2009筑波大学附属駒場論集49集

豊かな創造性を育む数学教材の開発と実証的な研究

ー金王八幡宮の算額の教材化ー

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世

豊かな創造性を育む数学教材の開発と実証的な研究

－金王八幡宮の算額の教材化－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世

要約

江戸時代の様々な人たちが，数学にまじめに取り組んでいたことが現在に残されている書物で知ることができる。その内容をみると，年齢当てクイズ，パズルなどの遊びの内容の数学，両替などの仕事や土地の測量や米の収穫量を測定するためなどの日常生活に必要な内容の数学，村松茂清のように自身の和算書『算俎』(寛文3年（1663年)刊行)で，円に内接する正多角形の周の長さを正方形（2^2角形）からはじめて正32768（2^{15}）角形までを計算し，円周率を3.141592648777698869248と求めた数学など，いろいろな数学が江戸の人たちによって学ばれていた。江戸後期に入り，現在の微分積分学で扱うような内容まで数学は発展していった。

ここで取り上げる算額は，江戸時代における数学研究を通して得た知見や数学の問題作りを，多くの人に知ってもらうため，また，こうした研究や問題ができたのも神仏のおかげという日本人固有の信心深さにより，神仏に感謝し，それらを絵馬にして神社や寺に奉納した日本独自の文化である。

本稿では，金王八幡宮の現存する３面の算額を，授業で使えるように現代訳と現代的な解答を付けて紹介した。解答では和算独特の解法についてもできるだけ紹介した。

本稿により江戸文化の数学である和算の見方や考え方のよさが現代の数学教育へ生かせれば幸いである

キーワード：算額，金王八幡宮，径矢弦の術，双股弦の術，招差術

1　はじめに

明治となり学校では西洋数学が導入された。江戸時代の数学を西洋数学と区別するために，江戸時代の数学を和算という。学校では西洋数学による教育が始まり，和算を学ぶ者は徐々に少なくなっていった。現在は和算研究者を中心に活発な研究活動が行われ，著作物やイベントにより和算文化が世に発信されている。平成20年は算聖といわれた関孝和の没後300年祭に当たり，関に関係するイベントが全国的に行われ，和算文化が見直されている。また，和算の内容を数学教育学に生かそうという教育実践や研究も多く報告されるようになった。

さて，本稿で報告する「算額」の風習は江戸時代の中頃から始まった日本独自の数学文化である。政治・経済・文化の中心地であった江戸にはかなりの数の算額が奉納されていたと考えられる。『算学淵底記』（村瀬義益著，延宝８年（1681年））には，江戸のあちらこちらに算額が奉納されていたことが記されている。本校の近くにある目黒不動にも算額が奉納されていたことが取り上げられている。また，算額集の『神壁算法』(藤田貞資著，寛政元年（1789年））も刊行されるなど，いろいろな立場の人たちが算額に興味関心を持っていたことが伺われる。

しかし，神社仏閣の絵馬堂に掲げられた算額は，長年の風雨により傷んだり火災や戦災により消失してしまい，全国には約1000面が現存するにとどまっている。とくに，都内には多くの算額が奉納されていたが，上記のような理由もあり現存する算額は極めて少ない。岩手県，山形県などの東北地方や長野県には，多くの算額が現存すると同時に，和算研究活動も活発である。

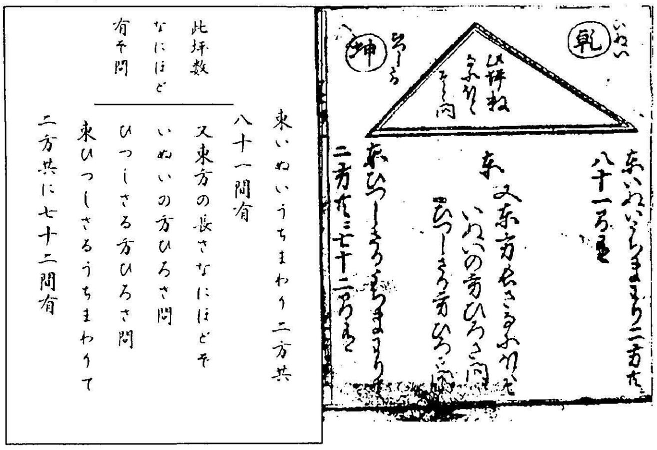
2　和算と遺題継承

和算を紹介するとき和算書『塵劫記』を紹介する必要がある。『塵劫記』は吉田光由によって寛永4年（1627年）に刊行され，多くの人々に親しまれた数学書である。吉田光由は京都の豪商角倉一族の一人であり，一族の角倉了以・素庵親子から中国の数学書『算法統宗』

An Empirical Research and Development of Teaching Materials for Mathematics to Foster Rich Creativity
- An Attempt to Make Materials from "Sangaku (Mathematics Tablet)" of Kon'nou Shrine -

を学んだ。角倉素庵は豪華な古典の復刻である嵯峨本を出版した人である。吉田は『算法統宗』を手本として，当時の日本の実情にあった生活に密着した問題をつくり，『塵劫記』を刊行した。『塵劫記』は挿絵，体裁といい，豪華な嵯峨本の流れを汲む立派な本である。『塵劫記』は当時の人が生活していくために必要な数学を「そろばん」という計算道具を使った方法を懇切丁寧に述べた生活のマニュアルでもあり，そろばんが全国へ普及するにともない，塵劫記をまねた多くの和算書が現れた。また，『塵劫記』のまねをする出版元が後を絶たないため吉田は何度も塵劫記を改訂した。寛永18年(1641年)に刊行した『新篇塵劫記』で，吉田は「世の中には『塵劫記』程度の知識で数学を教えている人がいる。数学を学んでいる人は，自分の師が力のある師かない師かわからないだろうから，師の力を判断する方法を教えよう。それは，ここに答えのない12問の問題をあげておくから，これができるかどうかで判断できる。」と書き，12問の問題を巻末に載せた。これを「遺題」とか「好み」という。

