(20)「統計数理の基礎理論について」に関する研究報告

欠測値データをもつ1標本および2標本問題における平均に関する同等性検定と同時信頼区間について

東京理科大・院・理　小泉 和之
東京理科大・院・理　國本 征史
東京理科大・理　瀬尾　隆

分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2[(1-\rho)I + \rho\mathbf{1}\mathbf{1}']$である一様構造をもつ欠測値データに対する平均成分に関する同等性検定と同時信頼区間について考える．データ行列$\{x_{ij}\}, i = 1, \cdots, p_j, j = 1, \cdots, n$とし，$p_j(\leq p)$を第$j$列の観測データ数と定義する．次に，$\boldsymbol{x}_{p_j} = (x_{1j}, *, x_{3j}, \cdots, x_{pj})$が完全データになるようにSrivastava and Carter(1986)で用いられている変換行列$\boldsymbol{B}_j$を用い，さらにSeo, Kikuchi and Koizumi(2005)で用いているような変換行列を利用し，$\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{C}_j\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{x}_j$という変換を施すと，$\boldsymbol{z}_j \sim N_{p_j}(\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{\mu}_j, \gamma^2\boldsymbol{I}_{p_j})$を得る．ここに$\gamma^2 \equiv \sigma^2(1-\rho)$である．

次に，変換前のデータにおける欠測データ部分が同じ列が隣り合うように変換後のデータを並び替え，それぞれに欠測部分を含まないように分割する．またそのグループ数をsとする．第cグループ$(c = 1, \cdots, s)$を$p^{(c)} \times n^{(c)}$の完全データ行列とすると，検定統計量は，

$$F_0 = \frac{\sum_{i=1}^{p} n^{(i)}(\overline{x}_{i\cdot} - \overline{x}_{\cdot\cdot})^2/(p-1)}{\sum_{c=1}^{s} f^{(c)}\hat{\gamma}^{(c)^2}/f}$$

で与えられ，この検定統計量は帰無仮説H_0の下で，自由度$p-1, f$のF分布に従う．

帰無仮説が棄却された下で，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{a}'\mathbf{1} = 0, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^p - \{0\})$に対するScheffé型の同時信頼区間は有意水準$\alpha$で，

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm \sqrt{(p-1)F_{p-1,f,\alpha}\sum_{c=1}^{s}\frac{f^{(c)}\hat{\gamma}^{(c)^2}}{f}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{a}}$$

のように与えられる．ここで$\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_p)'$, $\boldsymbol{V} = \mathrm{diag}(n_1^{-1}, \cdots, n_p^{-1})$である．

同様に，Bonferroni型$100(1-\alpha)\%$同時信頼区間は，

$$\boldsymbol{a}_j'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{a}_j'\overline{\boldsymbol{x}} \pm t_{f,\frac{\alpha}{2l}}\sqrt{\sum_{c=1}^{s}\frac{f^{(c)}\hat{\gamma}^{(c)^2}}{f}\boldsymbol{a}_j'\boldsymbol{V}\boldsymbol{a}_j}, \quad j = 1, \cdots, l,$$

となり，さらに$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$に対するTukey型の近似同時信頼区間は有意水準$\alpha$で，

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm q_{p,f,\alpha}\sum_{i=1}^{p}\frac{|a_i|}{2}\sqrt{\sum_{c=1}^{s}\frac{f^{(c)}\hat{\gamma}^{(c)^2}}{f}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n_i|a_i|}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i|}\right)^{-1}}$$

となる．

次に分散共分散行列の構造を仮定しない欠測値データをもつ平均成分に対する検定 $\mathrm{H}_0{:}\boldsymbol{\mu}=0$ とその同時信頼区間について議論する．まず，$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N \sim i.i.d.\, N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ とし，ランダムに欠測しているとする．欠測の全パターン数を s とし，その時の各パターンの標本数をそれぞれ $n_c(c=1,\cdots,s)$ とする．これについて Srivastava and Carter(1986) で用いられている $\boldsymbol{B}_c$ を用いて $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{z}_{cj}=\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{x}_{cj}\quad j=1,\cdots,n_c$ と変換する.$\boldsymbol{z}_{cj}$ の対数尤度関数より最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\mu}},\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ と帰無仮説の下での最尤推定量 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ が求まる．これより尤度比検定統計量 λ は,

$$\lambda=\prod_{c=1}^{s}|\boldsymbol{B}_c\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{B}_c'|^{-\frac{1}{2}n_c}\Big/\prod_{c=1}^{s}|\boldsymbol{B}_c\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{B}_c'|^{-\frac{1}{2}n_c}$$

で与えられ，$-2\log\lambda$ は漸近的に χ_p^2 に従う．次に $\boldsymbol{\Sigma}$ が既知の時の $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\equiv\boldsymbol{C}$ とし，$\hat{\boldsymbol{C}}$ をその推定量とすると，漸近的に $T^2=\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{C}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}$ は χ_p^2 に従う．さらに $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu},\ \forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^p-\{0\}$ に対する同時信頼区間は

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}\in\boldsymbol{a}'\hat{\boldsymbol{\mu}}\pm\sqrt{\chi_{p,\alpha}^2\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{a}'}$$

で与えられる．ただし，$\chi_{p,\alpha}^2$ は自由度 p の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$点.

次に 2 標本問題における平均ベクトルの同等性検定 $\mathrm{H}_0:\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\nu}$ とその同時信頼区間について考える．$\Pi_1:\boldsymbol{x}_1^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}_M^{(1)}\sim i.i.d.\,N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, $\Pi_2:\boldsymbol{x}_1^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}_N^{(2)}\sim i.i.d.\,N_p(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\Sigma})$，欠測の全パターン数を s とし，各パターンの標本数をそれぞれ $m_c,n_c(\geq 0)$ とする $(c=1,\cdots,s)$．各ブロック c において 1 標本の時と同様の変換を施すことにより尤度比検定統計量 λ は

$$\lambda=\prod_{c=1}^{s}|\boldsymbol{B}_c\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{B}_c'|^{-\frac{1}{2}(m_c+n_c)}\Big/\prod_{c=1}^{s}|\boldsymbol{B}_c\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{B}_c'|^{-\frac{1}{2}(m_c+n_c)}$$

となり，$-2\log\lambda$ は漸近的に χ_p^2 に従う．次に $\boldsymbol{\Sigma}$ が既知の時，$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\nu}})\equiv\boldsymbol{E}$ とし，その推定量を $\hat{\boldsymbol{E}}$ とすれば，$T^2=(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\nu}})'\hat{\boldsymbol{E}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\nu}})$ は漸近的に χ_p^2 に従う．この時，$\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\nu}),\ \forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^p-\{0\}$ に対する同時信頼区間は,

$$\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\nu})\in\boldsymbol{a}'(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\nu}})\pm\sqrt{\chi_{p,\alpha}^2\boldsymbol{a}'\hat{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{a}}$$

で与えられる．

参考文献

[1]Seo, T., Kikuchi, J. and Koizumi, K.(2005), “On Simultaneous Confidence Intervals for all Contarasts in the Means of the Intraclass Correlation Model with Missing Data,” to appear in *J. Multivariate Analysis.*

[2]Srivastava, M. S. and Carter, E. M.(1986), “The Maximum Likelihood Method for Non Response in Sample Survey,” *Survey Methodology*, 12, 61-72.

多変量 Tukey-Kramer 型多重比較法とその保守性について

東京理科大・院・理　西山 貴弘
東京理科大・院・理　飯渕 芳美
東京理科大・理　瀬尾 隆

平均に関する多重比較法において，すべてのペアの差 (対比較) に関する同時信頼区間を構成する方法の一つに Tukey-Kramer 法がある．本報告では，Tukey-Kramer 法の多変量の拡張である多変量 Tukey-Kramer 法 (Seo, Mano and Fujikoshi(1994)) について紹介し，母集団数が 3 つの場合の保守性に関する不等式を与えた．さらに，対照比較の場合についても同様の結果を与え，最後に母集団数が 4 つ以上への拡張について述べた．

$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_k]$ を k 個の p 次元ベクトルの行列とする．また，$\widehat{\boldsymbol{M}} = [\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ を $\boldsymbol{M}$ の推定量とし，$\mathrm{vec}(\widehat{\boldsymbol{M}})$ は，$\mathrm{N}_{kp}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ に従うものとする．ただし，$\boldsymbol{V}$ は $k \times k$ の既知行列で，$\boldsymbol{\Sigma}$ は $p \times p$ の未知行列とする．さらに，$\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{\Sigma}$ の不偏推定行列とし，$\nu \boldsymbol{S}$ は $\widehat{\boldsymbol{M}}$ と独立で $\mathrm{W}_p(\boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ に従うものとする．そのとき，全ての対比較に対する多変量 Tukey-Kramer 法による同時信頼区間は，

$$\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j) \in \left[\ \boldsymbol{a}'(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_j) \pm t_{\mathrm{p}}\sqrt{d_{ij}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}\right], \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^p,\ 1 \le i < j \le k$$

として与えられる．ここで ${t_{\mathrm{p}}}^2$ は，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$(すなわち, $d_{ij} = d$) のときの次のような $T^2_{\max\cdot\mathrm{p}}$ 統計量の上側 $100\alpha\%$ 点である．

$$T^2_{\max\cdot\mathrm{p}} = \max_{i<j}\{(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)'(d_{ij}\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)\}$$

また，$d_{ij} = v_{ii} - 2v_{ij} + v_{jj}$ であり，$t_{\mathrm{p}}^2 = q^2/2$, $q^2 \equiv q^2_{p,k,\nu}(\alpha)$ は, パラメータ k, ν の p 変量ステューデント化範囲統計量の上側 $100\alpha\%$ 点である．このとき，多変量一般化 Tukey 予想 (Seo, Mano and Fujikoshi(1994) を参照) は次のように与えられる．

$$\Pr\Big\{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j) \in \Big[\boldsymbol{a}'(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) \pm t_{\mathrm{p}}\sqrt{d_{ij}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}\ \Big]$$
$$1 \le i < j \le k, \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^p - \{0\}\Big\} \ge 1 - \alpha$$

すなわち，すべての i, j $(1 \le i < j \le k)$ に対して，同時信頼区間が常に保守的になるということである．この予想については，$k = 3$ のときに成り立つことが理論的に Seo, Mano and Fujikoshi(1994) によって示され，その証明のアイデアを利用すると, 次の不等式が成り立つ．

$$1 - \alpha \le Q(t^*_{\mathrm{p}}, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) < Q(t^*_{\mathrm{p}}, \boldsymbol{V}_0, \mathcal{C}),$$

ここに，$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j, 1 \le i < j \le k\}$, $t^*_{\mathrm{p}} = t^2_{\mathrm{p}}/\nu$, $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j,\ 1 \le i < j \le k\}$, また，$\boldsymbol{V}_0$ は，すべて異なる i, j, l に対して $\sqrt{d_{ij}} = \sqrt{d_{il}} + \sqrt{d_{jl}}$ の一つを満たす行列で，$Q(t, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) = \Pr\{\ (\boldsymbol{X}\boldsymbol{c})'(\nu\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}) \le t(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{c})$ for any $\boldsymbol{c} \in$

$\mathcal{C}\}$ である (t は任意の固定された定数). さらに，任意の対角行列 $\boldsymbol{V}$ について, 次の不等式が成り立つ.

