

(18)「実験計画法およびその周辺領域における組合せ構造の解明とその応用」
に関する研究報告

| | |
|--|-----|
| 金子美博, 佐々木裕哉 (岐阜大学・工): 有向グラフでの betweenness centers について | 771 |
| 三嶋美和子 (岐阜大・総合情報メディアセンター): Conflict-Avoiding Codes of Length $n = 4m$ for Three Active Users | 773 |
| 足立智子 (東邦大学理学部): 完全三部グラフの cluttered ordering | 775 |
| 山中 望, 栗木進二 (大阪府立大・工): 2つのコントロールをもつ効率的 な treatment-control designs | 777 |
| 逸見亮太, 栗木進二 (大阪府立大・工): コントロールをもつ incomplete split- block designs | 779 |
| 景山三平 (広島大学): On non-existence of affine resolvable triangular designs | 781 |
| 藤原祐一郎 (名古屋大学大学院情報科学研究科): Isomorphism Halving of 2- designs | 783 |
| 新谷 誠 (静岡大学情報学部): D-optimal design と supplementary difference set | 785 |
| 田澤新成, 大野泰生, 浅井恒信 (近畿大学・理工): 標識自己補グラフの数 え上げについて | 787 |
| 中村恵美子 (パナソニックCCソフト), 玉利文和, 王 強 (福岡教育大学): 最適完全複合木構成問題について | 789 |
| 潮 和彦 (近畿大・理工): Balanced C_5 -Bowtie Designs | 791 |
| 松田浩孝 (慶応義塾大学・理工): k -flow の分解性について | 793 |
| 宮本暢子 (東京理科大学理工学部), 篠原 聡 (明星大学情報学部): New series of mutually M -intersecting k -arcs | 795 |
| 澤 正憲 (名古屋大学情報科学研究科), 藤井隼人 (広島大学工学部): グラ フのアドレス付けとその応用 | 797 |
| 岡本けい (大阪府立大学・理学系研究科): 3元線形符号の拡張性に関連す る幾何学的構造 | 799 |
| 原田昌晃 (山形大学・理): Ternary Extremal Self-Dual Codes | 801 |
| 丹羽時彦 (関西学院高等部), 白旗慎吾 (大阪大学基礎工学部), 猪川徳信, 田中一義, 中垣智宏 (日立システムアンドサービス): グリッドコン ピューティングを用いた BIBD の 1つの探索法について | 803 |
| 膝 君鵬 (神戸大学総合人間), 末次武明 (神戸市立工業高専), 白倉暉弘 (神戸大学発達科学部): MEP.1 計画の構成と比較 | 805 |
| 陸 淑杰 (広島大・工学研), 谷口英司 (岡山理大・総合情報研), 栗田正秀 (広島大・総合科), 兵頭義史 (岡山理大・総合情報研, 国際自然研): | |

| | |
|---|-----|
| GA-optimal partially balanced fractional $2^{m_1+m_2}$ factorial designs of resolution | |
| $R(\{00, 10, 01\} \mid \Omega)$ with $2 \leq m_1, m_2 \leq 4$ | 807 |
| 橋口博樹 (埼玉大学・工) : 過飽和での追加実験の最適計画 | 809 |
| 舩原幸二 (名古屋大学・情報科学研究科) : 強さ d , 制約数 $d+1$, 3-水準 の直交配列の同型分類 | 811 |
| 清水貴宏 (松下電器産業株式会社半導体社), 稲葉太一 (神戸大学発達科学 部) : 実務未経験者に対するQCシミュレーション教育効果についての 考察ー品質工学 望目特性実験シミュレーションの教育効果ー | 813 |
| 上原啓明 (慶応義塾大学・理工) : CCCPを用いたDNA library screeningのた めの positive detecting algorithm | 815 |

有向グラフでの betweenness centers について

岐阜大学・工 金子美博 佐々木裕哉

1. はじめに

グラフ上のある頂点の **betweenness** とは、他の 2 頂点間の最短路に、その頂点がどの程度関わっているかを表す尺度の 1 つであり、主として社会ネットワークの分野で研究されている。[1] Floyd 法など、よく知られている最短路アルゴリズムを利用すれば、一般的に、頂点数 n のグラフに対して、 $O(n^3)$ の手間で **betweenness centers** が求められる。一方、グラフを限定すれば、より高速に **betweenness centers** が求められる。具体的には、木やその一般形である **cactus** グラフに対して、 $O(n)$ で **betweenness center** が求められることが知られている。[2]

