様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月２２日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2005～2008
課題番号：１７５０００８５
研究課題名（和文）　逆形不偏ゲームの分類と戦略の研究

研究課題名（英文）　A Study on Classification and Strategy of Misere Impartial Games

研究代表者
坂井 公（SAKAI KO）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：20241797

研究成果の概要：
当初,種数によるゲーム局面の分類を試みていたが,逆形商を用いた新しい分類法に遭遇し,その調査を行なった。新しい分類法は，実際に生じうるゲーム局面に局所化して，逆形商と呼ぶ２ 分モノイドの構造を調べるものであるが，それが既知のものを含めた多くのゲームの解析に有効であることを確認した。逆形商には，生成元と等号関係による表現より，核を中心にした表現の法が簡潔になり，代数構造全体の把握も容易になることに気づき，典型的な逆形商の多くに対して表現を具体的に与えた。しかし，不偏ゲームには逆形商をもってしても，構造の把握が難しいものが多数あり，簡潔に構造が記述できるものは，まだ限られている。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００５年度	900,000	0	900,000
２００６年度	600,000	0	600,000
２００７年度	700,000	210,000	910,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	2,900,000	420,000	3,320,000

研究分野：計算機数学
科研費の分科・細目：情報学・知能情報学
キーワード：不偏ゲーム，逆形，種数，可換モノイド，逆形商

１．研究開始当初の背景

（１）　将棋，囲碁，チェス，チェッカーなどの完全情報ゲームの戦略研究には,多くのものがあるが，ゲームの構造上の複雑さもあり，あまり数学的な分析を受けつけないため，min-max 原理によって何手か先の局面の評価するという実験的なものが多い。

（２）　2 人でプレーする完全情報ゲームで，どの局面でも 2 人のプレーヤーに可能な着手がまったく同一であるようなゲームを不偏ゲームと呼ぶ。ニムなどの石取りゲームなどがその典型的なものである。一方のプレーヤーが着手不能になったときに終局とされ，勝者がどちらか定義されているゲームは多く，そうでないゲームも，ほとんどはその形にルールを定め直すことができる。このとき着手不能となったプレーヤーを負けとす

るのが自然であり，この形によるプレーを順形と呼ぶ。反対に着手不能となったプレーヤーを勝ちとするルールも可能であり，その形のルールによるプレーを逆形と呼ぶ。

（３） 単独のゲームを考えているときは，着手ルール次第で順形のプレーを逆形に変えることができ，その逆も可能だから，この順逆の区別は意味がないが，直和ゲームを考えるときに大きな差が生ずる。直和ゲームとは，ゲームを複数並べておき，プレーヤーは自分の手番で，そのうちの任意の一つを選んで着手するようにルールを定めたゲームである。要素ゲームのすべてが着手不能になったとき，直和ゲームは着手不能になり，終局を迎える。石取ゲームの多くをはじめとして，よく知られたゲームは，より簡単なゲームの直和になっていることが多く，また，単純なゲームでも，それらの直和を作ることで興味深いゲームに変わることがある。

（４） 不偏ゲームは，どの局面も，先手に必勝戦略があるか，後手に必勝戦略があるか，どちらかだが，そのどちらになるかは各局面の Grundy 数を調べることで分かる。順形で，しかもより簡単なゲームの直和になっている不偏ゲームについては，そのゲームの Grundy 数が要素ゲームの Grundy 数の排他的論理和になることが早くから知られ，要素ゲームについて具体的に Grunndy 数を求める研究も多く進んでいる。

（５） 一方，逆形ルールでは，直和ゲームの Grundy 数が要素ゲームの Grundy 数から簡単に計算できるということがない。しかしながら，Berlekamp，Conway，Guy，山崎らの研究により，あるグループに属するゲームは，順形の Grundy 数と逆形の Grundy 数に密接な関係があり，それらのゲームでは，各局面でどちらのプレーヤが必勝であるか容易に分かることが知られていた。