$$1-\alpha = Q(t_{\mathrm{p}}^*, \boldsymbol{I}, \mathcal{C}) \le Q(t_{\mathrm{p}}^*, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) < \Pr\{\tilde{T}_{\max}^2 < t_{\mathrm{p}}^2\}$$

ここに，$\boldsymbol{u}_i = \sqrt{n_i}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \boldsymbol{\mu}_i) \sim N_p(0, \boldsymbol{I}), \nu\boldsymbol{S} \sim W_p(\boldsymbol{I}, \nu)$, $\tilde{T}_{\max}^2 = \max_{i=1,\ldots,k-1}\{\boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}_i\}$ である. 同様に対照比較の場合，次の不等式が成り立つ.

$$1-\alpha = Q(t_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}_1, \mathcal{D}) \le Q(t_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}, \mathcal{D}) < Q(t_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}_2, \mathcal{D}),$$

ここに，$t_{\mathrm{c}} = t_{\mathrm{c}}(\alpha; p, k, \nu, \boldsymbol{V}_1)$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1$ のときの $T_{\max\cdot\mathrm{c}}^2$ の上側 $100\alpha\%$ 点であり,

$$T_{\max\cdot\mathrm{c}}^2 = \max_{1\le i\le k-1}\left\{(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k)'(d_{ik}\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k)\right\},$$

また，$t_{\mathrm{c}}^* = t_{\mathrm{c}}^2(\alpha; p, k, \nu, \boldsymbol{V}_1)/\nu$，$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_k, 1 \le i \le k-1\}$ であり，$\boldsymbol{V}_1$ は，$d_{12} = d_{13} + d_{23}$ を満足し，$\boldsymbol{V}_2$ は，$\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{13}} - \sqrt{d_{23}}$, または, $\sqrt{d_{12}} = \sqrt{d_{23}} - \sqrt{d_{13}}$ を満足する行列である．さらに，任意の対角行列 $\boldsymbol{V}$ について, 次の不等式が成り立つ.

$$1-\alpha = \Pr\{\tilde{T}_{\max}^2 < \tilde{t}_{\mathrm{c}}^2\} \le Q(\tilde{t}_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}, \mathcal{D}) < \Pr\{T_{\mathrm{k}}^2 < \tilde{t}_{\mathrm{c}}^2\},$$

ここで，$\tilde{t}_{\mathrm{c}}^* = \tilde{t}_{\mathrm{c}}^2/\nu$, $\tilde{t}_{\mathrm{c}}^2$ は $\tilde{T}_{\max}^2$ の上側 $100\alpha\%$ であり，T_{k}^2 統計量は, ホテリングの T^2 統計量（自由度 $p, n-p+1$ の $np/(n-p+1)F_{p,n-p+1}$ 統計量）である.

また，$k=4$ のとき, 任意の正定値行列 $\boldsymbol{V}$ について次の不等式が成り立つ.

$$1-\alpha = Q(t_{\mathrm{p}}^*, \boldsymbol{I}, \mathcal{C}) \le Q(t_{\mathrm{p}}^*, \boldsymbol{V}, \mathcal{C}) < Q(t_{\mathrm{p}}^*, \boldsymbol{V}_3, \mathcal{C}),$$

ここで, $t_{\mathrm{p}}^* = t_{\mathrm{p}}^2/\nu$, $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j,\ 1 \le i < j \le k\}$ であり，$\boldsymbol{V}_3$ は，すべて異なる i, j, l, m に対して,「$\sqrt{d_{ij}} = \sqrt{d_{il}} + \sqrt{d_{jl}}$ かつ $\sqrt{d_{ij}} = \sqrt{d_{im}} + \sqrt{d_{jm}}$」の一つを満たす行列である. さらに，対照比較の場合，任意の正定値行列 $\boldsymbol{V}$ について次の不等式が予想される.

$$1-\alpha = Q(t_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}_4, \mathcal{D}) \le Q(t_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}, \mathcal{D}) < Q(t_{\mathrm{c}}^*, \boldsymbol{V}_5, \mathcal{D}),$$

ここで $t_{\mathrm{c}}^* = t_{\mathrm{c}}^2(\alpha; p, k, \nu, \boldsymbol{V}_4)/\nu$，$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d} \in \mathcal{R}^k : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_k,\ i = 1, \ldots, k-1\}$ であり，$\boldsymbol{V}_4$ は $d_{12} = d_{14} + d_{24}$ かつ $d_{13} = d_{14} + d_{34}$ かつ $d_{23} = d_{24} + d_{34}$ を満たす行列，$\boldsymbol{V}_5$ は $\sqrt{d_{12}} = |\sqrt{d_{14}} - \sqrt{d_{24}}|$ または $\sqrt{d_{13}} = |\sqrt{d_{14}} - \sqrt{d_{34}}|$ または $\sqrt{d_{23}} = |\sqrt{d_{24}} - \sqrt{d_{34}}|$ を満たす行列である.

本報告では, $k=3$ として, いくつかのパラメータの場合について，対比較と対照比較それぞれの統計量の上側パーセント点と coverage probability をシミュレーションにより求め, 保守性の程度を考察した．さらに, $k=4$ の対比較の場合においても, 同様にして保守性の程度を考察した.

参考文献

[1] Seo, T., Mano, S. and Fujikoshi, Y. (1994), "A generalized Tukey conjecture for multiple comparisons among mean vectors," *Journal of the American Statistical Association,* 89, 676–679.

Nonparametric least absolute deviation regression for long-range dependent processes

一橋大学大学院経済学研究科　本田敏雄

1. 序

長期記憶をもつ強定常な2変量時系列 $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ を観測していくとする．そして Y_i が被説明変数，X_i が説明変数であるとする．Y_i の X_i に関する条件付メディアンのノンパラメトリック推定について考察する．$\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ の確率的な構造については以下のような仮定をおく．

$$Y_i = u(X_i) + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ここで $V_i = V(X_i, Z_i)$ であり，V_i の X_i に関する条件付メディアンは0であるとする．$\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ は観測されない潜在的な確率過程である．そして $\{(X_i, Z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ は以下のように定義される長期記憶をもつ線形確率過程である．

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \epsilon_{i-j} \quad \text{かつ} \quad Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \zeta_{i-j},$$

ここで $\{(\epsilon_i, \zeta_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ はそれぞれ平均0の2変量のi.i.d.過程で，4次のモーメントをもつとする．b_j と c_j については，

$$b_j = j^{-(1+\gamma_X)/2} L_X(j) \quad \text{かつ} \quad c_j = j^{-(1+\gamma_Z)/2} L_Z(j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

である．$L_X(j)$，$L_Z(j)$ は緩変動関数であり，$0 < \gamma_X < 1$，$0 < \gamma_Z < 1$ とする．$b_0 = 1$，$c_0 = 1$ とする．

以上の状況において x_0 を固定した上で，$u(x_0)$ を標本 $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{n}$ から Chaudhuri(1991) の局所線形 L_1 回帰により推定する．

2. 推定量の定義と漸近的性質

$u(x)$ の x_0 でのテイラー展開により以下の式が得られる．

$$Y_i = u(x_0) + \frac{X_i - x_0}{h} h u'(x_0) + \frac{1}{2}\Big(\frac{X_i - x_0}{h}\Big)^2 h^2 u''(\bar{X}_i) + V_i.$$

この式に基づき $(u(x_0), hu'(x_0))^T$ は，次に定義される $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^T$ により推定される．

$$\hat{\beta} = \mathrm{argmin}_{\beta \in R^2} \sum_{i=1}^{n} K_i |Y_i - \eta_i^T \beta|$$

で，$\eta_i = (1, (X_i - x_0)/h)^T$ かつ $K_i = K((X_i - x_0)/h)$ である．h はバンド幅で $h = cn^{-1/5}$ とする．

推定量は以下の 4 つの場合で，それぞれ異なる漸近分布をもつ．

ケース 1: $\lim_{n\to\infty} nh\{(n^{-\gamma_X} L_X^2(n)) \vee (n^{-\gamma_Z} L_Z^2(n))\} = 0$.

ケース 2: $\lim_{n\to\infty} \sigma_{X,n}^2/\sigma_{Z,n}^2 = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} nhn^{-\gamma_X} L_X^2(n) = \infty$.

ケース 3: $\lim_{n\to\infty} \sigma_{X,n}^2/\sigma_{Z,n}^2 = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} nhn^{-\gamma_Z} L_Z^2(n) = \infty$.

ケース 4: $\gamma_X = \gamma_Z$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_X(n)(\mathrm{E}(\epsilon_0^2))^{1/2}}{L_Z(n)(\mathrm{E}(\zeta_0^2))^{1/2}} = R(\neq 0), \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} nhn^{-\gamma_X} L_X^2(n) = \infty.$$

ここで

$$\begin{aligned} \sigma_{X,n}^2 &\sim \{(2-\gamma_X)(1-\gamma_X)\}^{-1} 2C_{\gamma_X} L_X^2(n) n^{2-\gamma_X} \quad \text{かつ} \\ \sigma_{Z,n}^2 &\sim \{(2-\gamma_Z)(1-\gamma_Z)\}^{-1} 2C_{\gamma_Z} L_Z^2(n) n^{2-\gamma_Z} \end{aligned}$$

であり，それぞれは $\sum_{i=1}^n X_i$，$\sum_{i=1}^n Z_i$ の分散である．

漸近分布の導出は，Pollard(1991), Mielniczuk and Wu(2004) の方法による．漸近分布の導出，具体的な形については Honda(2005) に詳細が与えられている．ケース 1 では i.i.d. と同じ漸近分布をもち，ケース 2-4 では長期記憶の影響を受ける．

参考文献

[1] Chaudhuri, P. (1991). Nonparametric estimates of regression quantiles and their local Bahadur representation, *The Annals of Statistics*, **19**, 760–777.

[2] Honda, T. (2005). *Nonparametric Least Absolute Deviation Regression for Long-range Dependent Processes*, Discussion Paper #2005-4, Graduate School of Economics, Hitotsubashi University, 2005

[3] Mielniczuk, J. and Wu, W. B. (2004). On random design model with dependent errors, *Statistica Sinica*, **14**, 1105–1126.

[4] Pollard, D. (1991). Asymptotics for least absolute deviation regression estimates, *Econometric Theory*, **7**, 186–98.