＜実際の遺題＞



(問題)　　新編塵劫記の遺題

直角三角形があって，東（斜辺）と乾の辺の長さの和が81間，東と坤の辺の長さの和が72間のとき，この三角形の面積と三辺の長さを求めよ。

吉田の遺題は12年後の承応2年(1653年)に榎並和澄という若い数学者が『参両録』で解答を発表した。榎並は吉田に倣って巻末に自分で考えた8問の遺題を載せた。榎並の発表が刺激となって，初坂重春が『円方四巻記』を1657年に，礒村吉徳が『算法闕疑抄』を1659年に，佐藤正興が『算法根源記』を1669年に刊行し，『塵劫記』の遺題に解答を付けるとともに，自らも遺題を挙げた。

このように，次々に遺題を解き和算書を刊行するとともに，自らも遺題を掲載するというリレー式の数学問答が始まった。これを「遺題継承」という。当然のことであるが，遺題は少しずつ難しくなっていき，新しい算法が考え出されるようになった。

関孝和（寛永19年（1642年）？～宝永5年（1708年））が筆算による代数の計算法である「傍書法[1]」も，沢口一之の『古今算法記』（寛文11年（1671年）の遺題を解くために考えだされた算法である。この結果は，関の刊本『発微算法』で紹介されている。当時の多くの和算家は傍書法（点竄術）を理解できなかったようで，関の高弟建部賢弘は，具体的な問題をもとに『発微算法演段諺解』の中でこの点竄術を詳しく解説した。遺題継承は，和算の発展に寄与したといえる。

3　算額奉納

しくさう 4　算額とは神社や仏閣に奉納した数学問題の絵馬のことをいう。江戸時代中期，寛文（1660年頃）年間のころから始まった風習であるといわれている。江戸庶民は数学の問題が解けたことを神仏に感謝し，ますます勉学に励むことを祈願して算額を奉納した。当時庶民の社交場である神社仏閣を成果発表の場とし，問題だけを書いて解答を付けない遺題を奉納するものも現れた。約1000面の算額が現存している[2]。この算額奉納の習慣は世界には例のない日本独自の文化であるといわれている。

算額が生まれる背景からもわかるように，江戸時代の数学文化はかなり程度の高いもので，その内容も数学遊戯の問題から本格的な数学まであり，現代の学校数学に通じる内容や話題も豊富である。明治になり洋算に切り替えられ，和算は今ではあまり知られていない。そんな中で，生活に密着した話題が多い和算の内容を，学校数学に活用するなど和算が見直されている。日本数学教育学会の研究大会においても，和算を活用した実践報告が多数寄せられるようになった。またNPO法人 和算を普及する会は，和算の風習である算額奉納にちなんだ「算額をつくろうコンクール」を実施し，優秀作品を立派な算額として，東京お茶の水の

1 傍書法は後に発展して点竄術ともいわれた。西洋数学でいう文字式のようなものである。

2 いろいろな記録や文献に残る算額を合わせるとかなりの数になる。

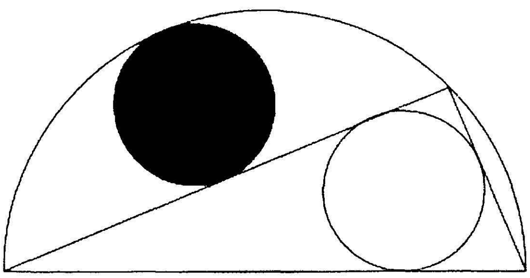
神田明神に奉納するなど，遠き江戸時代の伝統文化を数学教育に活かす活動を行っている。ぜひ先人が残してくれた貴重な文化財である算額や和算を数学の授業に活用していきたい。

3．1　算法少女

和算や算額を生徒に示すとき，歴史小説『算法少女』（遠藤寛子著，ちくま学芸文庫，2006 年）を紹介することをお勧めする。生徒に江戸時代における和算の文化的な側面を理解させるために，この本を読ませると効果的である。『算法少女』とは，もともと同名の和算書のことである。安永 4 年（1775 年）に千葉桃三によって出されたもので，内容は数学である。今回，ちくま学芸文庫より『和算書「算法少女」を読む』（小寺裕著，ちくま学芸文庫，2009 年）が刊行された。取り上げられた和算の問題が詳しく紹介されている。

さて，歴史小説『算法少女』の中に，青年の武士，水野三之介が神社に算額を奉納するために，多くの見物客の間を意気揚々と算額を携えて奉納する一節がある。その算額を見た算術好きの町娘あきは，以前にこの問題を父から習っており，答えが間違っていることをささやいてしまった。それを聞いた仲間の侍たちはあきを取り囲み何が違うのかと詰め寄るも，あきははっきりとした口調で真の解答を述べる。水野も間違いに気づき，奉納をやめていそいそと帰っていく。そんな一節がある。

なお，その問題はつぎの通りである。

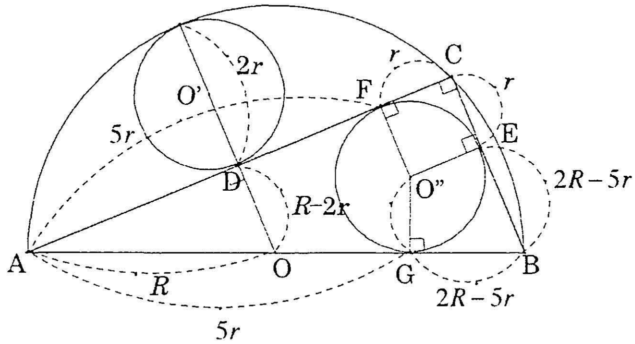


算法少女の問題

「図のように，半円に三角形が内接している。三角形の内接円（白円）と半円と三角形の一辺に接している小円（黒円）の半径が一致してするとき，半円の直径と小円の直径の関係を求めなさい。」というものである。シンプルではあるが，若干骨のある問題である。とても読みやすい著作であり，算額を生徒に紹介するよい題材になると思う。

