここでは２）であり，それ以降は，３の倍数を足した数（５，８，11，14，17）を順に言えばよい。つまり乗除の一つの関係を探究する機会を与えるものであると考えることができる。

よって，このようなルールは *milieu* を制御するものであると同時に，学習者が知識の構成の個人的な段階において *milieu* との相互作用において生じる文脈の質を決定するものであり，かつ知識の構成における社会的な段階で妥当性を図る際の基準ともなる。また，このようなルールは，学習者の活動の情意的な側面を支援する教育的な価値を持つと考えられる。問題解決の指標となるルールを明確に示すことは，学習者にとって自分の活動の解決に至るプロセスにおける位置付けが明確になり，責任を持って解決する意識を生じる要因となりうる。さらに，方法とその制約を示すルールを示すことは，働きかける方法を明示することによって，「まずはやってみよう」という学習者と *milieu* との相互作用を生じるきっかけをつくると考えることができる。以上の考察より，状況を制御するルールの設定は，学習者と相互作用する状況としての教材を開発する観点となりうる。

4．コンピュータを利用した図形教材の開発の観点

4．1．教授学的状況についての理論の発展

本節では，3.までの考察をもとに，図形学習におけるコンピュータを利用した教材の開発の観点を，指導の計画と展開を考慮し，検討する。Brousseauは，提案した理論において，図形領域についての考察が不十分なことを示している。近年，同じフランス数学教授学の研究者がこの理論を参照し，図形領域における考察を進めている。これらは，亜教授学的状況の個人的な段階における議論を深めた研究（Comiti & Grenier, 1995）や，マイクロワールドの研究を発展させ，亜教授学的状況における *milieu* の実現を目指すソフト開発とその利用についての理論的な研究（Baracheff 1993, 1994a；Laborde 1993, 2001；Laborde & Laborde, 1993）である。しかし，Brousseauの提案する教授学的状況の一連の変化を議論するものについて考察されているものは少ない。証明学習とCabri-Geometryなどの作図ツールと呼ばれるソフトによって実現される動的幾何学習環境との関係の議論において，Brousseauの理論を参照し，長期的な教授プロジェクトを実施し，考察を加えている研究がいくつかある。やはりこれらの研究においても，学習者の知識の構成における個人的な段階に分析の焦点が当てられ，教師の活動に対しては，抽象的な議論が多く，指導計画などに関わる具体的な観点が示されているわけではない。また，日本における図形の学習環境としての考察に対しては，教育内容の問題が係わり，言及すべき点が異なるという問題が解決されなければならない。しかしこれら個人に焦点を当てた研究の成果から，コンピュータが状況としての教材の開発の可能性を高めること，さらに学習者の知識の構成の個人的な段階に対して有効であることが明らかである。本研究では，そのような個人の段階への効果を実現し，さらに社会的な段階における教授の展開を検討することで，先行研究で議論されていない，教師の活動の内容を示し，説明することを目指している。本稿では，この基礎作業として，Cabri-Geometryを利用した図形学習における教授学的状況の事例を検討する。よって想定される学習者の活動や亜教授学的状況における知識の生成の文脈は，Cabri-Geometryで実現される環境特有のものである。

4．2．動的幾何学習環境の特徴と問題点

Cabri-Geometryで実現される環境は，一般に“動的幾何学習環境”と呼ばれるものに含まれる。この環境では，基本的な図形（点や直線など）と基本的な関係（垂直や平行）のコマンドの組み合わせを通して作図すること，また作図された図形は，マウスを使って変形することが可能である。その変形において，作図の過程で定義された関係（点Aは円上にある，線分ABとCDは直行する，など）は保持されたままである。例えば，ひし形を作図した場合，出来上がった図形は，大きさや向きが変わっても，ひし形の性質を保ったまま図2のように変形される。

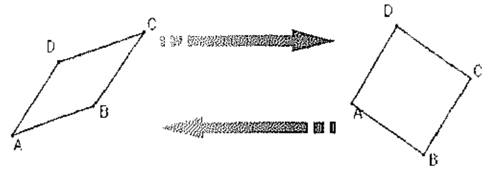

図2．ひし形の作図と図の振る舞い

このような環境の実現が，学習者の知覚的な活動，つまり図形に対する実験や観察を促し，学習者の図形の認識を支援することが先行研究において示されている（例えば日本においては清水・垣花，1999）。さらに飯島（1992）やLaborde（2001）によれば，作図ツールは学習者が探究する問題状況を提供するものであると述べられており，作図ツールが知識の構成に関わる学習者個人の文脈の生成に関与していることが示されている。これと類似する研究として認知科学分野においても成果が示されている（例えば，加藤・有本，2001)。関連してMariotti（2001）では，Vygotskij派の理論を参照し，動的幾何環境における作図活動が証明への導入段階において有効であることを示している。