L-統計量の漸近分布について

九州大学経済学研究院　前園宜彦

1．L-統計量のエッジワース展開

統計量のクラスとして有用な L-統計量の部分族について，ジャックナイフ分散推定量の漸近表現を求め，スチューデント化 L-統計量の漸近表現と $n^{-1/2}$ のオーダーまでのエッジワース展開を求めた．またそのエッジワース展開を利用して，実用的な意味で収束のオーダーを改善する正規化変換についても議論した．

$X_1, \cdots, X_n$ を i.i.d. $F(x)$ とし，$J(u)$ をスコア関数，$F_n(u)$ を経験分布関数すなわち $F_n(u) = n^{-1}\sum_{i=1}^n I(X_i \le u)$ とする．ただし $I(\cdot)$ は定義関数である．このとき L-統計量の部分族

$$T(F_n) = \int_0^1 F_n^{-1}(u)J(u)du$$

について考察する．ここで $F_n^{-1}(u) = \inf\{x; F_n(x) \ge u\}$ である．このとき，$T(F_n)$ は L-統計量の部分族を成す．$\sqrt{n}(T(F_n) - T(F))$ の漸近分散は

$$\sigma^2(J,F) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J(F(u))J(F(v))[F(\min(u,v)) - F(u)F(v)]dudv$$

となる．ここで $T(F) = \int_0^1 F^{-1}(u)J(u)du$ である．標準化 L-統計量のエッジワース展開は Helmers (1982), Alberink, Pap and van Zuijlen (2001) 等により議論されている．$\sqrt{n}(T(F_n) - T(F))$ のジャックナイフ分散推定量は

$$\hat{\sigma}^2(J,F) = (n-1)\sum_{i=1}^n [T(F_{n;i}) - T(F_n)]^2$$

となる．ここで $F_{n;i}$ は X_i を除いた $n-1$ 個の標本に基づく経験分布関数である．

本報告では $\hat{\sigma}^2(J,F)$ の漸近表現を求め，スチューデント化 L-統計量 $\sqrt{n}\{T(F_n) - T(F)\}/\hat{\sigma}(J,F)$ の $n^{-1/2}$ の項までのエッジワース展開を求めた．

[定理1]　スコア関数が $J^{(1)}(u)$ は 有界で，$J^{(2)}(u)$ はオーダー $s > 0$ の Lipshitz 条件を満たすとする．もし

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(u)(1-F(u))\}^{1/4}du < \infty$$

ならば

$$\hat{\sigma}^2(J,F) = \sigma^2(J,F) + n^{-1}\sum_{i=1}^n \alpha_1(X_i) + o_L(n^{-1/2})$$

および

$$\frac{\sqrt{n}(T(F_n) - T(F))}{\hat{\sigma}(J,F)} = n^{-1/2}\tau + n^{-1/2}\sum_{i=1}^n \nu_1(X_i) + n^{-3/2}\sum_{C_{n,2}} \nu_2(X_i, X_j) + o_L(n^{-1/2})$$

が成り立つ．

Lai and Wang (1993) による漸近 U-統計量に対するエッジワース展開を使うと，スチューデント化 L-統計量のエッジワース展開を求めることができる．次の条件を考える．

(C_1)　$E\{|\nu_1(X_1)|^3 + |\nu_2(X_1, X_2)|^3\} < \infty$, $\sigma^2(J,F) > 0$.

(C_2) $\limsup_{|t|\to\infty} |E[\exp\{it\nu_1(X_1)\}]| < 1$.

[定理 2] （定理 1）の条件及び C_1, C_2 が成り立つとき

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{\sqrt{n}\{T(F_n) - T(F)\}}{\hat{\sigma}(J,F)} \leq x \right\} - Q_n(x) \right| = o(n^{-1/2})$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= E[\nu_1^3(X_1)] + 3E[\nu_1(X_1)\nu_1(X_2)\nu_2(X_1,X_2)], \\ P_1(x) &= \frac{\kappa_3(x^2-1)}{6}, \\ Q_n(x) &= \Phi(x) - n^{-1/2}\phi(x)\{P_1(x) + \tau\} \end{aligned}$$

で，τ は（定理 1）で求めた H-分解された項を使って定義されるものである．

2．正規化変換

エッジワース展開を単純に反転しただけでは，信頼区間の被覆確率の収束の速さを改良することができないことが，多くの研究者によって指摘されている．Konishi (1981) や Hall (1992) は収束の速さを保障する正規化変換を求めている．この議論を (定理 1) の漸近表現に適用すると次の定理が得られる．ここで次の記号を準備する．

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{6}E[\nu_1^3(X_1)] - \frac{1}{2}E[\nu_1(X_1)\nu_1(X_2)\nu_2(X_1,X_2)], \\ q &= \frac{1}{6}E[\nu_1^3(X_1)] + \frac{1}{2}E[\nu_1(X_1)\nu_1(X_2)\nu_2(X_1,X_2)] - \tau \end{aligned}$$

とし，それぞれの一致推定量を $\hat{p}$, $\hat{q}$ とおき，

$$\pi(s) = s + \frac{\hat{p}}{\sqrt{n}}s^2 + \frac{\hat{q}}{\sqrt{n}} + \frac{\hat{p}^2}{3n}s^3$$

の変換を考えると次の定理が成り立つ．

[定理 3] (定理 2) と同じ条件の下で

$$\sup_x \left| P\left\{ \pi\left(\frac{\sqrt{n}\{T(F_n) - T(F)\}}{\hat{\sigma}(J,F)} \right) \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = o(n^{-1/2}).$$

この正規化変換 $\pi(\cdot)$ を利用すると被覆確率の収束が $o(n^{-1/2})$ となる $T(F)$ の信頼区間が構成できる．

以上の結果を Gini の mean difference へ応用した結果についても報告した．

参考文献

[1] Alberink, I.V., Pap, G. and van Zuijlen, M.C.A. (2001), Edgworth expansions for L-statistics, *Prob. Math. Statist.* **21**, 277-302.

[2] Hall, P. (1992), On the removal of skewness by transformation, *Jour. Royal. Statist. Soc. B* , **54**, 221-228.

[3] Helmers, R. (1982), Edgeworth expansions for linear combinations of order statistics, *Math. Centre Tracts 105*, Amsterdam.

[4] Konishi, S. (1981), Normalizing transformations of some statistics in multivariate analysis, *Biometrika*, **68**, 647-651.

[5] Lai, T.L. and Wang, J.Q. (1993), Edgeworth expansion for symmetric statistics with applications to bootstrap methods, *Statistica Sinica* **3**, 517-542.

離散データ解析におけるモデリングと統計的推測

関東学院大経済学部　布能 英一郎

1. Introduction

k, m は $m < k$ を満たす自然数。$\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ は独立で

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \text{Multinomial}(N_1; \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k),$$
$$\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_m) \sim \text{Multinomial}(N_2; \frac{\theta_0}{\sum_{i=0}^{m} \theta_i}, \frac{\theta_1}{\sum_{i=0}^{m} \theta_i}, \ldots, \frac{\theta_m}{\sum_{i=0}^{m} \theta_i}).$$

と仮定する。このとき、Asano, C.(1965) は，θ_i の MLE を尤度方程式より直接に求めたが、パラメータ変換に工夫をこらすと簡単に求められる。同様に、$\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ が独立で

$$\mathbf{X} \;=\; (X_0, X_1, X_2, \cdots, X_k) \sim \text{Multinomial}(N_1; \theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k),$$
$$\mathbf{Y} \;=\; (Y_0, \cdots, Y_{m-1}, Y_m) \sim \text{Multinomial}(N_2; \theta_0, \cdots, \theta_{m-1}, \textstyle\sum_{i=m}^{k} \theta_i),$$

のときも、上記と同様のパラメータ変換により容易に求められる。更に、これらの場合の MLE について、既に次の諸性質が満たされることがわかっている：(a) 不偏推定量である。(b) 自乗損失下で、improper prior $d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_k / (\theta_0 \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_k)$ に対するベイズ推定量である。(c)（MLE 計算において支障が生じる場合を除外すると）自乗損失下で許容的。

2. 対称性をもつ二次元分割表におけるカテゴリーの減少、合併

$\mathbf{X} = (X_{ij})$ は $k \times k$ random matrix であって、$\mathbf{X} \sim \text{Multinomial}(N; \mathbf{P} = (p_{ij}))$ と仮定する。なお、$0 \le p_{ij} \le 1$, $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ である。対称性 $p_{ij} = p_{ji}$ の仮説の下で、$\hat{p}_{ij}$ は $\hat{p}_{ij} = x_{ii}/N$, if $i = j$, $i = 1, 2, \cdots, k$, $\hat{p}_{ij} = (x_{ij} + x_{ji})/2N$, if $1 \le i < j \le k$ である。そこで、次のような場合に MLE を求めてみた。

例 2.1 $\mathbf{X} = (X_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,k}$ と $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,m}$ は独立な random matrix であって、

$$\mathbf{X} = (X_{ij}) \sim \text{Multinomial}(N_1; \mathbf{P} = (p_{ij})), \quad \mathbf{Y} = (Y_{ij}) \sim \text{Multinomial}(N_2; \mathbf{Q} = (q_{ij}))$$

を満たし、更に $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,k}$ $p_{ij} \ge 0$, $p_{ij} = p_{ji}$ および $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,m}$ は

$$q_{ij} = q_{ji} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ii} + 2 \sum\sum_{1 \le i < j \le m} p_{ij}} \quad \text{for all} \quad 1 \le i < j \le m.$$

を満たすとき

例 2.2 例 2.1 における生起確率 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j}$ と $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j}$ の関係式を

$$q_{ii} \;=\; \sum_{a=1}^{k} p_{aa} \times \frac{p_{ii}}{\sum_{b=1}^{m} p_{bb}} \quad \text{for all} \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$
$$q_{ij} \;=\; q_{ji} = \sum\sum_{1 \le a < b \le k} p_{ab} \times \frac{p_{ij}}{\sum\sum_{1 \le c < d \le m} p_{cd}} \quad \text{for all} \quad 1 \le i < j \le m.$$

に変更したとき

これらの MLE は、いずれも Asano のモデルにおける MLE の拡張になっていることもわかった。なお、MLE の具体的な式については、紙面の関係から省略する。更に、

- カテゴリーが合併する場合
- カテゴリーが proportional に合併する場合
- 途中が欠落する場合
- MLE の直接解が求められず、EM アルゴリズムによって MLE が得られる場合

に関して考察を行い、 MLE の直接解が求められる場合はその具体的な式を、MLE の直接解が求められず EM アルゴリズムによる計算で求まる場合には、アルゴリズムの具体的構成法を示した。

3. Bradley-Terry モデルから導かれるモデルにおけるカテゴリーの減少、合併

Bradley-Terry モデルにおいて、(一般に)MLE の直接解は求められないが、いくつかの近似計算法がある。この章では、竹内・藤野 (1988) による MLE 計算法が、カテゴリーが合併する場合に拡張できたことを示す。まず、初年度において, m チームがリーグ戦を行い、各チームの強さは $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m$ 但し、「各チームの強さ」は相対的にしか求められないので、$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m = 1$ の仮定条件をつける。

3.1. カテゴリー減少が生じたときに 生起確率が「比例配分」の場合 Bradley-Terry モデルにおいて、カテゴリー減少が生じたときに 生起確率が「比例配分」の場合、実用上、決して不自然でも 意味のないモデルでもないが、数理的には面白みを見出せないモデルである。なぜなら、次年度、$k+1$, $k+2, \cdots, m$ チームが撤退するとき、残りの $1, 2, \cdots, k$ の各チームの強さから 次年度のチーム i がチーム j に勝つ確率を計算すると、初年度のチーム i がチーム j に勝つ確率に一致する。よって、MLE equations は、単にデータの部分が変更になるだけであるから。

3.2. カテゴリーが合併する場合 次年度、$k+2$ チーム, $k+3$ チーム, $\cdots$, m チーム は、$k+1$ チームに合併すると考える。そうすると、各チームの次年度の強さは $\pi_1^{[2]} = \pi_1, \pi_2^{[2]} = \pi_2, \cdots, \pi_k^{[2]} = \pi_k, \pi_{k+1}^{[2]} = \pi_{k+1} + \pi_{k+2} + \cdots + \pi_m$ と考えられる。これより対戦の勝利確率を求め、竹内・藤野の方法を拡張することで、MLE の近似計算法を示すことができた。