3．2　算法少女の問題の解法

三角形 ABC と半円 O と弓形の内側の小円 O’，内接円を O”として，図のように記号を振る。ここで，半円と小円の半径をそれぞれ R，r とする。



O’と CA の接点を D とすると，

$$\mathrm{OD}=R-2r$$

中点連結定理より，$\mathrm{BC}=2(R-2r)$

O”と BC，CA，AB との接点を E，F，G とすると，

$\mathrm{CE}=\mathrm{CF}=r$

だから　$\mathrm{BE}=\mathrm{BG}=2(R-2r)-r=2R-5r$

$\mathrm{AG}=\mathrm{AF}=2R-(2R-5r)=5r$

よって，$\mathrm{AC}=\mathrm{AF}+\mathrm{CF}=6r$

ゆえに，直角三角形 ABC において

$\mathrm{AB}=2R$，$\mathrm{BC}=2(R-2r)$，$\mathrm{CA}=6r$

であるから，三平方の定理より，

$$\{2(R-2r)\}^2+(6r)^2=(2R)^2$$
$$4(R-2r)^2+36r^2=4R^2$$
$$-16Rr+16r^2+36r^2=0$$

$r>0$ より

$$4R=13r$$

以上から，求める半円と小円の直径の関係は，

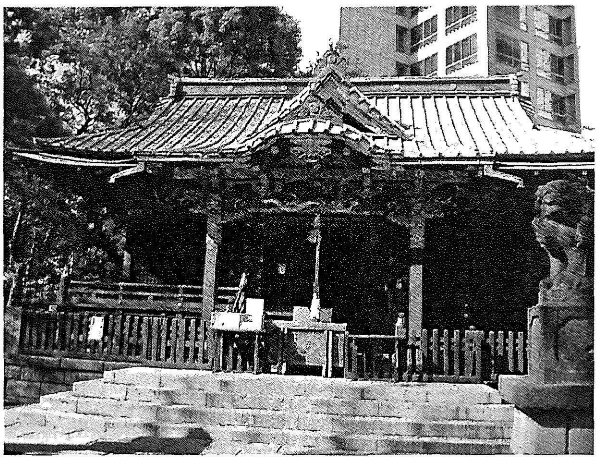
$$4\cdot 2R=13\cdot 2r$$

となる。　■

なお，水野三之介の算額は，$2R=3\cdot 2r$ と誤った解答が書かれていた。

4　金王八幡宮の算額

金王八幡宮は，河崎土佐守基家により第73代堀河天皇の寛治6年（1092年）に武家の鎮守として当地に八幡宮を創設したことによる。



金王八幡宮

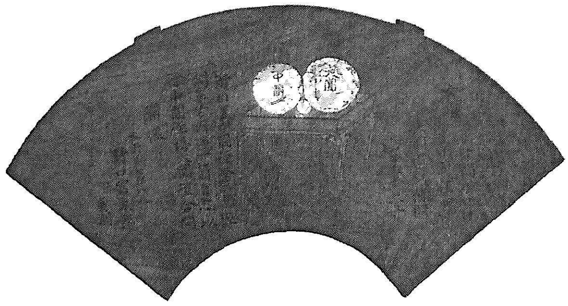
河崎家は功により渋谷の姓を賜り，この八幡宮は当初，渋谷八幡宮と称していた。その後，源義朝に仕え，保元の乱で功のあった渋谷金王丸の名声にちなんで金王八幡宮と称するようになった。現在の社殿は徳川秀忠の時代の慶長 17 年（1612 年）に徳川家光の守役の青山忠俊が乳母の春日局とともに造営を開始したものである。江戸初期の建築様式を留め，現在の門は江戸中期に建立されものである。

文治 5 年（1189 年），源頼朝は奥州の藤原泰衡退治の下向の時，太刀を奉納し父金王丸の忠誠を偲んだ。そのとき，鎌倉亀ケ谷の館の憂忘桜を境内に移し植えて金王桜と名付けた。渋谷区指定の天然記念物である。金王八幡宮は渋谷の閑静な環境にあり，多くの歴史的な遺物も多く有している。

ここでは，金王八幡宮に現存する３面の算額について，題意を現代語訳し，中学や高等学校で行う解法例を付けた。また，和算ではどのように解いたのかについてもできるだけ触れた。

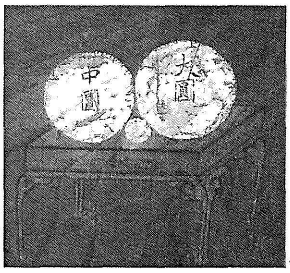
４．１　野口冨太郎　源貞則の算額（算額１）

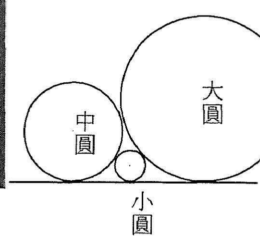
次の算額は元治元年（1864年）に源貞則の名で奉納された算額である。形状は扇形で，一般の算額が長方形であることと異なり，特徴的であり大変珍しい。問題は，大円，中円，小円の３円のうちの中円と小円の直径が与えられたとき，大円の直径を求める問題である。



算額１　元治元年（1864 年）

如図
中圓径九寸
小圓径四寸
大圓径幾何問
答　三十六寸
術日置中圓径除小圓径
開平方内減一箇自之以
除中圓径得大圓径合問
關流　水野興七郎門人
野口冨太郎
源　貞則
元治元甲子年十一月吉日