これらの先行研究の成果は，図形学習における動的幾何環境の以下のような可能性を示すものとして次の三つにまとめることができる。

第一に，ドラッグモードと呼ばれる図形の性質を保持した動的変形を可能にする様式によって，学習者の図形に関する予測や発見を生み出す環境を実現するとともに，予測や発見したことの検証の活動を促す。これに伴って，学習者がスクリーン上の図形に対して働きかける行為とスクリーン上の変化の解釈を繰り返し，この行為の意味づけを行っていくことが期待できる。

第二に，動的幾何環境における実際に図形を作成する活動，つまり作図活動をすることによって，より論理的な思考力の育成へとつながっていくことが期待される（例えばHealy et al., 1994a/b；Mariotti, 2001)。これは，作図活動そのものが持つ論理的な特性と，ドラッグモードによって実現される予測の検証の機会によって生じるものである。

第三に，証明の導入段階における動的幾何環境の有

効性から，知識の構成における個人的な段階と社会的な段階の係わりを生じる可能性を持つことが期待できる。

上記のような多くの可能性を持つ Cabri-Geometry などの動的幾何環境の研究は，次のような課題を残したままである。

まず，スクリーン上での図の動きに対する学習者の解釈に関する従来の環境との区別，さらにその後の学習に対する影響という利用に対する長期的な展望が明確にされていない。そのため，４．１．や上記に述べたような効果や可能性の実現は，調整され管理された特定の環境での議論の域を出ない。

次に，先の可能性や効果の実現はコンピュータ利用のみで実現されるのではなく，問題の提示，学習支援など指導の展開における教師の活動とのかかわりが深い。しかし，この点についての理論的な議論は展開されていない。

本研究の目的は，数学教育におけるコンピュータ利用についての貢献をも目指していることから，議論の展開においてこのような点を考慮する必要がある。

４．３．事例：ひし形の作図一教材開発の観点の考察

ここでは，これまで Cabri-Geometry の利用経験がない中学校１年生を仮定した，Cabri-Geometry でのひし形の作図を事例に，コンピュータを利用した図形の教材開発の観点について考察する。３．までの考察から，１）設定される状況の特性の記述，２）*milieu* を制御するルールの設定，３）知識の構成の二つの段階での *milieu* の変化について検討することが必要であると考えられる。この３つの観点に関する本節での考察は，本研究が目的とする教授学的状況の構築の観点の提案と構築された教授学的状況の分析と評価の枠組みの提案のための原案になり，今後の見通しを与えてくれる。

１）設定される状況の特性の記述

この記述には，状況としての教材がどのような特性を持つかを記述するため，教授目的，学習者の既習事項，利用する道具に依存する特徴などが挙げられる。

中学校１年生を仮定しているということは，まず学習者がひし形についての知識を既に持っているということ，さらにコンパスと定規による作図の方法について知っているということが想定される。この場合，Brousseau の例示と同様，学習者のひし形に関する知識が，異なる状況，つまり図の動的変形を可能にしたコンピュータによって実現される環境下における作図題の解決においてもその知識を活用することができるようにする，そして，より広い特徴を持つ知識が構成される状況の設定が目的とされる。これより問題は『マウスで動かしても崩れないひし形を作図しなさい」と提示される。

作図題の解決という設定は論理的に思考するなどの諸能力の育成を視野に入れるという目的とともに，後のルールの設定とも関わって，知識の構成における社会的な段階での議論を，実験・観察によって見出された事実だけでなく，擬似的な数学のコミュニティにおける議論として成立させるために行っている。コンピュータ環境下では，図形の動的変形が可能になるため，学習者にとって作図の意味が，形を作ることから，要素間の関係を論理的に組み立てることに変化する。このことは，数学的な活動と知識理解，数学的な見方考え方の高まりの同時性を生じるものであると期待できる。さらに，学習者にとってなじみのある問題解決の方法の特定は，予測や発見した事柄の探究のための方法を明示することであり，学習者の知識の生成を促すと考えられる。

２）ルールの設定

次に３．２．で示したルールに含まれる解決のための条件，方法とその制約について明示することが必要である。さらにここでは，コンピュータによって実現される動的幾何環境の特性を生かしたルールの設定が求められる。

まず条件は，問題の設定とも関わるものであり，“動かしても崩れないひし形”である。見た目や測定値でひし形になるように作成することは，環境において問題の解決のための条件を満たしていないというフィードバックを示すとともに，崩れないひし形を作るための行為を考え実行することへと学習者と促す。次に方法とその制約は，メニューコマンドを利用した「作図」である。先のフィードバックを受け，崩れないひし形を作るための行為は，ひし形の性質を作図手順の組み立てによって表現することである。この時，要素間には依存関係があり，ひし形を決定する性質が何であるかという考察へと導くと考えられる。