本稿では、有向グラフを対象とした **betweenness** について、最近までわかったことを報告する。

2. betweenness centers

無向グラフ UG に対して、全ての無向辺へ方向付けを行い、有向グラフ DG に変換したとき、 UG を DG の台グラフという。

有向パス上の枝の向きがそのパスの向きと同じであるとき、その枝はパスに正の向きに含まれるといい、そうでないとき、負の向きに含まれるという。全ての枝の向きが正であるようなパスを、有向パスといい、向きに対する条件のないパスを、セミパスという。有向パス上の枝の本数をそのパスの長さという。 G 上の任意の 2 頂点 x, y に対して、長さが最小である x から y への有向パスを $x \rightarrow y$ 最短路という。 $x \rightarrow y$ 最短路の長さを、 x から y への距離と呼び、 $d(x, y)$ で表す。 x から y へ有向パスが存在しないならば、 $d(x, y) = \infty$ とする。 G 上のある 2 頂点 u, v に対して、 G が $u \rightarrow v$ セミパスを含むならば、 G は弱連結であるといい、 G が $u \rightarrow v$ 有向パスも $v \rightarrow u$ 有向パスも含むならば、 G は強連結であるという。

グラフ G 上の有向パスで始点と終点が同一の頂点であるとき、このパスを閉路または、サイクルという。 G がサイクルを含まないとき、 G はアサイクリックであるという。以下、本稿では、有向グラフを扱う。

[定義 1] グラフ G において、頂点 v に対して、次のような頂点对の集合を定義する。

$$B(v) = \{ (x, y) \mid d(x, y) = d(x, v) + d(v, y) < \infty, v \neq x, y \}$$

このような頂点对集合の要素数を b 値と呼ぶ。すなわち、 $b(v) = |B(v)|$ である。□

対象とするグラフは有向であるため、 $(x, y) \in B(v)$ であっても $(y, x) \in B(v)$ とは限らないことに注意。

[定義 2] グラフ G において、 b 値が最大である頂点を **betweenness center** と呼ぶ。□

本研究では、与えられたグラフの **betweenness center** に該当する頂点を全て(**centers**) 効率よく求めることを目標としている。既に、無向グラフとのアナロジーから、**branching** など、台グラフが木であるような有向グラフに対しては、 $O(n)$ でそれが可能であることがわかった。

3. トーナメント

トーナメントとは、台グラフが、完全グラフである有向グラフであり、次の性質を持つことが知られている。

[補題1] あるトーナメント T が推移的であるための必要十分条件は、 T がアサイクリックであることである。ここで、推移的とは、トーナメント T において、2本の枝 (u,v) および (v,w) が存在するならば、枝 (u,w) も必ず存在する、という性質である。□

betweenness に関しては、無向グラフの場合、完全グラフであるとき、かつ、そのときに限り、全ての頂点の b 値が0となることが知られている。[2]

有向グラフの場合、トーナメントであることは全ての頂点の b 値が0となるための必要条件でも十分条件でもない。有向グラフの場合、 b 値が正となることに関して次の補題が成り立つことが証明できた。

[補題2] グラフ G において、正の b 値を持つ頂点が存在するための必要十分条件は、 $1 < d(u,v) < \infty$ を満たすような2頂点 u,v が G 上に存在することである。□

この補題より、トーナメント以外にも、台グラフが木であるようなグラフでも、全ての頂点の b 値が0となるものが存在することが容易に確かめられる。また、この補題より次の命題も導けた。

[命題1] トーナメント T において、全ての頂点の b 値が0となるための必要十分条件は、 T が推移的であることである。□

あるトーナメントにおいて、各強連結成分を1個の頂点に縮約すれば、推移的な別のトーナメントが得られる。命題1より、トーナメント上の異なる強連結成分間の頂点对は b 値の計算には関与しないことが導ける。

4. おわりに

今後は、命題1を利用してトーナメントに対する **betweenness** の性質の考察をさらに進める。具体的には、トーナメントを強連結成分に分割することにより、各強連結成分内部で効率よく b 値を計算する方法を見つけるか、あるいは、正確な b 値の計算はせずに、連結成分の個数や構造などの情報から、**betweenness center** を効率よく特定できるかどうか考察する必要がある。

参考文献

- [1] L.C.Freeman, "A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness", *Sociometry*, 40, 35–41 (1977).
- [2] Farley, "Betweenness Centers on Extended Cacti", *Congressus Numerantium* 167, 77-86 (2004).