４．１．１　算額題意

図のように，中円[3]の直径が９寸，小円の直径が４寸であるとき，大円の直径を求めよ。

答，36寸である。

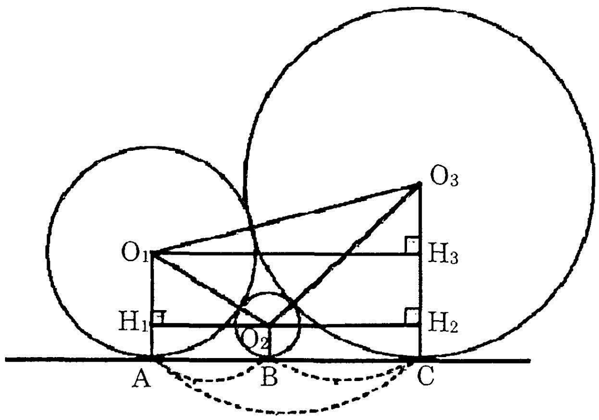
術曰く，中円径を小円径で割り，その平方根をとる。その平方根から１を引きその結果を２乗する。その値で，中円径を割ると大円の径が求められる。その結果は大円の直径に合っている。

なお，算額の絵は大球，中球，小球の接触関係を表している。３球の中心が同一平面上にある場合である。

４．１．２　算額１の現代的解法例

中円O_1の直径をa，小円O_2の直径をb，大円O_3の直径をxとする。

[3] 円とあるが，図は球である。和算では径は直径を表す。



共通接線と中円，小円，大円との接点をそれぞれ，A，B，Cとすると

$$AB+BC=AC$$

であるから，三平方の定理より

$$AB=O_2H_1=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}$$

$$BC=O_2H_2=\sqrt{(x+b)^2-(x-b)^2}$$

$$AC=O_1H_3=\sqrt{(x+a)^2-(x-a)^2}$$

よって，$\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}+\sqrt{(x+b)^2-(x-b)^2}$

$$=\sqrt{(x+a)^2-(x-a)^2}$$

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bx}=2\sqrt{ax}$$

よって，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{x}=\sqrt{ab}$

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$x=\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2 \qquad (5.1)$$

すなわち，

$a=9$（寸），$b=4$（寸）であるから，

$$x=\left(\frac{\sqrt{9\times 4}}{\sqrt{9}-\sqrt{4}}\right)^2=\left(\frac{6}{3-2}\right)^2=36 \text{（寸）}$$ ■

なお，(5.1)式は

$$x=\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)^2}$$

となり，術文と一致している。

4．1．3　算額1の和算的な解法例

和算には公式のようなもの（助術）があり，そうした公式を用いて解くことがある。この問題の場合の公式は，次のように求めることができる。

助術による解法

【解】大円，中円，小円の半径をr_1，r_2，r_3とすると

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

が成り立つ。

よって，
$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{\sqrt{r_2}-\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}$$

$$\sqrt{r_1}=\frac{\sqrt{r_2r_3}}{\sqrt{r_2}-\sqrt{r_3}}=\frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{\frac{r_3}{r_2}}-1}$$

$$r_1=\frac{r_2}{\left(\sqrt{\frac{r_3}{r_2}}-1\right)^2}$$ ■

【証明】

上記のことより，大円，中円，小円の半径をr_1，r_2，r_3とすると，

$$2\sqrt{r_2r_3}+2\sqrt{r_3r_1}=2\sqrt{r_1r_2}$$

が成り立つ。両辺を$2\sqrt{r_1r_2r_3}$で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}$$ ■

4．1．4　算額の見方

一般に，算額の問題には図（絵）が描かれており，図自体が問題になっている。この算額のように，

(1) 問題文　(2) 図　(3) 答曰く

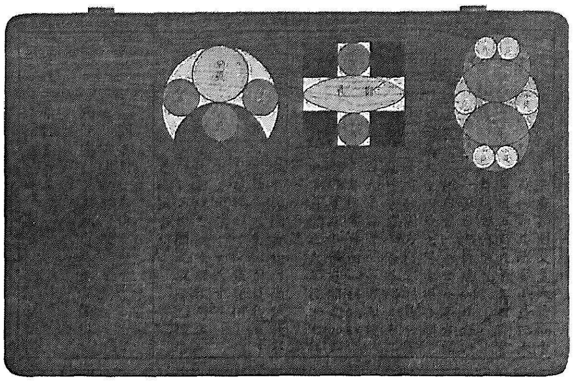
(4) 術曰く（術文）　(5) 奉納年月，氏名

が記されている。(4) 術文には，どのようにして答えを求めたのかが記されている。累円術のような和算特有の術（公式）が用いられていたり，簡単な途中の式や結果が記されていたりする。

『算法助術』（山本賀前著，天保12年（1841年））という公式集も刊行されていた。

4．2　山本庸三郎貴隆の算額（算額２）

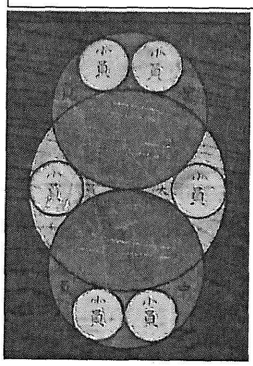
次の算額は安政6年（1859年）に四国の伊予西条藩[4]の山本庸三郎貴隆によって奉納された算額である。西条藩の上屋敷が金王八幡宮の近くにあったため奉納されたと考えられる。なお，この算額には写真でもわかるように３題の問題がある。