３）知識の構成の二つの段階での *milieu* の変化

亜教授学的状況における *milieu* は，学習者自身がスクリーン上に作図した図形とその図形の振る舞いである。対して教授学的状況における *milieu* は，学習者自身ではなく，他者が作図した図形とその図形の振る舞いである。学習者は自分の考えと他者の考えを比較し，自分の，あるいは他者の作図に妥当性を与える論理的な説明を行うこと，さらに違いを明確にすること，そしてその違いの源を論理的に説明することなどの行為

が想定される。

4．4．問題点

4．3．の事例から，教授学的状況の議論を展開するためには，次のような議論をさらに進めることが必要となる。まず指導計画を考えるとき，この観点はさらに詳細にされなければならない。例えば，『動かしても崩れないひし形』を説明する教授学的状況の構成は，学習者の知覚的な活動に対して大きな影響力を持つ動的幾何学習環境においては重要である。教師が作成した『動かしても崩れないひし形』を演示することは，学習者の *milieu* との相互作用に対して大きな影響を与える。教師が作成したひし形と「同じ振る舞い」を実現することが学習者の目的となりうるからである。これは Brousseau が問題視した教授学的な前提を持つことを意味し，亜教授学的状況の Brousseau の考える意味での実現は不可能になる。

また，Cabri-Geometry による作図は，コンパスと定規の作図にはない機能を備えている。例えば垂線や平行線の作図はコマンドを指定し，一定の指示をコンピュータに与えることによって簡単に実行される。また，測定などの従来の作図では実現できない，あるいはまったく関係のない機能が含まれている。これらの機能をどのように調整し，方法としての作図をどのように考えるかという問題も生じると考えられる。

5．おわりに

本稿は，教材の開発や，指導の計画，その展開も学習者が数学を学ぶ学習環境を構築するものとして捉えられる必要があるという立場に立ち，数学学習の教授学的状況の構築の観点と構築された教授学的状況の分析と評価の枠組みを提案するための基礎作業として位置づけるものである。まず，現在求められている，数学教育におけるコンピュータの導入と利用によって変化する教育の方法と内容に関する問題状況に応えるために，フランス数学教授学における数学の教授学的状況についての理論をまとめ，教授場面を説明する概念モデルから，構築するためのアイデアを抽出した。さらに教師の活動として教授学的状況を構築するときに，状況としての教材の開発の必要性とその開発における観点の原案を提案し，これらを図形学習におけるコンピュータ利用を事例にして検討した。その結果，従来の教材を，学習者が相互作用する状況としての教材に捉えなおし，その立場に立って開発を考えることの必要性が示され，かつ事例の考察から教授学的状況の構築にかかわる教材開発のための三つの観点：1）設定される状況の特性の記述，2）*milieu* を制御するルールの設定，3）知識の構成の二つの段階での *milieu* の変化，が示された。

しかしながら4．3．ならびに4．4．で示したように実際の指導の計画と展開においては考慮されなければならない問題が残されている。この問題の克服のために，本研究における教授プロジェクトの計画と実行，その分析を行い，枠組みの詳細を記述することが課題として残される。今後はこのような残された課題を解決し，数学の教授学的状況の構築のための理論の展開を目指す。

引用参考文献

Balacheff, N. (1993). Artifical Intelligence and Real Teaching, *Learning from Computers, Mathematics Education and Technology*, Edited by Keitel, C. and Ruthven, K., 131-158.

Balacheff N. (1994a). Advanced Educational Technology: Knowledge Revisited, *Journal of Educational Technology Systems*, 23(2), pp. 98-106.

Balacheff, N. & Sutherland, R. (1994b). Epistemological domain of validity of microworlds: the case of LOGO and Cabri-Geometry, in R. Lewis & P. Mendelsohn (eds.), *Lessons from Learning*, 137-150, Elseviers Science B. V.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics, in A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 469-501, Kluwer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*, (tras. by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield), Kluwer.

Clements, D. & Battista, M. T. (2000). Designing Effective Software, in A. E. Kelly & R. A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 761 - 776, Lawrence Erlbaum Associates.

Comiti, C. & Grenier, D. (1995). Two examples of "a split situation" in a mathematics class, *For the learning of Mathematics*, 15(2), pp.18-22.

Goldenberg, E. & Cuoco, A (1998). What is Dynamic Geometry?, in R, Lehrer & D, Chazan (eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, 351-367, Lawrence Erlbaum Associates.