上記の報告に対し、赤平昌文 (筑波大), 栗木哲 (統計数理研究所) 両教授より「合併チームの強さを $\pi_{k+1}^{[2]} = \pi_{k+1} + \cdots + \pi_m$ としたが、この仮定は、Bradley-Terry モデルの本質である「三すくみのない状況」を満たしているか？」との質問を受けた。本報告者は、この点について全く考察しておらず、検討課題を与えられた。但し、合併チームの強さを上記のように定めた時、「三すくみのない状況」であるか否かは定かでないものの、 MLE を求めるアルゴリズムの部分については、数学的に全く問題がないことはチェックできた。

参考文献 [1] Asano, C. (1965) On estimating multinomial probabilities by pooling incomplete samples, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **17**, 1-13. [2] 竹内 啓・藤野 和建 (1988) スポーツの数理科学, 共立出版

ヒト胎児形態計測データの様相

島根大・総合理工 内藤 貫太
島根大・医 宇田川 潤
島根大・医 大谷 浩

1 序

ヒト胎児は母親の胎内においていかなる発生過程を経るのであろうか？産後の新生児がどのように成長していくのかについての考察は無数存在すると言える．しかし，胎内においてどのように胎児の頭ができ，手がのび，足が出て，といった胎児の“発生”については未だわかっていないことが多く，系統的な発生のスタンダードは存在していない現状がある．本報告では，ヒト胎児形態計測データの解析を幾つか紹介し，ヒト胎児の胎内での発生過程の解明に向けての接近について議論する．

2 ヒト胎児形態計測データ

多数の胎児の臓器の標本実測値がここで議論されるヒト胎児形態計測データである．これは京都大学医学研究科付属先天異常標本解析センターにて収集された数万対におよぶ日本人ヒト胎児標本の1部であり，現在は島根大学医学部発生生物学教室にて保管・管理されているものである．データの内容としては，個々の胎児について，身長，体重などの外表形態と共に，肺，副腎，肝臓など解剖によって得られた100以上の臓器部位の測定値が含まれている．このデータの解析における1つの注意点として，正確な時間パラメータが存在しない事が挙げられるが，臨床現場でも用いられている頭部先端から臀部までの距離（胎児頭殿長，CRL:Crown Rump Length）を時間変数として扱う．

3 解析の目標

今年度中に得たい成果は,「胎児発生のスタンダードの構築」である．母子手帳には乳幼児の定期健診などで測定された身長・体重などの数値が標準値に対してどれくらい違っているのかの目安が得られるような標準発育曲線（スタンダード）が掲載されている．このスタンダードの“胎児用バージョン”の構築が目標である．その際，外表だけではなく臓器部位の測定値に対してもスタンダードを構築すること，また幾つかの測定値を同時に考慮した多変量的なスタンダードを構築することを目標とする．

4　統計解析

以下において，i 番目の個体（胎児，$i=1,\cdots,N$）に関する p 個の計測値ベクトルを $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\cdots,x_{ip})^T$ で表す．ここで，$\boldsymbol{x}$ として計測される変数としては，例えば頭幅，大腿長，肺（縦径，横径，前後径）が想定される．

4.1. Leave-One-Out Mahalanobis Distance: データ $\boldsymbol{x}_j(j=1,\cdots,N)$ から i 番目のデータ $\boldsymbol{x}_i$ を除いて得られるサイズ $N-1$ のデータセットから計算される標本平均ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}_{(-i)}$，（不偏）標本分散を $\boldsymbol{S}_{(-i)}$ とする．i 番目の個体とその他の集団との隔たりを，マハラノビス距離

$$T^2_{(-i)}=\left(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_{(-i)}\right)^T\boldsymbol{S}^{-1}_{(-i)}\left(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_{(-i)}\right)$$

で測る（$i=1,\cdots,N$）．同じ物差しで考えるために正規性を仮定し，$c(N,p)T^2_{(-i)}\sim F_{p,N-1-p}$ を用いて [例えば，Mardia *et al.*(1979) 参照]，i 番目の固体の p 値

$$p_i=P\left\{F_{p,N-1-p}\geq\frac{T^2_{(-i)}}{c(N,p)}\right\}$$

が得られる（$i=1,...,N$）．ここで，$c(N,p)=pN(N-2)/\{(N-1)(N-1-p)\}$ である．この N 個の p 値の順序統計量を考えることで，集団の中の位置づけが判定できる．

4.2. 多次元空間における 1 次元スタンダード曲線: N 個の個体の CRL を $z_i(i=1,...,N)$ とし，対応する他の p 個の計測値ベクトルを $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\cdots,x_{ip})^T$ とする．CRL と k 番目の変数との関係を探るために，データ $(z_1,x_{1k}),...,(z_N,x_{Nk})$ を構成し，CRL を説明変数と見てこのデータを平滑化する．ここでは多項式回帰推定量もしくは局所線形回帰推定量 [Fan (1992)] を用いる．各変数でこれを実行することにより，CRL を説明変数とした平滑化推定量 $\hat{f}_1(z),\cdots,\hat{f}_p(z)$ を得る．このとき，$\hat{f}(z)=(\hat{f}_1(z),\cdots,\hat{f}_p(z))^T$ は p 次元空間における 1 次元曲線であり，我々はこれを 1 つの系統的スタンダードと考える．

4.3. 特徴変数に関する Quantile Regression: 4.2. のスタンダード曲線からの逸脱があれば，p 個の変数のどれがその逸脱に強く影響を及ぼしているのかを見ていく必要がある．標準からの逸脱が疑われる変数を特徴変数とし，CRL とその特徴変数との散布図に対し分位点回帰 [Quantile Regression，例えば Koenker (2005) 参照] を適用する．新しい個体が，CRL に条件付けしたときの条件付分布の何%点に位置しているのか，分位点回帰はこのことに答えてくれる．

参考文献

[1] Fan, J.(1992). Design-adaptive nonparametric regression. *J. Am. Statist. Assoc.* **87**, 998-1004.

[2] Koenker, R.(2005). *Quantile Regression.* Cambridge University Press.

[3] Mardia, K. V., Kent, J. T. and Bibby, J. B.(1979). *Multivariate Analysis*, Academic Press.

Second order optimality for estimators in time series regression models

Kenichiro Tamaki
Waseda University

Abstract

We consider the second order asymptotic properties of an efficient frequency domain regression coefficient estimator $\hat{\beta}$ proposed by Hannan [1]. This estimator is a semiparametric estimator based on nonparametric spectral estimators. We derive the second order Edgeworth expansion of the distribution of $\hat{\beta}$. Then it is shown that the second order asymptotic properties are independent of the bandwidth choice for residual spectral estimator, which implies that $\hat{\beta}$ has the same rate of convergence as in regular parametric estimation. This is a sharp contrast with the general semiparametric estimation theory. We also examine the second order Gaussian efficiency of $\hat{\beta}$. Numerical studies are given to confirm the theoretical results.

1 Introduction

The problem of efficiently estimating the coefficients in a linear regression model has been investigated widely. When the error covariance matrix depends on unknown parameters, the regression coefficients are often estimated by generalized least squares (GLS), using appropriate consistent estimators of the parameters. It is well known that standardized GLS estimators have the same limiting distribution as the best linear unbiased estimator. Rothenberg [5] gave higher order approximations to the distribution of GLS estimators. Toyooka [8, 9] derived the asymptotic expansion of the mean squared errors (MSE). Since these methods are parametric, standard root N asymptotics hold for time domain GLS estimators, where N is the sample size.

If the autocorrelation structure of the unobservable residuals is not parameterized, we then construct efficient estimators by spectral methods. This technique is semiparametric since it relies on a nonparametric spectral estimator of the residuals.

The semiparametric method of a linear regression model was introduced by Hannan [1], who showed that a frequency domain GLS estimator achieves asymptotically the Gauss-Markov efficiency bound under smoothness and Grenander's conditions on the residual spectral density and the regressor sequence, respectively.

There are principal differences between parametric and nonparametric estimation technique that are often given in terms of consistency and rates of convergence. Velasco and Robinson [10] derived Edgeworth expansions for the distribution of nonparametric estimates. Taniguchi et al. [7] discussed higher order asymptotic theory for minimum contrast estimators of spectral parameters. They established that for semiparametric estimation it does not hold in general that first order efficiency implies second order efficiency.

The semiparametric estimation entails the problem of the bandwidth selection. Applications of higher order asymptotic expansions to this problem have been studied by many authors. Robinson [4] studied frequency domain inference on semiparametric and nonparametric models in the presence of a data dependent bandwidth. Linton [2] investigated the second order properties of various quantities in the partially linear model. Xiao and Phillips [11] gave higher order approximations of the MSE of the frequency domain GLS estimators. Linton and Xiao [3] derived asymptotic expansions for semiparametric adaptive regression estimators. They discussed the bandwidth selection based on minimizing the (integrated) MSE. Also Xiao and Phillips [12] discussed higher order approximations for Wald statistics in frequency domain regressions with integrated processes.

Taniguchi et al. [6] established the root N asymptotic theory for functionals of nonparametric spectral density estimators. This is due to the fact that integration of nonparametric spectral density estimators recovers root N consistency. Since the Hannan estimator is based on integral functionals of nonparametric estimators, it may be expected that the Hannan estimator has attractive properties in higher order asymptotic theory.

In this paper, we will develop the second order asymptotic theory for the frequency domain GLS estimator proposed by Hannan [1]. First, we give the second order Edgeworth expansion of the distribution of the Hannan estimator. Next, we show that the bias-adjusted version of the Hannan estimator is not second order asymptotically Gaussian efficient in general. Of course, if the residual is Gaussian, it is second order asymptotically efficient. As in Xiao and Phillips [11], if the error is a Gaussian process, then it holds that first order efficiency implies second order efficiency.

An interesting result of the paper is that the second order asymptotic properties are independent of the bandwidth choice for the residual spectral estimator. This implies that the Hannan estimator has the same rate of convergence as in regular parametric estimation. This is a sharp contrast with the general semiparametric estimation theory, where it is known that the second order asymptotic properties are strongly influenced by the bandwidth (e.g., Taniguchi et al. [7]).

References

[1] HANNAN, E. J. (1963). Regression for time series. *Proc. Sympos. Time Series Analysis* pp. 17–37 John Wiley, New York.

[2] LINTON, O. (1995). Second order approximation in the partially linear regression model. *Econometrica* **63** 1079–1112.

[3] LINTON, O. and XIAO, Z. (2001). Second-order approximation for adaptive regression estimators. *Econometric Theory* **17** 984–1024.

[4] ROBINSON, P. M. (1991). Automatic frequency domain inference on semiparametric and nonparametric models. *Econometrica* **59** 1329–1363.

[5] ROTHENBERG, T. J. (1984). Approximate normality of generalized least squares estimates. *Econometrica* **52** 811–825.

[6] TANIGUCHI, M., PURI, M. L. and KONDO, M. (1996). Nonparametric approach for non-Gaussian vector stationary processes. *J. Multivariate Anal.* **56** 259–283.

[7] TANIGUCHI, M., VAN GARDEREN, K. J. and PURI, M. L. (2003). Higher order asymptotic theory for minimum contrast estimators of spectral parameters of stationary processes. *Econometric Theory* **19** 984–1007.