Conflict-Avoiding Codes of Length $n = 4m$ for Three Active Users

岐阜大・総合情報メディアセンター 三嶋 美和子

1. Introduction

A *conflict-avoiding code* of length n for k active users is a set $C \subseteq \{0, 1\}^n$ of binary vectors, called *codewords*, all of Hamming weight k , such that the Hamming distance between arbitrary cyclic shifts of distinct codewords is at least $2k - 2$. The support $\text{supp}(x)$ of a codeword x is the set of indices of its nonzero positions. The coordinate positions are indexed by the numbers $0, 1, \dots, n - 1$. A conflict-avoiding code for three active users is said to be *centered* if the supports of all codewords are of the form $\{0, i, 2i\}$, $1 \leq i < n/2$.

Let $M_c(n)$ be the maximum size of a centered conflict-avoiding code of length n for three active users and $M(n)$ be the maximum size of a conflict-avoiding code of length n for three active users. A conflict-avoiding code of size $M(n)$ is said to be *optimal*. It was proved by Levenshtein and Tonchev [1] that $M(n) = M_c(n)$ if $n \equiv 2 \pmod{4}$, and $M(n) \simeq M_c(n)$ if n is odd.

2. Upper bounds on $M(n)$ and $M_c(n)$ when $n = 4m$

Given a number i , we denote $x(i)$ as a centered codeword in C with support $\{0, i, 2i\}$, $1 \leq i < n/2$.

Lemma 2.1 *A conflict-avoiding code C of length $n = 4m$ can contain at most one centered codeword among $x(i)$, $x(2i)$ and $x(n/2 - i)$ for each odd integer i in the interval $1 \leq i \leq n/4$.*

Theorem 2.2 *Let $n = 4m$ for a positive integer m . Then*

$$M_c(n) = \begin{cases} n/8 + M_c(m) & \text{if } m \text{ is even,} \\ (n+4)/8 + M_c(m) & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases}$$

Applying Theorem 2.2 recursively with the results due to Levenshtein and Tonchev [1], we have the following.

Corollary 2.3 *Let $n = 4^k m$ for positive integers k and m . Then*

$$M_c(n) = \frac{n-m}{6} + M_c(m) + \delta$$

holds, where $\delta = 0$ if $m \equiv 2 \pmod{4}$, and $\delta = 1/2$ if m is odd.

Consider a partition of positive integers not exceeding $n/2$: $O = \{i \mid i \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq i < n/2\}$, $E = \{i \mid i \equiv 2 \pmod{4}, 1 < i \leq n/2\}$ and $D = \{i \mid i \equiv 0 \pmod{4}, 1 < i \leq n/2\}$.

Lemma 2.4 *Any centered codeword $x \in C$ such that the set of differences not exceeding $n/2$ is $\{i, j\}$, where $j = 2i$, if $1 \leq i \leq n/4$, and $j = n - 2i$ if $n/4 < i < n/2$, is one of the three types: (i) $i \in O$ and $j \in E$, (ii) $i \in E$ and $j \in D$, and (iii) $i, j \in D$.*

Lemma 2.5 *Any non-centered codeword $x \in C$ such that the set of differences not exceeding $n/2$ is $\{i, j, k\}$ is one of the four types: (iv) two of i, j and k are in O and one is in E , (v) two of i, j and k are in O and one is in D , (vi) two of i, j and k are in E and one is in D , and (vii) $i, j, k \in D$.*

Now, let

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } x(n/3) \notin C, \\ 1 & \text{if } x(n/3) \in C, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 0 & \text{if } x(n/4) \notin C, \\ 1 & \text{if } x(n/4) \in C, \end{cases}$$

and $C^- = C \setminus \{x(n/3), x(n/4)\}$. Partition C^- into the sets C_o , C_e and C_d of centered codewords of types (i), (ii) and (iii) categorized in Lemma 2.4, and the sets N_{oe} , N_{od} , N_e and N_d of non-centered codewords of types (iv), (v), (vi) and (vii) categorized in Lemma 2.5, respectively. Then,

$$|C| = \alpha + \beta + |C_o| + |C_e| + |C_d| + |N_{oe}| + |N_{od}| + |N_e| + |N_d|. \quad (2.1)$$