２．研究の目的

（１） 基本的には，逆形の不偏ゲームについて，各局面で先手と後手のどちらが必勝であるかを判定できる場合を増やすことが目標である。

（２） また，どちらが必勝か分かった場合に，具体的な必勝手順を求めることも重要な目的である。

（３） また，できるだけ多くの具体的なゲーム局面について，その逆形商の構造を調べる。特に後手必勝局面の代数的特徴づけを行なう。

３．研究の方法

（１） まず，既知の分類に沿って，比較的容易に解析できると知られている局面を詳しく調べ，それらを容易にしている素因を洗い出し，分類を細かくしたり，新たな観点からの分類を導入を試みた。特に研究当初は Conway, berlekamp, Guy らによって定義された「種数」を利用することを中心に研究した。

（２） 研究の途中で不偏ゲームの逆形の分析においては，近年，Plambeck や Siegel らによる新しい分類理論に基づく進展があることが明らかになった。この理論によれば，逆形 Grundy 値や種数によるよりも，平明な見通しのより分類が可能であり，それに伴い戦略研究も見通しのよいものになるので，軌道修正を行い，逆形商という特殊なモノイドとその上の準同型写像によって，逆形ゲームの分類と戦略研究を行なうことを試みた。

（３） 研究全体は，数学的考察を基本としたものであるが，ある程度の予想を立てるために計算機実験を必要とする。また研究成果の有効性を確認するために，あるいは研究指針へのフィードバックへのためにも計算機の利用を図った。

４．研究成果

（１） ゲーム局面には，(Grundy 値を拡張して）種数を定義される。種数を求めることができれば，より多くの戦略情報を得ることができ，実際，ある種のゲーム局面族は，比較的容易に種数を求めることができる。特に「従順な」ゲームは限られた形の種数しか持たない。中でも「遺伝的に従順な」ゲームは，「平坦な」ゲームと全く同じであることが分かった。

（２） より複雑な戦略を持つゲームとしては，Conway, Berlekamp らの分類による「半従順」，「馴化可能」，「restive 」,「restless」などがあるが，これらの特徴を調べている過程で，この分野においては，Plambeck や Siegel らによる新しい分類理論があることが明らかになった。この新しい分類理論にのっとり逆形商という特殊なモノイドとその上の準同型写像によって，逆形ゲームの分類と戦略研究を行なうと，Grundy 値の分析に比べずっと平明で，数学的

にも美しくて扱いやすいものになることがわかった。調査によれば，新分類理論は，不偏ゲームのあらゆる局面を含む族を扱うのではなく，考えているゲームに実際に生じうる局面のみに「局所化」したゲームの族を扱うことで，逆形ルールの下での不偏ゲームの直和が著しく簡単になるというのが基本的アイディアである。全局面の族ではなく，直和について閉じたある部分族に制限することで，その族が比較的簡単な構造を持つ可換モノイドを構成することがしばしばある。さらに，ある場合には可換モノイドは有限になり，その場合は位数があまり大きくなければ実際に必勝法を計算することも可能である。可換モノイドの位数が無限の場合でも，次第に拡大していく有限可換モノイドの極限となることもあり，この場合もあまり複雑な局面でなければ必勝法を計算することができる。

（3） 可換モノイドの要素は，大きく 2 つに分類され，一方は後手必勝局面，他方は先手必勝局面からなるが，比較的簡単なゲームはこの後手必勝局面を表す可換モノイドの要素があまり多くない。特に Conway が tame と呼び，山崎が flat と呼んだ族 Tn では，後手必勝の要素が 2 つしかないという特徴を持つ。この後手必勝要素が 2 つだけという族には，tame 以外にも restive と呼ばれる族 T^n(R8)があるが，それ以外の族は後手必勝要素を 3 つ以上持つことが分かった。

（4） 以上のようなことが逆形商の研究から Plambek らによって明らかにされ，このように後手必勝要素の数や構造は，ゲームの分類や必勝戦略と密接な関係があるので，具体的ないくつかのゲームの族にさらにいくつか調べた。しかしながら，例えば restive と分類されるゲーム局面の族はその逆形商の中に後手必勝の要素が 2 つしかないことで特徴付けられ必勝戦略も簡潔に記述されるが，より複雑なゲームに対しては，逆形商を用いてもこのような簡潔な特徴づけはまだ見出されていない。従って逆形ゲームを分類し，その必勝法を見出すという問題そのものについては，先の Tn や T^n(R8)の系列と S12 や S’12 と呼ぶ逆形商を持つゲーム族以外については，必勝法の提示は可能ではあるものの，かなり複雑な計算規則や表を用いるものとならざるを得ない。