長谷川栄（1967a）．学習指導の過程と段階の吟味，伊藤和衛・大浦猛・宮原兎一編著，*教育原理研究*，157-163，明治図書．

長谷川栄（1967b）．学習環境の構成，伊藤和衛・大浦猛・宮原兎一編著，*教育原理研究*，164-166，明治図書．

長谷川栄（1978）．教授メディア，学習環境，木原健太郎監修，*現代教科教育学体系*，1，149-155，第一法規．

長谷川栄・佐々木俊介編著（1992）．*教育の方法と技術【実践的指導力の基礎を培う】*，協同出版．

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. & Noss, R. (1994). Messing up, *Micromath*, 10(1), pp.14-6.

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. & Noss, R. (1994). Cabri Constructions, *Micromath*, **10(2)**, pp.13-6.

平林一榮（1987）．*数学教育の活動主義的展開*，東洋館．

飯島康之（1990）．Computer による動的な図形教材の開発について－"Geometric Constructer" を用いた探究的学習のために－，*イプシロン*，32，pp. 56-75．

飯島康之（1992）．数学的探究のための環境としての作図ツール―事実の収集可能性と数学的知識の実行可能性の観点からの考察－，*日本数学教育学会論文発表会論文集*，445-50．

飯島康之（1992）．作図ツールを用いた問題解決における問題変容と問題生成の一方略について－作図の構成的な性格とコンピュータによる支援について（その３）－，*イプシロン*，34，pp.32-48．

飯島康之（1993）．問題解決を支援するソフトウェアの開発－作図ツール Geometric Constructer の開発の理念と過程－，*科学教育研究費報告書*，89-117．

飯島康之（1994）．コンピュータを活用した問題解決・課題学習，中学校数学科教育実践講座刊行会編，*CRECER 中学校数学科教育実践講座第11巻*，269-278，ニチブン．

加藤浩，有元典文編著（2001）．*認知的道具のデザイン*，金子書房．

金森修（1996）．*フランス科学認識論の系譜　カンギレム，ダゴニュエ，フーコー*，勁草書房．

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry, in C. Keitel, & K. Ruthven, (eds.), *Learning from computers, mathematics education and technology*, 48-67, Kluwer.

Laborde, C. and Laborde, J. (1993). Problem solving geometry: from microworld to intelligent computer environment, in J. Ponte, J. F. Mattes, J. M. Matos, D. Fernandes (eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies*, 177-192, Kluwer.

Laborde, C. (2001). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving, *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp.151-161.

Mariotti, M (2001). Introduction to proof: The mediation of a Dynamic Software Environment, *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp.25-53.

宮原修（1990）．教材・教具，細谷俊夫編集代表，*新教育学大事典*，438-440　第一法規．

文部省（1999）．*中学校学習指導要領解説－数学編－*，大阪書籍．

沼田真（1994）．*自然保護という思想*，岩波書店．

清水克彦，垣花京子編著（1999）．*コンピュータで支援する生徒の活動－数学科・図形分野での新しい展開－*，明治図書．

A Study of Constructing Didactical Situations for Learning Mathematics:

The Case of Cabri-Geometry

Hiroko Tsuji

The purpose of this study is designing computer-based learning environments in mathematics education based on Theory of Didactical Situations in Mathematics. (Brousseau G., 1997)

Brousseau says (1997), didactical situations are composed of students, a teacher(s) and the milieu, and have two stages: an adidactical situation(s) and a didactical situation(s). An adidactical situation is an essential part of the broader situation. The adidactical situation in which the teacher seeks to devolve the problems upon the students provides him/her a sense of responsibility and fruitful interaction between the students and milieu. The milieu is defined as the other party of the interaction with students; students can construct and acquire the mathematical knowledge through an interaction with the milieu.

A feature of this theory, however, is a proposition of some concepts to explain teaching situations. In order to overcome problems situations which is relevant to using computers in mathematics education, not only explanation model but also constructing model, has to be proposed. So in this paper, especially, the followings are discussed for attainment of this purpose;

- Reconsideration of development of teaching materials, and
- Viewpoints of development of teaching materials and constructing didactical situations for learning mathematics.

From viewpoints of general considerations about constructing didactical situations for learning mathematics based on Brousseau's theory and the case of a constructional problem of a rhombus with Cabri-Geometry, a conclusion of this paper is as follows:

1. The teaching materials for mathematics should be considered as interactive situations.
2. As Viewpoints of teaching materials and constructing didactical situations the followings are proposed;
   (1) Description of properties of the situations,
   (2) Establishment of management rules for the milieu,
   (3) Change of the milieu in both stages of mathematical knowledge constructed by students.