[8] TOYOOKA, Y. (1985). Second-order risk comparison of SLSE with GLSE and MLE in a regression with serial correlation. *J. Multivariate Anal.* **17** 107–126.

[9] TOYOOKA, Y. (1986). Second-order risk structure of GLSE and MLE in a regression with a linear process. *Ann. Statist.* **14** 1214–1225.

[10] VELASCO, C. and ROBINSON, P. M. (2001). Edgeworth expansions for spectral density estimates and Studentized sample mean. *Econometric Theory* **17** 497–539.

[11] XIAO, Z. and PHILLIPS, P. C. B. (1998). Higher-order approximations for frequency domain time series regression. *J. Econometrics* **86** 297–336.

[12] XIAO, Z. and PHILLIPS, P. C. B. (2002). Higher order approximations for Wald statistics in time series regressions with integrated processes. *J. Econometrics* **108** 157–198.

Slope Modified Confidence Bands for a Simple Linear Regression Model

A. J. Hayter
Industrial and Systems Engineering, Georgia Tech, Atlanta, USA
ajh@isye.gatech.edu

H. P. Wynn
Department of Statistics, London School of Economics, London, UK
h.wynn@lse.ac.uk

W. Liu
School of Mathematics, University of Southampton, Southampton, UK
w.liu@maths.soton.ac.uk

May 2005

Summary

Considerable attention has been directed in the statistical literature towards the construction of confidence bands for a simple linear regression model. These confidence bands allow the experimenter to make inferences on the model over a particular region of interest. However, in practice an experimenter will usually first check the significance of the regression line before proceeding with any further inferences such as those provided by the confidence bands. From a theoretical point of view, this raises the question of what the conditional confidence level of the confidence bands might be, and from a practical point of view it is unsatisfactory if the confidence bands contain lines that are inconsistent with the directional decision on the slope. In this paper it is shown how confidence bands can be modified to alleviate these two problems.

Key words: Simple Linear Regression; Confidence Bands; Acceptance sets; Directional Decisions.

1 Introduction

Consider the standard simple linear regression model based on data (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$, so that

$$\sqrt{n}((\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}) - (\beta_0 + \beta_1\bar{x}))/\sigma \qquad \text{and} \qquad \sqrt{S_{xx}}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)/\sigma$$

are independently distributed as standard normal random variables, independently of $\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{n-2}/(n-2)$, where $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

There has been a long history on the development of confidence bands for this regression model dating all the way back to the hyperbolic bands of Working and Hotelling (1929)

$$\beta_0 + \beta_1 x \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \pm \hat{\sigma}\sqrt{2F^{\alpha}_{2,n-2}}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}} \tag{1}$$

for all $x \in \Re$ which may still be the most frequently employed bands. Wynn and Bloomfield (1971) showed how to construct confidence bands of this type that guaranteed the confidence level over a restricted region, and Bohrer and Francis (1972) showed how to construct just an upper bound of this type. Also, Graybill and Bowden (1967) discussed confidence bands where the upper and lower bounds each consist of two straight line segments, and Gafarian (1964) pioneered the work on confidence bands with a constant width over a restricted region. A common aspect of this work is that the confidence bands have been designed to achieve a stated confidence level over the region of interest. Liu et al. (2005) contains a summary of recent work in this area.

However, in practice it is likely that the first analysis performed by an experimenter will be a test of the significance of the regression model. For a one-sided analysis the regression will be found to be significant when $\hat{\beta}_1 > t^{\alpha}_{n-2}\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}$, say, and for a two-sided analysis the condition will be $|\hat{\beta}_1| > t^{\alpha/2}_{n-2}\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}$. Furthermore, if the regression is found not to be significant, then it is likely that the experimenter will not be interested in conducting any further analysis of the model. In particular, this implies that in practice the confidence bands will only be constructed and applied in situations where the regression has been found to be significant.

This *modus operandi* has two implications for the confidence bands. Firstly, from a theoretical point of view the nominal confidence level of the bands should be questioned because the probabilistic calculations should be made conditional on the regression having been found to be significant. Secondly, from a practical point of view there may be an unsatisfactory aspect to the confidence bands if, for example, they contain regression models with a negative slope while the significance test has determined that the slope is strictly positive.

The purpose of this paper is to show how these two concerns can be addressed by simple modifications to the confidence bands. When the significance of the model is assessed with a one-sided analysis, it is appropriate to take any existing confidence band methodology and to modify it by removing lines with non-positive slopes. The modified confidence bands satisfy the required confidence level with the single caveat that they should only be used when the regression model has been found to be significant. When the significance of the model is assessed with a two-sided analysis, it will be seen that similar modifications can also usually be made to the confidence bands.

M 統計量に基づく対照群との多重比較法

横浜市立大学・国際総合科学部　白石 高章

1 はじめに

ある要因 A があり, k 個の水準 $A_1, \ldots, A_k$ を考える. 水準は群ともよばれる. 水準 A_i における標本の観測値 $(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i})$ は第 i 標本または第 i 群とよばれ, 平均 μ_i, 分散 σ^2 である同一の連続型分布関数 $F((x-\mu_i)/\sigma)$ をもつとする. すなわち,

$$P(X_{ij} \leqq x) = F\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma}\right), \ \ E(X_{ij}) = \mu_i, \ \ V(X_{ij}) = \sigma^2.$$

このモデルで, 第 k 群を対照群, その他の群は処理群と考え, どの処理と対照の間に差があるかを調べることである.

1つの比較のための検定は,

$$\text{帰無仮説 } H_i: \ \mu_i = \mu_k$$

に対して 3 種の対立仮説

$$\begin{aligned} \text{両側対立仮説 } H_i^{A\pm} &: \ \mu_i \neq \mu_k \\ \text{片側対立仮説 } H_i^{A+} &: \ \mu_i > \mu_k \\ \text{片側対立仮説 } H_i^{A-} &: \ \mu_i < \mu_k \end{aligned}$$

となる. これらの同時検定が考えられ, $F(x)$ が正規分布のときには, ダネットの手法が知られている.

$1 \leqq i \leqq k-1$ を満たすすべての i に対して, $\mu_i - \mu_k$ の区間推定に興味があるものとする. 定数 α $(0 < \alpha < 1)$ をはじめに決める. $i = 1, \cdots, k-1$ に対して I_i を区間とする.

$$P\left(i = 1, \cdots, k-1 \text{ に対して}, \mu_i - \mu_k \in I_i\right) \geqq 1 - \alpha$$

となるならば, $\mu_i - \mu_k \in I_i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ を, $\{\mu_i - \mu_k : i = 1, \cdots, k-1\}$ に対する信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間とよんでいる.

$F(x)$ は未知であってもかまわないものとし, M 統計量に基づいて, 同時検定と同時区間推定について考察する.

2 同時信頼区間

$\tilde{\nu}_{ik}$, $\hat{\sigma}_n$ を

$$\tilde{\nu}_{ik} \equiv \frac{n_i\bar{X}_{i\cdot} + n_k\bar{X}_{k\cdot}}{n_i + n_k}, \quad \hat{\sigma}_n \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}|X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}|$$

で定義したものとし,

$$T_i(\theta) \equiv \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\psi\left(\frac{X_{ij}-\tilde{\nu}_{ik}-(n_k/N_i)\cdot\theta}{\hat{\sigma}_n}\right)-\frac{1}{n_k}\sum_{j'=1}^{n_k}\psi\left(\frac{X_{kj'}-\tilde{\nu}_{ik}+(n_i/N_i)\cdot\theta}{\hat{\sigma}_n}\right),$$

$$\hat{\sigma}_n^2(\psi) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left\{\psi\left(\frac{X_{ij}-\bar{X}_{i\cdot}}{\hat{\sigma}_n}\right)-\bar{\psi}(\boldsymbol{X}_i)\right\}^2}{n-k},$$

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{X}_i) \equiv \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\psi\left(\frac{X_{ij}-\bar{X}_{i\cdot}}{\hat{\sigma}_n}\right), \quad N_i \equiv n_i+n_k$$

とおく.

$$B(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{k-1}\left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_k}}x+\sqrt{\frac{\lambda_i+\lambda_k}{\lambda_k}}t\right)-\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_k}}x-\sqrt{\frac{\lambda_i+\lambda_k}{\lambda_k}}t\right)\right\}\varphi(x)dx$$

とおき, $d(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$ を, $B(t)=1-\alpha$ を満たす t の解とする.

$$\begin{aligned} T_i(\theta) &= -\sqrt{N_i/(n_i n_k)}\cdot\hat{\sigma}_n(\psi)\cdot d(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha), \\ T_i(\theta) &= \sqrt{N_i/(n_i n_k)}\cdot\hat{\sigma}_n(\psi)\cdot d(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha) \end{aligned}$$

を満たす θ を, それぞれ, $U_i(\alpha)$, $L_i(\alpha)$ とする. ここで, つぎの定理を得る.

定理　正則条件の下で, 信頼係数 $1-\alpha$ の漸近的な同時両側信頼区間は,

$$L_i(\alpha) < \mu_i - \mu_k < U_i(\alpha) \quad (i=1,\cdots,k-1)$$

で与えられる.　□

また, 同時片側信頼区間の理論も同様に構築できた.

$\psi(x)$ として, $\psi(x)=\max(\min(x,1.579),-1.579)$ を採用し, 正規分布, 混合正規分布, ロジスティック分布, 両側指数分布, t 分布のときでのダネットに対する提案した手法の漸近相対効率の値を求めた. その結果, 正規分布のときは, 提案した手法がダネットの手法より 3% しか落ちないが, 正規分布以外の分布のときには, 提案した手法がダネットの手法より良いことが解った.

3　その他の考察

同時検定の漸近理論も構築し, 同時信頼区間のときと同様な棄却域を得た. 肉芽種病の事例を基に, 提案した手法を使って, 実際のデータ解析が行えることを示した. また, 提案した多重比較法が外れ値に関する頑健性をもつことを例証した.

最後に, 第 2 節の統計量の構成法と同じようには, すべての対比 (contrast) の多重比較法を構成できないので, 異なる構成法により, すべての対比 (contrast) の多重比較法の理論を構築した.

Information inequality bounds for the risk

大谷内奈穂 (筑波大・数理物質)
赤平　昌文 (筑波大・数理物質)

統計的推定論において, 通常は, 母集団分布の密度関数に滑らかさ等の正則条件を課して母数に関する推定を行うことが多い. このような正則な場合には, Cramér-Rao の不等式が成り立ち, 有効推定量であるための必要十分条件が得られ, この結は漸近有効性の概念につながっている. 一方, 非正則な場合, すなわち密度関数が必ずしも正則条件を満たさない場合には, 正則な場合のようにはいかない ([AT95]). 本論では, まず, 非正則分布族の典型的なものとして, 切断正規分布族において, 位置母数 θ の推定問題について情報不等式を用いて考察し, さらにより一般の非正則分布族の場合について拡張する. また, ある条件を満たす密度をもつ分布族における位置母数の Pitman 推定量の漸近展開を求める. さらに, 適当な情報量を用いて, 非正則な場合に適用可能な情報不等式の導出についても考察する.