An upper bound of $M(n) = M(4m)$ can be obtained by maximizing (2.1) subject to

$$\begin{aligned} k_1\beta + |C_o| + 2|N_{oe}| + 2|N_{od}| &\leq n/4, \\ k_2\beta + |C_o| + |C_e| + |N_{oe}| + 2|N_e| &\leq \lceil n/8 \rceil, \\ k_3\alpha + k_4\beta + |C_e| + 2|C_d| + |N_{od}| + |N_e| + 3|N_d| &\leq \lfloor n/8 \rfloor, \\ |C_o| &\leq \lfloor n/8 \rfloor, \quad \alpha \leq 1, \quad \beta \leq 1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

where

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) = \begin{cases} (0, 0, 1, 2) & \text{if } m \equiv 0 \pmod{12}, \\ (0, 1, 1, 1) & \text{if } m \equiv 6 \pmod{12}, \\ (0, 1, 0, 1) & \text{if } m \equiv 2, 10 \pmod{12}, \\ (0, 0, 0, 2) & \text{if } m \equiv 4, 8 \pmod{12}, \\ (1, 1, 0, 0) & \text{if } m \equiv 1, 5 \pmod{6}, \\ (1, 1, 1, 0) & \text{if } m \equiv 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Theorem 2.6 *Let $n = 4m$. Then*

$$M(n) \leq \begin{cases} 7n/32 & \text{if } m \equiv 0 \pmod{8}, \\ (7n+4)/32 & \text{if } m \equiv 1 \pmod{8}, \\ (7n-24)/32 & \text{if } m \equiv 2 \pmod{8}, \\ (7n-20)/32 & \text{if } m \equiv 3 \pmod{8}, \\ (7n-16)/32 & \text{if } m \equiv 4, 20 \pmod{24}, \\ (7n-12)/32 & \text{if } m \equiv 5, 13 \pmod{24}, \\ (7n-8)/32 & \text{if } m \equiv 6 \pmod{24}, \\ (7n-36)/32 & \text{if } m \equiv 7, 23 \pmod{24}, \\ (7n+16)/32 & \text{if } m \equiv 12 \pmod{24}, \\ (7n-40)/32 & \text{if } m \equiv 14, 22 \pmod{24}, \\ (7n-4)/32 & \text{if } m \equiv 15 \pmod{24}, \\ (7n+20)/32 & \text{if } m \equiv 21 \pmod{24}. \end{cases}$$

An upper bound on $M_c(n)$ can be also obtained by solving the linear programming problem: maximize (2.1) subject to (2.2) with the further condition $|N_{oe}| = |N_{od}| = |N_e| = |N_d| = 0$.

3. Optimal conflict-avoiding codes of length $n = 4m$ in the case of $m \equiv 2 \pmod{4}$

We proved the following theorem by constructing optimal conflict-avoiding codes directly.

Theorem 3.1 *For $m \equiv 2 \pmod{4}$, there exists a conflict-avoiding code of length $n = 4m$ which attains the upper bound of Theorem 2.6. To be exact,*

$$M(n) = \begin{cases} (7n-24)/32, & \text{if } m \equiv 2 \pmod{8}, \\ (7n-8)/32, & \text{if } m \equiv 6 \pmod{24}, \\ (7n-40)/32, & \text{if } m \equiv 14, 22 \pmod{24}. \end{cases}$$

Reference

- [1] V.I. Levenshtein and V.D. Tonchev, Optimal conflict-avoiding codes for three active users, IEEE International Symposium on Information Theory, Adelaide, Australia, September 2005.