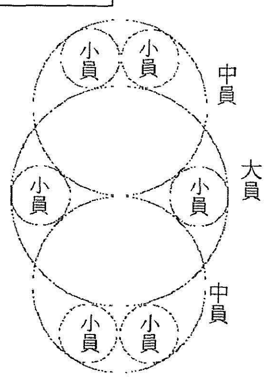


算額２　安政６年（1859 年）

4．2．1　算額題意（第一問）

（第一問）
今有如図交畫大員一个
中員二个而其罅容小員六个
大員径五百九十三寸
問中員径幾何
答曰中員径四百六十三寸有奇
術曰置一十七个平方開
之内減一个餘乗大径四除之
得中径合問





[4] 西条藩の上屋敷が，現在の青山学院にあった。その縁もあり玉川通り（国道 246 号線）を渡ったところの金王八幡宮に奉納したと思われる。西条藩は，紀州藩の支藩である。

図のように，交差した大円１個と中円２個があり，その隙間に納まるように小円６個を内接させる。大円の直径が593寸であるとき，中円の直径を求めよ。

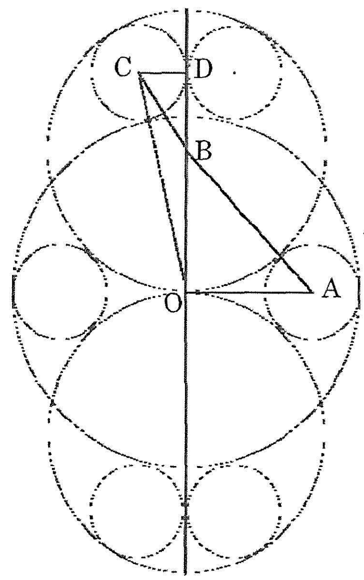
答，中円の直径は463寸と有奇（余りあり）。

術，17を開平し，1を引く。その値に大円の直径を掛けて4で割れば，中円の直径を得る。

すなわち，

$$\text{数式：}\frac{593\left(\sqrt{17}-1\right)}{4}=463.000409$$

(1) 算額２（第一問）の解法例



図のように，大円O(R)，小円A(r)，小円C(r)，中円B(x)とする。また，上の２つの小円の接点をDとして，BD＝yとする。

△OABについて

$$(R-r)^2+x^2=(x+r)^2 \qquad ①$$

△OCDについて

$$r^2+(x+y)^2=(R+r)^2 \qquad ②$$

△BCDについて

$$y^2+r^2=(x-r)^2 \qquad ③$$

③より，yを消去するために，

$$y=\sqrt{x^2-2rx}$$

として，②式に代入する。

また，①より，$2r$を消去するために，

$$2r = \frac{R^2}{x+R}$$

として，②に代入する。その結果を整理すると，

$$x^3 + 2Rx^2 - R^2x - R^3 = 0$$

を得る。

３次方程式は代数的に解くことは可能である[5]が，この場合，Rの値がとても大きな数であるから，計算機を用いた。結果は，

x=237.774，-164.5，-666.2

となった。

以上より，x=237.774

求める中円の直径は，約475.5（寸）

しかし，この値は算額の答えと一致しない。 ■

（注）和算では３次方程式をホーナー法のように計算によって求めていた。計算の手段がそろばんや算木しかなかった江戸時代には，計算回数が少なくなるように工夫していた。

一般に，３次方程式$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$では，

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x\{x(x+a)+b\}+c$$

だから，演算回数に着目すると

左辺は　$x \times x \times x + a \times x \times x + b \times x + c = 0$

×が５回，＋が３回の合計８回の演算が必要である。

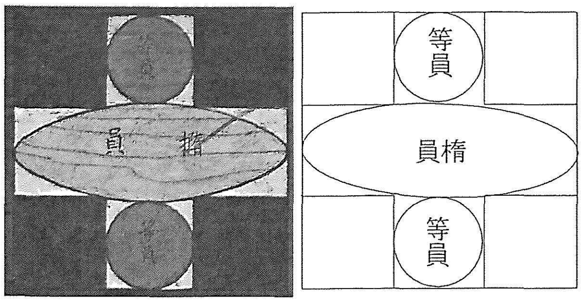
右辺は　$x \times \{x \times (x+a) + b\} + c = 0$

×が２回，＋が３回の合計５回の演算が必要となる。

この問題でも，このように計算を工夫し，そうした計算過程で誤差が出現したものと思われる。

４．２．２　算額題意（第二問）

（第二問）
今有如図方員内容楕員一個
員二個等方四個得七千三
百九十二寸問等方面幾何
答曰等力面七千六百〇七寸有奇
術曰置五個平方開之加二個
平方開之乗等径半之得
平方面合問



図のように，正方形の中に等しい４つの正方形がある。また，その間に等しい円が２つある。楕円が４つの正方形の頂点を通り，２つの等円と接している。

等円の直径が7392寸であるとき，４つの正方形の一辺の長さを求めよ。

答曰く，7607寸と有奇（余りあり）。

術曰く，5を開平し，2を加える。得た数を開平し，直径の半分を掛ければよい。

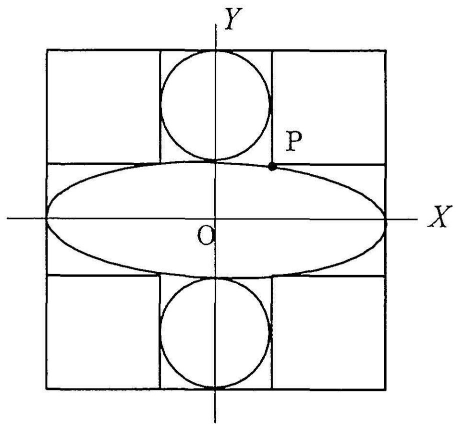
なお，術文を数式で表すと次の通りである。

$$数式：\sqrt{\sqrt{5}+2} \times \frac{7392}{2} = 7607.000117$$

(1) 算額２（第二問）の現代的解法例

等円の半径をr，外側の正方形の一辺の長さを$2a$とする。また，図のように，外側の正方形の辺の中点を通るようにX軸，Y軸を設定する。求める小正方形の一辺をxとする。長さの関係から，