1. 切断正規分布族における Bayes リスクの情報不等式

切断正規分布族における位置母数 θ の任意の推定量に対する Bayes リスクの情報不等式を構成し, さらに, Bayes 推定量とその下界の達成について論じる ([O02]). まず, $X_1, \cdots, X_n$ を互いに独立に確率密度関数 (p.d.f.) $p(x-\theta) = k_\lambda e^{-(x-\theta)^2/2}$ $(|x-\theta| < \lambda/2)$, ; $= 0$ (その他) をもつ切断正規分布に従う確率変数とする. ただし, $\lambda > 0$ は既知, $k_\lambda = 1/[2\sqrt{2\pi}\{\Phi(1/2) - (1/2)\}] \approx 1.0418$ とし, $-\infty < \theta < \infty$ とする. また, $K_\lambda := \lim_{x \to -1/2+0} p(x) = ke^{-\lambda^2/8}$ とする.

定理 1 2 乗損失と一様事前分布 $U(-\tau, \tau)$ に関して, θ の任意の推定量 $\hat{\theta}$ の Bayes リスク $r_\tau(\hat{\theta})$ に対する情報不等式

$$\varliminf_{\tau\to\infty}\varliminf_{n\to\infty} n\left\{n^2 r_\tau(\hat{\theta}) - \frac{1}{2K_\lambda^2}\right\} \geq -\frac{1}{6K_\lambda^4}(9K_\lambda^2 + K_\lambda + 5) =: B_2(K_\lambda)$$

が成り立つ. また, 2 乗損失と一様事前分布 $U(-\tau, \tau)$ に関する Bayes 推定量は漸近的下界 $B_2(K_\lambda)$ を達成する.

2. 一般の非正則分布族における Bayes リスクの情報不等式

第 1 節の結果をさらにより一般の非正則分布族の場合について拡張する ([AO02]). まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも (σ -有限測度 μ に関する) 密度 $p(x-\theta)$ をもつ分布に従う確率変数列とし, $\theta \in \mathbf{R}^1$ とする. ここで, $p(\cdot)$ に次の条件 (A1)〜(A3) を仮定する.

(A1) $p(x) > 0$ $(a < x < b)$; $p(x) = 0$ (その他) である. ただし, a, b は定数とする.

(A2) p は開区間 $(a,\ b)$ 上で 2 回連続微分可能であり, $\lim_{x\to a+0} p(x) = \lim_{x\to b-0} p(x) =: c > 0$, $\lim_{x\to b-0} p'(x) = -\lim_{x\to a+0} p'(x) =: h \leq 0$ である.

(A3) $0 < I := -\int_a^b \{d^2 \log p(x)/dx^2\} p(x) d\mu(x) < \infty$.

また, $I_0 := \int_a^b \{p'(x)\}^2/p(x)dx$ とすると, $I = I_0 - 2h$ となる. ここで, $I_0 > 0$ とする.

定理 2 条件 (A1)〜(A3) の下で, 2 乗損失と一様事前分布 $U(-\tau, \tau)$ に関して, θ の任意の推定量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$ の Bayes リスク $r_\tau(\hat{\theta})$ に対する情報不等式

$$\varliminf_{n\to\infty} n\left\{n^2 r_\tau(\hat{\theta}) - \frac{1}{2c^2}\right\} \geq -\frac{1}{2c^4}(3c^2 - 4h) - \frac{5I_0}{6c^4} =: B_2(c)$$

が成り立つ. また, 2 乗損失と一様事前分布 $U(-\tau, \tau)$ に関する Bayes 推定量は下界 $B_2(c)$ を達成する.

3. 非正則分布族における Pitman 推定量

非正則分布族の位置母数に対して, 一般 Bayes 推定量である Pitman 推定量の漸近展開とその漸近分散を求める ([AOT03]). まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも (σ -有限測度 μ に関する) 密度

$f(x-\theta)$ をもつ分布に従う確率変数列とし, $\theta \in \mathbf{R}^1$ とする. ここで, $f(\cdot)$ に次の条件 (A1), (A2) を仮定する.
(A1) $f(x) > 0$ $(a < x < b)$; $f(x) = 0$ (その他) で, $f(x)$ は区間 (a, b) 上で 2 回連続微分可能とする. ただし, a, b は $a < b$ である定数とする.
(A2) $A := \lim_{x \to a+0} f(x)$, $B := \lim_{x \to b-0} f(x)$ とする. ただし, $0 < A < \infty, 0 < B < \infty$, $A \neq B$ とする.

いま, $\underline{\theta} := \max_{1 \leq i \leq n} X_i - b$, $\bar{\theta} := \min_{1 \leq i \leq n} X_i - a$, $\hat{\theta} := (\bar{\theta} + \underline{\theta})/2$ とすると, θ の Pitman 推定量は $\hat{\theta}_{PT} := \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta / \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta$ となる. ここで, $S := n(\hat{\theta} - \theta)$, $T := n(\bar{\theta} - \underline{\theta})$ とする.

定理 3 条件 (A1), (A2) の下で, Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ の漸近展開は

$$n\left(\hat{\theta}_{PT} - \theta\right) = S + \frac{T\left\{e^{(A-B)T} + 1\right\}}{2\left\{e^{(A-B)T} - 1\right\}} - \frac{1}{A-B} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

で与えられ, その漸近分散は

$$V_\theta\left(n\left(\hat{\theta}_{PT} - \theta\right)\right) = \frac{1}{(A-B)^2} - \frac{AB}{A-B}\int_0^\infty \frac{t^2}{e^{At} - e^{Bt}} dt + o(1)$$

となる.

4. 非正則な場合に適用可能な Bayes リスクに対する Vincze 型情報不等式

母数空間内の任意の 2 点で不偏性をもつような推定量の分散の凸結合に対する情報不等式を構成する. 実は Vincze[V92] も同様の不等式を考えたが, その下界を達成する推定量は存在しなかった. そこで, [V92] とは異なる方法を用いて, その下界を達成する推定量を求めることができる ([AO03], [O04], [OA05]).

参考文献

[AO02] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2002). Information inequalities for the Bayes risk for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54** (4), 806–815.

[AO03] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2003). An information inequality for the Bayes risk applicable to non-regular cases. *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1334**, 183–191.

[AOT03] Akahira, M., Ohyauchi, N. and Takeuchi, K. (2003). On the Pitman estimator for a family of non-regular distributions. *Mathematical Research Note No.* 2003–008, Institute of Mathematics, University of Tsukuba. In revision in Metron.

[AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Lecture Notes in Statistics **107**, Springer, New York.

[O02] Ohyauchi, N. (2002). Comparison of the Bayes risks of estimators for a family of truncated normal distributions. *Commun. Statist. - Theory and Meth.*, **31**(5), 699–718.

[O04] Ohyauchi, N. (2004). The Vincze inequality for the Bayes risk. *J. Japan Statist. Soc.*, **34**(1), 65–74.

[OA05] 大谷内奈穂, 赤平昌文 (2005). Lower bounds for the Bayes risk of unbiased estimators in non-regular cases. 京都大学　数理解析研究所講究録 **1439**, 247–253.

[V92] Vincze, I. (1992). On nonparametric Cramér-Rao inequalities. In: *Order Statistics and Nonparametrics: Theory and Applications* (P. K. Sen and I. A. Salama, eds. Elsevier Science Publishers B. V.), 439–454.

Limit theorems for maximum of standardized U-statistics defined by weakly dependent sequences

創価大学・教　吉原健一、武蔵工業大学・工　金川秀也

Introduction and Results

Let $X_1, X_2, \cdots$ be i.i.d. random variables with common distribution function $F(x)$ defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Let $h(x,y)$ be a symmetric function and define

$$U^*_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} h(X_i, X_j) - k(n-k)\theta$$

where $\theta = Eh(X_1, X_2)$. Horváth and Shao (1996) considered the limit distribution for maximally selected standardized U-statistics in the degenerate case, that is, $E\tilde{h}^2(X_1) = 0$ where

$$\tilde{h}(x) = \int (h(x,y) - \theta) dF(y).$$

Then, there are orthogonal eigenfunctions $\{\varphi_j(x); 1 \leq j < \infty\}$ and eigenvalues $\{\lambda_j; 1 \leq j < \infty\}$ such that

$$\lim_{M\to\infty} \int\int \left(h(x,y) - \theta - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \varphi_j(x)\varphi_j(y)\right)^2 dF(x)dF(y) = 0 \tag{1}$$

and

$$E\varphi_j(X_1)\varphi_k(X_1) = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k). \end{cases} \tag{2}$$

It follows from (1) and (2) that

$$E(h(X_1, X_2) - \theta)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2.$$

Let $\{N_i; 1 \leq i < \infty\}$ be a sequence of independent, standard normal random variables and define $Z = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 N_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. The following theorem is due to Horváth and Shao (1996).

Theorem A. *We assume that*

$$E\tilde{h}^2(X_1) = 0 \quad \text{and} \quad 0 < \sigma_0^2 = E(h(X_1, X_2) - \theta)^2 < \infty.$$

Then, as $n \to \infty$

$$(2 \log\log n)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq k<n} \frac{|U^*_{k,n}|}{\sqrt{k(n-k)}} \xrightarrow{D} Z.$$

The object of this note is to consider the analogous theorem when the underlying sequence satisfies some absolutely regular condition. Let $\{\xi_i\}$ be a stationary process with distribution function F. We say that $\{\xi_i\}$ satisfies the absolutely regular condition if for $\mathcal{M}_a^b = \sigma(\xi_a, \cdots, \xi_b)$, $(a \le b)$

$$\beta(n) \;=\; E \sup_{A \in \mathcal{M}_n^\infty} |P(A|\mathcal{M}_{-\infty}^0) - P(A)| \;\to\; 0 \quad (n \to \infty).$$

We consider the following condition.

Conditions Let $\{\xi_i\}$ be a stationary, absolutely regular sequence of random variables with distribution function F.

(I) For some $\delta > 0$ there exists a positive constant K such that $\sum_{n=1}^\infty n\beta^{\frac{\delta}{4+\delta}}(n) \;<\; \infty$ and

$$\int\int |h(x,y)|^{4+\delta} dF(x)dF(y) \;\le\; K^{\frac{4+\delta}{4}}, \quad \sup_{i,j\ge 1} E|h(\xi_i, \xi_j)|^{4+\delta} \;\le\; K^{\frac{4+\delta}{4}}.$$

(II) $0 < \sigma^2 \;=\; \int\int (h(x,y) - \theta)^2 dF(x)dF(y) < \infty$.

Put $U_{k,n} \;=\; \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n h(\xi_i, \xi_j) - k(n-k)\theta$.

Theorem 1. *Suppose Condition (I) holds. Then*

$$\frac{1}{\sqrt{2\log\log n}} \max_{1\le k<n} \frac{|U_{k,n}|}{\sqrt{k(n-k)}} \;\xrightarrow{D}\; Z. \tag{3}$$

We can rewrite Theorem 1 as follows when Conditions (I) and (II) holds.

Theorem 2. *Suppose Condition A holds. Then*

$$\frac{1}{\sqrt{2\log\log n}} \max_{1\le k<n} \frac{|U_{k,n}|}{\sqrt{V(U_{k,n})}} \;\xrightarrow{D}\; \frac{Z}{\sigma}. \tag{4}$$

参考文献

[1] Horváth, L. and Shao, Q.-M. (1996) Limit theorem for maximum of standard U-statistics with an application, *Ann. Statist*, **24**, 2266-2279.

[2] Kanagawa, S. Takano, S. and Yoshihara, K. (1997) Convergence of changepoint estimators for weakly dependent data, *Nonparemtric Statistics*, **8**, 379-392.