完全三部グラフの cluttered ordering

東邦大学 理学部 情報科学科

足立 智子

1. はじめに

RAID とはハードディスクドライブの処理速度と安全性を高める技術である。この技術は、ネットワーク構築やサーバなど、高い信頼性と性能が要求されるコンピュータでは不可欠な存在となっている。RAID は基本的に、ディスクの読み込み・書き込みを複数のディスクで並列に行うことにより処理速度を高め、記憶すべきデータを格納した information disk の他に ディスクの破損箇所の発見・修復のための check disk と呼ばれる冗長性を持たせたディスクを用いることによって安全性を高めている。しかし、安全性を高めるためといって check disk を多くすると、追加のコストが増えてしまう。そこで、安全性と追加コストのバランスを考えることが重要になってくる。

RAID のアクセスコストを低減するため、Cohen 等(2001, 文献[3])によって cluttered ordering という概念が導入された。これは、RAID の information disk と check disk を完全グラフの辺と頂点に対応させて information disk の順序付けを考察する、というものである。また、Mueller 等(2005, 文献[4])は、二次元の RAID を完全二部グラフに対応させることで数理モデル化を行った。

本稿では Mueller 等の研究をさらに発展させ、完全三部グラフの cluttered ordering について報告する。

2. RAID の数理モデル化

information disk には保存したいデータを分割して格納し、check disk には information disk 内のデータが破損した場合に復旧するための冗長データを格納する。そして今、 n 個の information disk と c 個の check disk があるとする。

RAID の check disk を頂点、information disk を辺とみなすことで、RAID を完全グラフで表現することができる。 n 個の information disk・ c 個の check disk を持つ RAID を、完全三部グラフに対応させる。

information disk 内のデータが破損した場合には、次のように check disk を用いて復旧する。 n 個の information disk と c 個の check disk を持つ RAID に対し、これらの関係を 0, 1 を成分にもつ $c \times (n+c)$ 行列 $H=[P|I]$ で表す。この行列 H はパリティ検査行列と呼ばれる(文献[1])。ただし、 I は単位行列であり、 P は c 行 n 列の $\{0,1\}$ -行列である。パリティ検査行列 H の最初の n 列は information disk に対応し、後半の c 列は check disk に対応している。パリティ検査行列 H の 1 つの行に現れる information disk の内容の排他的論理和が計算され、その行に対応する check disk に書き込まれている。そして、1 つのデ

ディスクが壊れても復旧できるように、パリティ検査行列 H の列は mod 2 で線形独立になっている。

3. Cluttered Ordering

あるグラフ $G=(V, E)$ について, $c=|V|$, $E=\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ とし, n より小さい正の整数 d を考える. また, $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上の置換 π に対して $V_i^{\pi, d}$ を「 $\{e_{\pi(i)}, e_{\pi(i+1)}, \dots, e_{\pi(i+d-1)}\}$ の各辺に含まれる点の集合」とする (インデックスは mod n で計算し, $0 \leq i \leq n-1$ である) .

ここで, d 本の辺を持つ部分グラフのアクセスコストを その部分グラフの頂点数で測る. するとアクセスコストの上限は $\max_i |V_i^{\pi, d}|$ で与えられる. このとき, $\max_i |V_i^{\pi, d}|=f$ となる辺の順序付けを (d, f) -cluttered ordering と呼ぶ.

完全グラフにおける cluttered ordering の構成法は Cohen 等 (文献[2]および[3]) によって与えられた. Mueller 等 (文献[4]) は, 完全二部グラフの cluttered ordering の構成のために, wrapped \angle -labelling と (d, f) -movement という 2 つの概念を導入した.

3.1. 完全二部グラフの Cluttered Ordering

完全二部グラフの cluttered ordering の構成については, Mueller 等 (文献[4]) による次の結果が知られている.

定理 1 (文献[4]). 任意の自然数 t に対し, パラメータの値が $d=3$, $f=4$ となるような完全二部グラフ $K_{3t, 3t}$ の (d, f) -cluttered ordering が存在する.

定理 2 (文献[4]). 任意の自然数 t に対し, パラメータの値が $d=3s+r$, $f=2(s+1)+r$ ($s>0$, $r=0, 1, 2$) となるような完全二部グラフ $K_{3t, 3t}$ の (d, f) -cluttered ordering が存在する.

3.2. 完全三部グラフの Cluttered Ordering

本稿では, 完全三部グラフの cluttered ordering について, 次の結果を得た.

定理 3. 任意の自然数 t に対し, パラメータの値が $d=9$, $f=8$ となるような完全二部グラフ $K_{3t, 3t, 3t}$ の (d, f) -cluttered ordering が存在する.