$$2x + 2r = 2a$$



第１象限の小正方形が図のように，楕円に接しているとき，頂点Pの座標は$\mathrm{P}(r,\ a-x)$であるから，

楕円の方程式は，

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(a-2r)^2} = 1$$

となる。

楕円の方程式に，$a = x + r$よりaを消去し，xとrの式にすると

[5] ４次以下の方程式は必ず代数的に解ける。

$$\frac{r^2}{(x+r)^2}+\frac{r^2}{(x-r)^2}=1$$

$$x^4-4r^2x^2-r^4=0$$

$$x^2=(\sqrt{5}+2)r^2$$

よって　$x=\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)r$

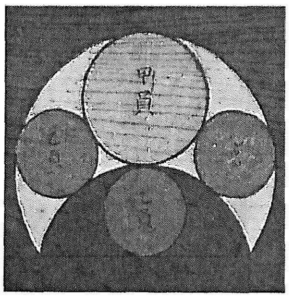
$$=\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)\frac{2r}{2}$$

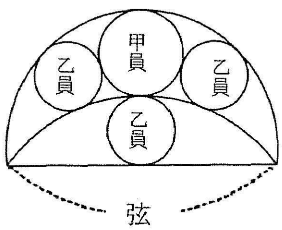
となり，答えと合う。

答えは，術文と一致している。■

4．2．3　算額題意（第三問）

(第三問)
今有如図員鈌内隔弧背容
甲員一個乙員三個甲員径五寸
乙員径四寸問弦幾何
答曰弦一十六寸
術曰以乙径除甲径内減一個
餘平方開之以除乙径倍之得弦合問
關流宗統六傳
御粥安本門人
西條藩　山本庸三郎貴隆撰
安政六年己未四月





図のように，円のうちに円弧を入れ，甲円1個，乙円3個を入れる。甲円の直径を5寸，乙円の直径を4寸とするとき弦の長さを求めよ。

答曰く，弦の長さは16寸。

術曰く，弦$=\dfrac{2乙}{\sqrt{\dfrac{甲}{乙}-1}}$

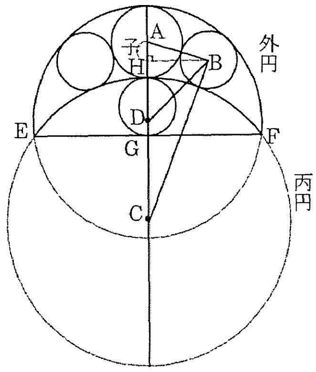
(1) 算額2（第三問）の解法例

甲円の中心をA，右の乙円の中心をBとする。

また，図のように，丙円の中心をC，外円の中心をDとし，Bから外円の直径に下ろした垂線の足をH，中央の乙円と弦の接点をGとし，求める弦の端点をE，Fとする。

甲円，乙円，丙円，外円の直径を，それぞれ甲，乙，丙，外と表す。

また，AHの長さを子で表す。



径矢弦の術より

$弦^2=4乙(丙-乙)$　①

点Gの外円と丙円の方冪は等しいから

$(甲+乙)(外-甲-乙)=乙(丙-乙)$　②

すなわち，

$(甲+乙)外-(甲^2+2甲乙+乙丙)=0$　③

△ABDに双股弦の術を適用して

$(外-乙)^2=(甲+乙)^2+(外-甲)^2-4(外-乙)子$

$甲^2+甲乙-外甲+外乙-2(外-甲)子=0$　④

△ABCに双股弦の術を適用して

$(丙+乙)^2=(甲+乙)^2+(丙+甲)^2-4(丙+甲)子$

$甲^2+甲乙+丙甲-丙乙-2(丙+甲)子=0$　⑤

④，⑤より維乗して子を消去すると

$(甲^2+甲乙-外甲+外乙)(丙+甲)$

$=(甲^2+甲乙+丙甲-丙乙)(外-甲)$

整理すると

$(甲^2+丙甲-丙乙)外-(甲^3+乙甲^2+丙甲^2)=0$　⑥

③，⑥より維乗して外を消去すると

$(甲+乙)(甲^3+乙甲^2+丙甲^2)$

$=(甲^2+2甲乙+乙丙)(甲^2+丙甲-丙乙)$

$(甲-乙)丙^2+(甲^2-2甲乙)丙+甲^2乙=0$

因数分解して

$\{(甲-乙)丙-甲乙\}(丙+甲)=0$　⑦

よって`　$丙=\dfrac{甲乙}{甲-乙}$

これを①に代入して

$$弦^2=4乙\left(\frac{甲乙}{甲-乙}-乙\right)=\frac{4乙^3}{甲-乙}$$

よって

$$弦=\frac{2乙}{\sqrt{\frac{甲}{乙}-1}}$$

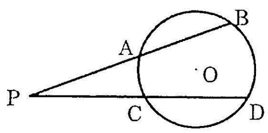
甲＝５寸，乙＝４寸であるから

$$弦=\frac{2\times4}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}=16\ (寸)$$ ■