[3] Yoshihara, K. (1976) Limiting behavior of U-statistics for stationary absolutely regular processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebite*, **35**, 237-252.

[4] Yoshihara, K. (1992) *Weakly dependent stochastic sequences and their applications, Vol. I. Summation theory for weakly dependent sequences,* Sanseido, Tokyo.

A convex combination of two-sample U-statistics

鹿児島高等予備校　戸田 光一郎
鹿児島大・理　大和 元

1. 序

次数 (k_1,k_2) の対称な kernel $h(x_1,...,x_{k_1};y_1,...,y_{k_2})$ をもつ estimable parameter $\theta=\theta(F,G)$ の推定量として, U-統計量の凸結合 Y_{n_1,n_2} を考える：$X_1,...,X_{n_1}$ を分布 F からの大きさ n_1 の標本, $Y_1,...,Y_{n_2}$ を分布 G からの大きさ n_2 の標本とする. $w(\alpha_1,...,\alpha_j;k)$ $(j=1,...,k)$ を $\alpha_1+\cdots+\alpha_j=k$ を満たす正の整数 $\alpha_1,...,\alpha_j$ について対称な非負の関数とし, $w(\alpha_1,...,\alpha_j;k)$ $(j=1,...,k)$ の少なくとも 1 つは正とする. $j_1=1,...,k_1$ と $j_2=1,...,k_2$ に対して, $h_{(j_1,j_2)}(x_1,...,x_{j_1};y_1,...,y_{j_2})$ を次で与えられる kernel とする；

$$\begin{aligned}
&h_{(j_1,j_2)}(x_1,...,x_{j_1};y_1,...,y_{j_2})\\
&=\frac{1}{d(k_1,j_1)d(k_2,j_2)}\sum\nolimits^{+}_{r_1+\cdots+r_{j_1}=k_1}\sum\nolimits^{+}_{s_1+\cdots+s_{j_2}=k_2} w(r_1,...,r_{j_1};k_1)w(s_1,...,s_{j_2};k_2)\\
&\qquad\times h(\underbrace{x_1,...,x_1}_{r_1},...,\underbrace{x_{j_1},...,x_{j_1}}_{r_{j_1}};\underbrace{y_1,...,y_1}_{s_1},...,\underbrace{y_{j_2},...,y_{j_2}}_{s_{j_2}}),
\end{aligned}$$

但し, 和 $\sum^{+}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_j=k}$ は $\alpha_1+\cdots+\alpha_j=k$ を満たす全ての正の整数 $\alpha_1,...,\alpha_j$ についてとられ, 更に $d(k,j)=\sum^{+}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_j=k}w(\alpha_1,...,\alpha_j;k)$. $j_1=1,...,k_1$ と $j_2=1,...,k_2$ に対して, $U^{(j_1,j_2)}_{n_1,n_2}$ を kernel $h_{(j_1,j_2)}$ に対応する U-統計量とする. $w(\alpha_1,...,\alpha_j;k)$ の対称性より, kernel $h_{(j_1,j_2)}(x_1,...,x_{j_1};y_1,...,y_{j_2})$ はそれぞれ $x_1,...,x_{j_1}$ と $y_1,...,y_{j_2}$ に関して対称である. ある j_1 または j_2 に対して $d(k_1,j_1)=0$ または $d(k_2,j_2)=0$ のときには, 対応する $U^{(j_1,j_2)}_{n_1,n_2}$ は 0 とする. このとき, θ の推定量として, 次で与えられる U-統計量の凸結合 Y_{n_1,n_2} を導入する；

$$Y_{n_1,n_2}=\frac{1}{D(n_1,k_1)D(n_2,k_2)}\sum_{j_1=1}^{k_1}\sum_{j_2=1}^{k_2}d(k_1,j_1)d(k_2,j_2)\binom{n_1}{j_1}\binom{n_2}{j_2}U^{(j_1,j_2)}_{n_1,n_2},$$

但し, $D(n,k)=\sum_{j=1}^{k}d(k,j)\binom{n}{j}$.

2. U-統計量の凸結合への近似と展開

$N=n_1+n_2$ とおき, $N\to\infty$ のとき条件

$$\frac{n_1}{N}\to p,\quad \frac{n_2}{N}\to 1-p\quad (0<p<1)$$

が成り立つとする. kernel h に対して,

$$\begin{aligned}
\theta^{(k_1-1,k_2)}&=E\big[h(X_1,X_1,X_2,X_3,...,X_{k_1-1};Y_1,Y_2,...,Y_{k_2})\big],\\
\theta^{(k_1,k_2-1)}&=E\big[h(X_1,X_2,...,X_{k_1};Y_1,Y_1,Y_2,Y_3,...,Y_{k_2-1})\big],
\end{aligned}$$

$$\psi_{1,0}(x_1)=E\big[h(x_1,X_2,...,X_{k_1};Y_1,...,Y_{k_2})\big],\quad \psi_{0,1}(y_1)=E\big[h(X_1,...,X_{k_1};y_1,Y_2,...,Y_{k_2})\big],$$

$$\begin{aligned}
\psi_{2,0}(x_1,x_2)&=E\big[h(x_1,x_2,X_3,...,X_{k_1};Y_1,...,Y_{k_2})\big],\\
\psi_{0,2}(y_1,y_2)&=E\big[h(X_1,...,X_{k_1};y_1,y_2,Y_3,...,Y_{k_2})\big],\\
\psi_{1,1}(x_1;y_1)&=E\big[h(x_1,X_2,...,X_{k_1};y_1,Y_2,...,Y_{k_2})\big]
\end{aligned}$$

とおき, 更に

$$\begin{aligned}
&h^{(1,0)}(x_1)=\psi_{1,0}(x_1)-\theta,\quad h^{(0,1)}(y_1)=\psi_{0,1}(y_1)-\theta,\\
&h^{(2,0)}(x_1,x_2)=\psi_{2,0}(x_1,x_2)-\psi_{1,0}(x_1)-\psi_{1,0}(x_2)+\theta,\\
&h^{(0,2)}(y_1,y_2)=\psi_{2,0}(x_1,x_2)-\psi_{0,1}(y_1)-\psi_{0,1}(y_2)+\theta,\\
&h^{(1,1)}(x_1;y_1)=\psi_{1,1}(x_1;y_1)-\psi_{1,0}(x_1)-\psi_{0,1}(y_1)+\theta,\\
&\delta^2_{1,0}=Var\big[h^{(1,0)}(X_1)\big],\quad \delta^2_{0,1}=Var\big[h^{(0,1)}(Y_1)\big].
\end{aligned}$$

$d(k,k) = w(1,...,1;k) > 0$ のとき, 定数 $\delta_k = kd(k,k-1)/d(k,k)$ を用いて

$$\frac{d(k,k)}{D(n,k)}\binom{n}{k} = 1 - \frac{\delta_k}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad \frac{d(k,k-1)}{D(n,k)}\binom{n}{k-1} = \frac{\delta_k}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$
$$\frac{d(k,j)}{D(n,k)}\binom{n}{j} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \quad (j = 1,...,k-2)$$

と表すことができる. $r_1 + \cdots + r_{j_1} = k_1$ $(j_1 = 1,...,k_1)$ および $s_1 + \cdots + s_{j_2} = k_2$ $(j_2 = 1,...,k_2)$ を満たす正の整数 $r_1,...,r_{j_1}$ と $s_1,...,s_{j_2}$ に対して, 条件

$$E\{h(\underbrace{X_1,...,X_1}_{r_1},...,\underbrace{X_{j_1},...,X_{j_1}}_{r_{j_1}};\underbrace{Y_1,...,Y_1}_{s_1},...,\underbrace{Y_{j_2},...,Y_{j_2}}_{s_{j_2}})\}^2 < \infty \tag{1}$$

が成り立つとする.

Theorem 1 $w(1,...,1;k) > 0$ とする. このとき,

$$Y_{n_1,n_2} - \theta = U_{n_1,n_2} - \theta + \frac{1}{N}b^{(0)} + R_{n_1,n_2},$$

但し, $E[\,|R_{n_1,n_2}|^2] = o(N^{-2})$ であり,

$$b^{(0)} = \frac{\delta_{k_1}}{p}(\theta^{(k_1-1,k_2)} - \theta) + \frac{\delta_{k_2}}{1-p}(\theta^{(k_1,k_2-1)} - \theta).$$

2標本 U-統計量に対する Koroljuk and Borovskich (1994) の結果を用い, それに基づく近似を行うことにより次の展開が得られる. $\Phi(x)$, $\phi(x)$ はそれぞれ標準正規分布の分布関数, 密度関数とする.

Theorem 2 $w(1,...,1;k) > 0$ とし, 条件 (1) 及び

$$\lim_{|t|\to\infty}\sup\big|\varphi_j(t)\big| < 1 \quad (j = 1,2), \qquad E\big|h(X_1,\ldots,X_{k_1};Y_1,\ldots,Y_{k_2})\big|^3 < \infty$$

が成り立つとする. このとき,

$$\sup_x\Big|P\Big(\sigma_N^{*-1}(Y_{n_1,n_2} - \theta) \le x\Big) - Q^*(x)\Big| = o(N^{-1/2}),$$

但し,

$$\sigma_N^{*2} = \frac{k_1^2}{n_1}\delta_{1,0}^2 + \frac{k_2^2}{n_2}\delta_{0,1}^2, \quad \sigma^2 = \frac{k_1^2}{p}\delta_{1,0}^2 + \frac{k_2^2}{1-p}\delta_{0,1}^2,$$
$$\eta_{2,N} = \tfrac{1}{\sigma_N^{*3}}\Big\{\tfrac{k_1^3}{n_1^2}E[h^{(1,0)}(X_1)]^3 + \tfrac{k_2^3}{n_2^2}E[h^{(0,1)}(Y_1)]^3 + \tfrac{6k_1^2k_2^2}{n_1n_2}E[h^{(1,0)}(X_1)h^{(0,1)}(Y_1)h^{(1,1)}(X_1;Y_1)]$$
$$+\tfrac{3k_1^3(k_1-1)}{n_1^2}E[h^{(1,0)}(X_1)h^{(1,0)}(X_2)h^{(2,0)}(X_1,X_2)] + \tfrac{3k_2^3(k_2-1)}{n_2^2}E[h^{(0,1)}(Y_1)h^{(0,1)}(Y_2)h^{(0,2)}(Y_1,Y_2)]\Big\},$$
$$Q^*(x) = \Phi(x) - \frac{b^{(0)}}{2\sqrt{N}\sigma}\phi(x) + \eta_{2,N}(1-x^2)\phi(x) + \frac{b^{(0)}}{\sqrt{N}\sigma}x(1-x^2)\phi(x).$$

Corollary 3 2標本 U-統計量 U_{n_1,n_2} と2標本 Y-統計量 Y_{n_1,n_2} のエッジワース展開の差は

$$\frac{b^{(0)}}{\sqrt{N}\sigma}\Big[-\frac{1}{2}\phi(x) + x(1-x^2)\phi(x)\Big].$$

参考文献

[1] Koroljuk and Borovskich (1994). *Theory of U-statistics.*
[2] Toda, K. and Yamato, H. (2005), (to appear).