文献

- [1] Y. Chee, C. Colbourn, and A. Ling, Asymptotically optimal erasure-resilient codes for large disk arrays, *Discrete Applied Mathematics*, vol.102, Issues 1–2, pp.3–36, 2000.
- [2] M. Cohen, and C. Colbourn, Ladder orderings of pairs and RAID performance, *Discrete Applied Mathematics*, vol.138, no.29, pp.35–46, 2004.
- [3] M. Cohen, C. Colbourn, and D. Froncek, Cluttered orderings for the complete graph, *COCOON 2001: LNCS 2108*, pp.420–431, Springer-Verlag, 2001.
- [4] M. Mueller, T. Adachi, and M. Jimbo, Cluttered orderings for the Complete Bipartite Graph, *Discrete Applied Math*, vol.152, pp. 213–228, 2005.

2つのコントロールをもつ効率的な treatment-control designs

山中望（大阪府立大・工），栗木進二（大阪府立大・工）

V を $v+u$ 個の処理の集合とし， B を V の b 個の部分集合（ブロック）の集まりとする．各ブロックの大きさは一定 (k) であるとし，デザイン (V, B) を $D(v+u, b, k)$ と記す．特に， v 個をテスト処理とし， u 個をコントロールとすると， (V, B) を treatment-control design といい， $\text{TCD}(v, u, b, k)$ と記す．ここで，テスト処理を $1, 2, \dots, v$ と表し，コントロールを $v+1, v+2, \dots, v+u$ と表す．また，同じ処理が同じブロックに重複して現れる場合も考える．

ブロックデザインの通常のモデルにおいて，テスト処理とコントロールの差を精度良く推定するために，

$$\sum_{g=v+1}^{v+u} \sum_{h=1}^v \text{Var}(\hat{\tau}_g - \hat{\tau}_h)$$

を最小とする TCD を求めることが考えられ，そのデザインを最適であるという．ここで，ブロックデザインは連結であるとし， τ_i は処理 i の処理効果で， $\hat{\tau}_i$ は τ_i の最小二乗推定量である ($i = 1, 2, \dots, v+u$)．

ここでは， $u = 2$ の場合を考える．Majumdar (1986), Jaggi, Gupta and Parsad (1996), Gupta, Ramana and Parsad (2002) は BIBD, PBIBD を用いて，最適な TCD, 効率的な TCD の表を与えた．我々は John (1981) によって与えられた効率的な cyclic design の表と Hall and Jarrett (1981) によって与えられた効率的な generalized cyclic design の表を用いて，効率的な TCD の表を与える．

Jaggi, Gupta and Parsad (1996) は，TCD のサブクラスとして，各ブロックにすべてのコントロールが同数回ずつ現れる TCD のクラスを考えた．以下では，このクラスだけを考えることにする．Jaggi, Gupta and Parsad (1996) は， $\text{TCD}(v, u, b, k)$ において， $\sum_{g=v+1}^{v+u} \sum_{h=1}^v \text{Var}(\hat{\tau}_g - \hat{\tau}_h)$ の下限 $g(w, q)\sigma^2$ を与え，特別な balanced bipartite block design が最適な TCD となることを示した．また，TCD の効率として，

$$e = \frac{g(w, q)\sigma^2}{\sum_{g=v+1}^{v+u} \sum_{h=1}^v \text{Var}(\hat{\tau}_g - \hat{\tau}_h)}$$

を定義し， $e = 1$ のとき，そのデザインは最適である．

Cyclic design $\text{CD}(v, b, k)$ と generalized cyclic design $\text{GCD}_m(v, b, k)$ の各ブロックに2つのコントロール $v+1, v+2$ を t 回ずつ反復させることによって， $\text{TCD}(v, 2, b, k+2t)$ \mathcal{D} を構成する．このとき得られた TCD において，

$$\sum_{g=v+1}^{v+2} \sum_{h=1}^v \text{Var}(\hat{\tau}_g - \hat{\tau}_h) = \left\{ \frac{2(k+t)}{tr} + \frac{2(k+2t)}{r} \sum_{i=1}^{v-1} \frac{1}{2t+ke_i} \right\} \sigma^2$$

が成り立つ. ここで, e_i ($i = 1, 2, \dots, v-1$) は cyclic design $CD(v, b, k)$, generalized cyclic design $GCD_m(v, b, k)$ の canonical efficiency factor である.