（注１）**方冪（ほうべき）**

(1)　定点Pと定円Oがあるとき，

Pを通り，円Oと２点A，Bで交わる任意の直線を引く。そのとき，PA×PBを**方冪**という。

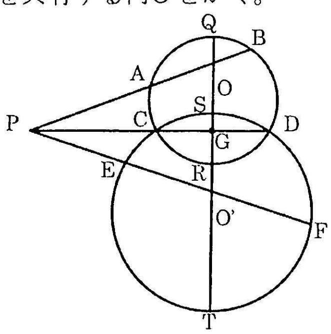


方冪は一定である。すなわち，上の図で

PA×PB＝PC×PD

(2)　さらに，図のように，

２点C，Dを共有する円O'をかく。



PA×PB＝PC×PD＝PE×PF　　　（*）

である。また，図のように，円Oと円O'の中心を通る直線QTを引き，円Oと円O'との交点をR，Sとする。また，PDとQTとの交点をGとすると，

（*）より，点Gに関して，方冪が等しいから

QG×GR＝SG×GT

が成り立つ。

よって，②式が導かれる。すなわち，

(甲＋乙)(外−甲−乙)＝乙(丙−乙)　　　②

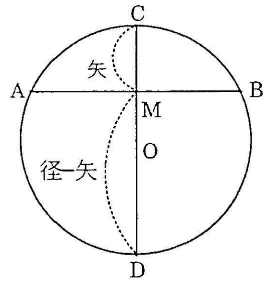
（注２）**径矢弦の術**

図のように，円Oの周上の２点をA，Bとし，弦ABの垂直二等分線を引き，円との交点をC，D，弦との交点をMとするとき，CMを矢という。

円Oについて直径と弦と矢の間に成り立つ関係式

$$弦^2=4矢(径-矢)$$

を**径矢弦の術**という。



【証明】　△BCM∽△DBMより

CM : BM＝BM : DM

よって，　BM²＝CM×DM

$$\frac{弦^2}{4}=矢\times(径-矢)$$

すなわち，　弦²＝4矢×(径−矢)　■

（注３）**双股弦の術**

この術は，数学Ⅰで学ぶ，余弦定理のことである。例えば，△ABDに余弦定理を適用すると

$$(外-乙)^2=(甲+乙)^2+(外-甲)^2-2(甲+乙)(外-甲)\cos\angle ADB \quad (**)$$

である。すなわち

$$\cos\angle BAD=\frac{AH}{BA}=\frac{子}{\frac{1}{2}(甲+乙)}=\frac{2子}{甲+乙}$$

よって，上の(**)式より

$$(外-乙)^2=(甲+乙)^2+(外-甲)^2-4(外-乙)子$$

が成り立つ。

このように，和算では，cosを用いない式を作り，公式として活用していた。

これを**双股弦の術**という。

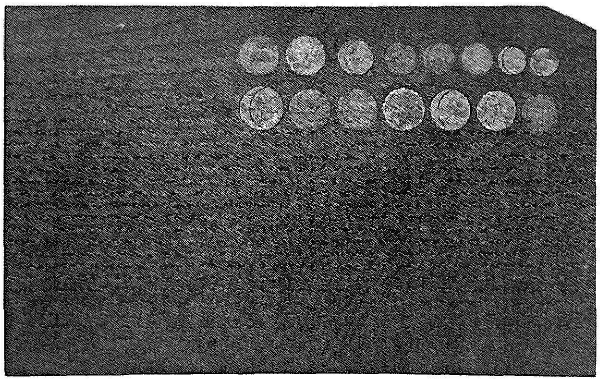
（注４）**維乗**

斜めにかけることの意味である。

知ってしまえば，何てことはない式であるが，④，⑤式から子を消去するような変形をするときに，とても重宝する考え方である。和算家たちはこういった重宝する知恵を他にもたくさん持っていた。

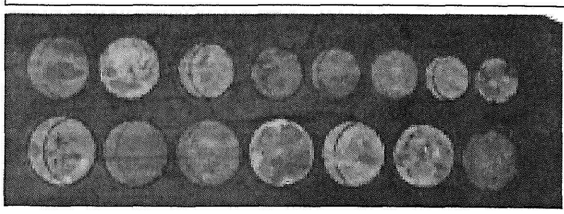
4．3　海老澤摠右衛門正泰の算額（算額３）

次の算額は，嘉永3年（1850年）に海老澤摠右衛門正泰によって奉納されたもので，關流の水埜興七郎正衛門人とある。これは数列の問題の算額で，中国の天文学や占星術で利用されていた二十八宿（にじゅうはっしゅく）の名称を東から順に数列$\{a_n\}$に当てはめて問題が作られている。二十八宿とは，黄道を東北西南の４つの方角に分け，東を角，亢，氐，房，心，尾，箕，北を斗，牛，女，虚，危，室，壁，西を奎，婁，胃，昴，畢，觜，参，南を井，鬼，柳，星，張，翼，軫の東北西南をそれぞれ７つの宿にあてがったものである。$\{a_n\}$のような便利な記号がなかったので，こういった方法をとったのである。



算額３　嘉永3年（1850年）

今有如圖宿名一十五球只云角亢二球
周寸相併一十六寸又云心尾箕三球周
寸相併三十寸重云虚危室壁奎五球周
寸相併六十三寸問角球周寸幾何
答七寸七分六厘三毛三糸二忽一微有奇
術曰依方程招差術得初數六十九個
中數五千三百九十五箇
定数七万九千七百六十個
列初數以減中數加定數以一万九百六十個
除之得角球周寸合問
關流　水埜興七郎正衛門人
中渋谷村
嘉永三年　戌　五月吉日
海老澤摠右衛門正泰