（5） 逆形商そのものを表現するのに，Siegel らはモノイドの生成元と等号関係を用いた表現を用いている。この方法は，定義等式が多くない場合には，モノイド積の簡潔な計算方法を与えるが，等式が多い場合，どの計算規則を使えるか，計算が終了したかどうかを判定するのに手間がかかる。さらに具合が悪いことには，逆形商の代数構造がどうなっているのか見通しが極めて悪い。モノイドの代数構造を把握したり，モノイド積の計算結果を高速に得るには演算表のほうが都合がいいのだが，それには，モノイドの要素数が多くなると，表自体のサイズが巨大になるという問題がある。特に無限モノイドの場合は，素朴なやり方では表の作成自体が，不可能になる。

（6） 上の問題を軽減するには，モノイドを核とそれ以外の要素に分けて表現するのがよいということに気がついた。核とは，モノイドに含まれる最大の群として特徴付けられるが，全ての要素がその中に逆元を持つので，元のモノイドに比べ，生成元の数も定義等式の数も著しく少なくなることが期待される。そこで核の構造をまず与え，それ以外の要素とのモノイド積を例外として別に記述することを試みた。

（7） 実際 Tn の核は C2^n と書ける。ここで C2 は位数 2 の巡回群である。従って,Tn の核の要素は 0 1 の n 個の列として表現でき，そのモノイド積は単なる排他的論理和として表現される。また，Tn の核外の要素は 2 つしかなく，それら同士の積，それらと核要素の間の積の値を与えればする。具体的には核外の要素の一つを b と書けば，モノイド積は a・a＝ ε ,a・x＝(…0001)・x という 2 つの定義等式（のスキーマ）で完全に記述される。ここで ε はモノイドの単位元であり，それがもう一つの核外要素である。また x は核内の任意の要素を表す。この表現により，a が核内の元(…0001)の性格を強く持った要素であり， ε が核の単位元(…0000)と似た性格の要素であることが容易に見て取れる。

（8） 同様に T^n(R8) の核は C2^(n+2) と書ける。また核外の要素は 4 つだけであり，その 2 つを a と b とすると，a・a＝ ε，a・a＝(…0000), a・x = (…0001)・x, c・x = x という 4 つの定義等式でモノイド全体の構造の記述が可能である。また，これからは，a と ab は(…0001)に，b と ε は核の単位元(…0000)に似た性格を持つことが分かる。

（9） S12 についても同様で，S12 は核として C2^2 を持ち，核外の要素は 8 つある。核外の 2 つの要素を a, c とすると，a・a =c・c= ε であり，ε と a と c と a・c だけで C2^2 と同型の群をなす。さらに a・x == (01)・x, c・x = (10)・x だから a は(01)に, c は(10)に性格の似た要素である。核外にはもう 4 つ要素があるがその 1 つを d とすると，d・d = (00)であり，d・x = (00)・x なので，d は核の単位元(00)と似た性格を持つことが分かる。また以上の等式により S12 の構造は完全に記述されている。また S’12 の場合，核は C2^3 と同型になり, 核外の要素は 4 つである。その 2 つを a, c とすると, a・a = c・c = ε なので，核外の要素だけで C2^2 と同型のモノイドを生成する。さらに，a・x = (001)・x, c・x = (010)となり，a, c がそれぞれ(001), (010)と似た性格を持つことが分かる。さらにもっと複雑な逆形商のいくつかについても，核とその以外の要素に分けて表現する方法が有効であることが確認した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 0 件）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
坂井 公（SAKAI KO）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：20241797
(2)研究分担者
増田 哲也（MASUDA TETSUYA）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：70202314
照井 章（TERUI AKIRA）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
研究者番号：80323260