Jackknifing a convex combination of one-sample U-statistics

鹿児島大・理　大和 元
鹿児島高等予備校　戸田 光一郎
都城高専　野町 俊文

1. 序

次数 k の対称な kernel $h(x_1, ..., x_k)$ をもつ estimable parameter $\theta = \theta(F)$ の推定量として, U-統計量の凸結合 Y_n (Toda and Yamato (2001)) を考える：$X_1, ..., X_n$ を分布 F からの大きさ n の標本とする. $j = 1, ..., k$ に対して, $w(r_1, ..., r_j; k)$ を $r_1 + \cdots + r_j = k$ を満たす正の整数 $r_1, ..., r_j$ について対称な非負の関数とし, $w(r_1, ..., r_j; k)$ の少なくとも 1 つは正であるとする. $j = 1, ..., k$ に対して, $h_{(j)}(x_1, ..., x_j)$ を次で与えられる kernel とする；

$$h_{(j)}(x_1, ..., x_j) = \frac{1}{d(k,j)} {\sum}^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k} w(r_1, ..., r_j; k) h(\underbrace{x_1, ..., x_1}_{r_1}, ..., \underbrace{x_j, ..., x_j}_{r_j}),$$

但し, 和 ${\sum}^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k}$ は $r_1 + \cdots + r_j = k$ を満たす全ての正の整数 $r_1, ..., r_j$ についてとられ, 更に $d(k,j) = {\sum}^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k} w(r_1, ..., r_j; k)$. $j = 1, ..., k$ に対して, $U_n^{(j)}$ を kernel $h_{(j)}(x_1, ..., x_j)$ に対応する U-統計量とする. ある j に対して, $d(k,j) = 0$ となるときには, 対応する $U_n^{(j)}$ は 0 とする. このとき, U-統計量の凸結合 Y_n は次で与えられる；

$$Y_n = \frac{1}{D(n,k)} \sum_{j=1}^{k} d(k,j) \binom{n}{j} U_n^{(j)},$$

但し, $D(n,k) = \sum_{j=1}^{k} d(k,j)\binom{n}{j}$.

2. ジャックナイフ Y-統計量

U-統計量の凸結合 Y_n に対して, X_i を除いた大きさ $n-1$ の標本に基づく統計量 Y_{n-1} を $Y_{n-1}(-i)$ $(i = 1, ..., n)$ とし, $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{n-1}(-i)$ とおく. 同様に, X_i を除いた大きさ $n-1$ の標本に基づく U-統計量 $U_{n-1}^{(j)}$ を $U_{n-1}^{(j)}(-i)$ $(i = 1, ..., n)$ とおくと,

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{D(n-1,k)} \sum_{j=1}^{k} d(k,j) \binom{n-1}{j} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_{n-1}^{(j)}(-i) = \frac{1}{D(n-1,k)} \sum_{j=1}^{k} d(k,j) \binom{n-1}{j} U_n^{(j)}.$$

このとき, Y_n に基づく $\theta(F)$ のバイアス修正ジャックナイフ統計量 Y_n^J は次で与えられる；

$$Y_n^J = nY_n - (n-1)\bar{Y}_n = \sum_{j=1}^{k} d^J(n,k;j) U_n^{(j)},$$

但し, $d^J(n,k;j) = \left\{\frac{n}{D(n,k)}\binom{n}{j} - \frac{n-1}{D(n-1,k)}\binom{n-1}{j}\right\} d(k,j)$ であり, $\sum_{j=1}^{k} d^J(n,k;j) = 1$. 特に $k = 2$ のとき, V-統計量 V_n に対して $d^J(n,2;1) = 0$, $d^J(n,2;2) = 1$ であるので, V_n に基づくバイアス修正ジャックナイフ統計量 V_n^J は U-統計量 U_n と等しい.

$d(k,k) > 0$ のとき, 係数 β_* を用いて

$$\frac{d(k,k)}{D(n,k)}\binom{n}{k} = 1 - \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_{21}}{n^2} + \frac{\beta_{31}}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \quad \frac{d(k,k-1)}{D(n,k)}\binom{n}{k-1} = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_{22}}{n^2} + \frac{\beta_{32}}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big),$$
$$\frac{d(k,k-2)}{D(n,k)}\binom{n}{k-2} = \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_{33}}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \quad \frac{d(k,k-3)}{D(n,k)}\binom{n}{k-3} = \frac{\beta_3}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$

と表すことができる (係数 β_* については Yamato et al. (2005) を参照されたい).

$1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq k$ に対して, 条件 $E\{h(X_{j_1},...,X_{j_k})\}^2 < \infty$ が成り立つとする.

命題 1 $d(k,k) > 0$ とする. このとき, 十分大きな n に対して

$$Y_n^J - \theta = \left\{1 - \frac{\beta_{21}}{n^2} - \frac{\beta_{21} + 2\beta_{31}}{n^3}\right\}[U_n - \theta] - \left\{\frac{\beta_{22}}{n^2} + \frac{\beta_{22} + 2\beta_{32}}{n^3}\right\}[U_n^{(k-1)} - \theta]$$
$$- \left\{\frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_2 + 2\beta_{33}}{n^3}\right\}[U_n^{(k-2)} - \theta] - \frac{2\beta_3}{n^3}[U_n^{(k-3)} - \theta] + R_n,$$

但し, $E|R_n| = O(n^{-4})$.

kernel $h_{(j)}(x_1,...,x_j)$ $(j = 1,...,k)$ に対して,

$$\theta_j = E\left[h_{(j)}(X_1,\ldots,X_j)\right],$$
$$\psi_{(j),c}(x_1,...,x_c) = E\left[h_{(j)}(X_1,...,X_j) \mid X_1 = x_1,...,X_c = x_c\right] \quad (c = 1,...,j)$$

とおき, $j = 1,...,k$ と $c = 2,3,...,k$ に対して, 次のようにおく;

$$h_{(j)}^{(1)}(x_1) = \psi_{(j),1}(x_1) - \theta_j,$$
$$h_{(j)}^{(c)}(x_1,...,x_c) = \psi_{(j),c}(x_1,...,x_c) - \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{1 \leq l_1 < \cdots < l_i \leq c} h_{(j)}^{(i)}(x_{l_1},...,x_{l_i}) - \theta_j.$$

更に, $\sigma_c = Var[\psi_{(k),c}(X_1,...,X_c)]$ $(c = 1,2,3)$, $\zeta_{k-j}^{(1)} = Cov\left[h_{(k)}^{(1)}(X_1), h_{(k-j)}^{(1)}(X_1)\right]$ $(j = 1,2)$.

命題 2 $d(k,k) > 0$ とする. このとき,

$$MSE(Y_n^J) = \frac{1}{n}k^2\sigma_1^2 - \frac{k^2(k-1)^2}{2n^2}\left\{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{n^3}\left\{\left(\frac{(k-1)^2(k^2-4k+2)}{2} - 2\beta_{21}\right)k^2\sigma_1^2 - \frac{k^2(k-1)^3(k-3)}{2}\sigma_2^2\right.$$
$$\left. + \frac{k^2(k-1)^2(k-2)^2}{6}\sigma_3^2 - 2k(k-1)\beta_{22}\zeta_{k-1}^{(1)} - 2k(k-2)\beta_2\zeta_{k-2}^{(1)}\right\} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$c = k$, $i = 1,2,3$ 及び $c = k-1$, $i = 1$ に対して $\delta_{c,(i)}^2 = Var[h_{(c)}^{(i)}(X_1,\ldots,X_i)]$ とおく. このとき, $\sigma_1^2 = \delta_{k,(1)}^2$, $\sigma_2^2 = 2\delta_{k,(1)}^2 + \delta_{k,(2)}^2$, $\sigma_3^2 = 3\delta_{k,(1)}^2 + 3\delta_{k,(2)}^2 + \delta_{k,(3)}^2$ が成り立つ.

系 3

$$\begin{aligned} MSE(Y_n^J) &= \frac{1}{n}k^2\sigma_1^2 - \frac{k^2(k-1)^2}{2n^2}\left\{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right\} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n}k^2\delta_{k,(1)}^2 + \frac{k^2(k-1)^2}{2n^2}\delta_{k,(2)}^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

$d(k,k) > 0$ のとき, Y_n^J はそれぞれの関数 w に対して n^{-2} の項まで同じ MSE を持つ. さらに, その MSE は n^{-2} の項まで U-統計量 U_n の分散と等しい (Nomachi and Yamato (2001) を参照).

命題 4 $d(k,k) > 0$ とする. このとき,

$$MSE(Y_n^J) = Var(U_n) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

参考文献

[1] Nomachi, T. and Yamato, H. (2001), *J. Japan Statist. Soc.* **31**, No. 1, 85–98.
[2] Toda, K. and Yamato, H. (2001), *J. Japan Statist. Soc.*, **31**, No. 2, 225–237.
[3] Yamato, H., Toda, K. and Nomachi, T. (2005), (submitted).

Empirical Likelihood Approach for Non Gaussian Stationary Processes

HIROAKI OGATA AND MASANOBU TANIGUCHI

WASEDA UNIVERSITY

ABSTRACT. For a class of non Gaussian stationary processes, we develop the empirical likelihood approach. For this it is known that Whittle's likelihood is one of the most fundamental tools to get a good estimator of unknown parameter, and that the score functions are asymptotically chi-square distributed. Motivated by the Whittle likelihood, we apply the empirical likelihood approach to its derivative. This paper provides a rigorous proof on convergence of our empirical likelihood to a sum of Gamma distributions. Numerical studies are given, and illuminate some interesting features of the empirical approach.

1 Introduction.

Empirical likelihood method is used when the distribution of an appropriate pivotal quantity is unknown. It is shown that empirical likelihood ratio is asymptotically chi-square distributed (e.g. Owen (2001)). However, most of studies on this topic are aimed to independent data.

For dependent sample, Monti (1997) applied the empirical likelihood approach to the derivative of the Whittle likelihood, and showed that the empirical likelihood ratio is asymptotically χ^2-distributed. The results were applied to the problem of testing and construction of a confidence region.

Although Monti's results are innovative in time series analysis, the theoretical proofs of the asymptotic results essentially rely on the circular Gaussian assumption for the concerned process like as Anderson (1977). Therefore this paper provides a rigorous proof for asymptotics of the empirical Whittle likelihood using the non Gaussian and dependent structure essentially, for vector-valued linear process.

REFERENCES

[1] ANDERSON, T. W. (1977). Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains. *Ann. Statist.* **5**, 842-865.

[2] BRILLINGER, D. R. (1981). *Time Series: Data Analysis and Theory, expanded ed.* Holden-Day, San Francisco.

[3] KEENAN, D. M. (1987). Limiting Behavior of Functionals of Higher-Order Sample Cumulant Spectra. *Ann. Statist.* **15**, 134-151.

[4] HOSOYA, Y. AND TANIGUCHI, M. (1982). A central limit theorem for stationary processes and the parameter estimation of linear processes. *Ann. Statist.* **10**, 132-153. Correction: (1993) **21** 1115-1117.

[5] MONTI, A. C. (1997). Empirical likelihood confidence regions in time series models. *Biometrika.* **84**, 395-405.

[6] OWEN, A. B. (2001). *Empirical Likelihood.* Chapman-Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washinton,D.C.

[7] TANIGUCHI, M. (1982). On Estimation of the Integrals of the Fourth Order Cumulant Spectral Density. *Biometrika.* **69**, 117-122