4．3．1　算額題意

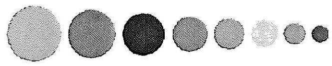
図に示しているように，二十八宿の名前から取った15宿の名を付けた球がある。

角と亢の２球の周の和が16寸，心と尾と箕の３球の周の和が30寸である。さらに，虚と危と室と壁と奎の５球の周の和が63寸である。角の球の周を求めよ。

答は7寸7分6厘3毛3糸2忽1と微有奇である。

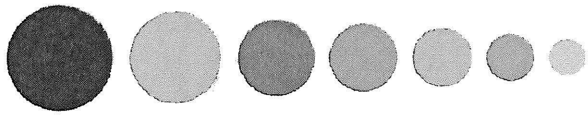
4．3．2　算額問題の解法

この問題は次の図のように並んでいる15個の球について，順番に２個，３個，５個ずつの周の和が与えられているとき，最初の角球の周の長さを求める問題である。



斗，　箕，　尾，　心　，房，　氐，亢，角

a_8　a_7　a_6　a_5　a_4　a_3　a_2　a_1



奎　壁　室　危　虚　女　牛

a_{15}　a_{14}　a_{13}　a_{12}　a_{11}　a_{10}　a_9

問題文の数列をa_nとすると，条件より次が成立する。

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 16 \\ a_5 + a_6 + a_7 = 30 \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 63 \end{cases}$$

これを満たす数列の構造として次の一般項を想定する。

$$a_n = an^2 + bn + c \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots) \qquad (5.3)$$

$$\begin{cases} 5a + 3b + 2c = 16 \\ 110a + 18b + 3c = 30 \\ 855a + 65b + 5c = 63 \end{cases}$$

を解いて，$a = -\dfrac{69}{10960}$，$b = \dfrac{1079}{2192}$，$c = \dfrac{997}{137}$となる。

よって，求める角の球の周a_1は

$$a_1 = -\frac{69}{10960} + \frac{1079}{2192} + \frac{997}{137} = 7.763321\cdots$$

となり，算額の答えと合っている。　■

□(注) 術文をみると，

初数69，中数5395，定数79760 として

列初数以減中数加定数

だから，　中数-初数＋定数

これを　　以一万九百六十個除之

であるから　（中数-初数＋定数）／10960
すなわち,

$$\frac{5395-69+79760}{10960}=\frac{-69}{10960}+\frac{5395}{10960}+\frac{79760}{10960}$$

$$=-\frac{69}{10960}+\frac{1079}{2192}+\frac{997}{137}$$

$=7.763321\cdots$

となり,　　　得角球周寸合問

で角球の周の長さが求められる。

（注）**招差術**

招差術とは整関数の係数を決定する術のことである。

5　おわりに

金王八幡宮の算額の内容は，中等教育で扱う数学の内容として適している。算額は保存状態もよく，字も判読できるので，生徒たちも何をしようとするのか理解し易い。宮司の方は生徒の見学にご理解いただき，本校のテーマ学習でも，いくつかの期でこちらの算額をフィールドワークとして見学させていただいた。

私はかねがね和算の内容が，中等教育における新しい数学教育の突破口になるのではないかと考え，算額の幾何教材への利用，算額づくり等々，和算に関する実証的な研究を行い，その成果を本校のSSH研究，日本数学教育学会，全国和算研究大会や本校の論集などで公開してきた。幸いにも今年度は，科学研究費を受給することができ,『豊かな創造性を育む数学教材の開発と実証的な研究』の一部として，金王八幡宮の算額を教材化するために小論をまとめた。その際，第五回全国和算研究（長崎）大会で中間発表を行い，多くの意見や知見をいただいた。

実際に生徒とともにフィールドワークで本物の算額を見学すると，和算のすばらしさの感想とともに，江戸時代にこういった数学が研究されていたことに興味関心を抱く。さらに，生徒に算額をつくる体験，すなわち問題づくりを体験させることによって普段の授業の内容も一段と深まっていくように感じた。

最後に，小論を本校論集に掲載するにあたっては，和算研究家の小寺裕先生（前東大寺学園数学科教諭）に算額の解法についてご教示いただき大変お世話になった。小寺先生には，52期生が関西地域研究で奈良県の算額についてフィールドワークする際にも大変お世話になった。お礼申し上げる。

また,『塵劫記』の和文翻刻について，本校国語科の福田孝先生にご教示いただいた。また，英文タイトルについて，本校英語科の八宮孝夫先生には毎度のことであるが添削していただいた。この場をお借りして両先生にお礼申し上げる。

なお，本小論の内容を，今年度の筑駒アカデメイアにおいて,『渋谷にある江戸時代の数学を見てみよう-日本独自の風習である算額を中・高の数学で紐解く-』として社会人対象に実施する予定である。和算，算額文化を現代の社会人はどのように感じてくれるのか。これについては，別の機会に報告したいと思う。

【参考文献】

1．牧下英世著（2001年）『数学史を取り入れた授業実践-算額の教材化と総合的な学習-』(筑波大学附属駒場論集第40集)，p.145-171
2．牧下英世著（2003年）『数学教育を通して取り組んだ総合的な学習とその実証的な研究-算額を用いた課題学習とそのフィールドワークの実践から-』（筑波大学附属駒場論集第40集)，p.193-221
3．牧下英世共著(2002年）『算額道場』研成社
4．今村知尚著(1639年)『竪亥録』(東北大学附属図書館所蔵)
5．吉田光由著(1641年)『新編塵劫記』(東北大学附属図書館所蔵)
6．村松茂清(1663年)『算俎』(東北大学附属図書館所蔵)
7．大矢真一著(1987年)『和算入門』(日本評論社)
8．深川英俊著(1998年)『日本の数学と算額』(森北出版)
9．遠藤寛子著(2006年)『算法少女』(ちくま学芸文庫)
10．小寺裕著（2009年)『和算書「算法少女」を読む』（ちくま学芸文庫)

【関連事項】

(1)　金王八幡宮の所在地：東京都渋谷区渋谷3-5-12
(2)　使用した算額の文字は，コンピュータにあるフォントで対応した。また，文面は適宜改行して表示した。

本研究は，日本学術振興会による科学研究費補助金受給研究である「豊かな創造性を育む数学教材の開発と実証的な研究」牧下英世（研究課題番号：21913011）の一部である。