$CD(v, b, k)$ の場合には, canonical efficiency factor は

$$e_i = \frac{k-1}{k} - \frac{1}{rk} \sum_{h=1}^{v-1} \lambda_{h+1} \cos\left(\frac{2\pi hi}{v}\right)$$

によって与えられる (John (1987) を参照せよ). ここで, λ_{h+1} ($h = 1, 2, \dots, v-1$) はテスト処理 1 と $h+1$ の会合数である. また, $GCD_m(v, b, k)$ の場合には, ある複素行列の固有値が canonical efficiency factor と一致する (Jarrett and Hall (1978) を参照せよ).

Cyclic design や generalized cyclic design として, 効率的なデザインを用いると, その結果として得られる TCD も効率的であることが期待され, ここでは, John (1981) によって与えられた効率的な cyclic design の表と Hall and Jarrett (1981) によって与えられた効率的な generalized cyclic design の表を用いることにする. 結果として得られる $TCD(v, 2, b, k)$ について, cyclic design を用いた場合, $k \leq 10, r \leq 10, v \leq 30$ の範囲で, generalized cyclic design を用いた場合, $k \leq 10, r \leq 5, 9 \leq v \leq 50$ の範囲で, $e \geq 0.95$ である多くの効率的な TCD が得られた. ここで, r は各テスト処理の反復回数で, r_c は各コントロールの反復回数である. ただし, (v, k) が同じ場合には, (1) ブロックの個数 b が小さくない. (2) 効率 e の値が大きくない. の両方の条件を満たすデザインを表から除くことにする. すなわち, D_1, D_2 を $TCD(v, 2, b_1, k), TCD(v, 2, b_2, k)$ とし, その効率を e_1, e_2 とするとき, $b_1 \leq b_2$ で, $e_1 \geq e_2$ である D_2 は表から除かれる.

$k = 10$ のとき

| v | b | r | r_c | e | t | |
|-----|-----|-----|-------|-------|-----|-----|
| 7 | 7 | 6 | 7 | 0.992 | 2 | C |
| 8 | 8 | 6 | 8 | 0.984 | 2 | C |
| 9 | 6 | 4 | 12 | 0.975 | 2 | G |
| | 9 | 6 | 18 | 0.975 | 2 | C |
| 10 | 5 | 3 | 10 | 0.965 | 2 | G |
| | 10 | 6 | 20 | 0.966 | 2 | C |
| 11 | 11 | 8 | 11 | 0.960 | 1 | C |
| 12 | 3 | 2 | 3 | 0.969 | 1 | G |

| v | b | r | r_c | e | t | |
|-----|-----|-----|-------|-------|-----|-----|
| 13 | 13 | 8 | 13 | 0.976 | 1 | C |
| 14 | 7 | 4 | 7 | 0.980 | 1 | G |
| | 14 | 8 | 14 | 0.982 | 1 | C |
| 15 | 15 | 8 | 15 | 0.986 | 1 | C |
| 16 | 4 | 2 | 4 | 0.990 | 1 | G |
| | 16 | 8 | 16 | 0.990 | 1 | C |
| 17 | 17 | 8 | 17 | 0.992 | 1 | C |
| 18 | 9 | 4 | 9 | 0.992 | 1 | G |
| | 18 | 8 | 18 | 0.994 | 1 | C |

[参考文献]

- Gupta, V.K., Ramana, D.V.V. and Parsad, R. (2002) J. Statist. Plann. Inference 106, 159-175.
- Hall, W.B. and Jarrett, R.G. (1981) Biometrika 68, 617-627.
- Jaggi, S., Gupta, V.K. and Parsad, R. (1996) Commun. Statist.-Theory methods 25 (5), 967-983.
- Jarrett, R.G. and Hall, W.B. (1978) Biometrika 65, 397-401.
- John, J.A. (1981) J. Roy. Statist. Soc. B 43, 76-80.
- John, J.A. (1987) Cyclic designs. Chapman and Hall, New York.
- Majumdar, D. (1986) J. Statist. Plann. Inference 14, 359-372.

コントロールをもつ incomplete split-block designs

逸見 亮太 (大阪府立大・工), 栗木 進二 (大阪府立大・工)

1. 序

2 因子実験を考え、その因子を A, B とし、各々の因子の水準 (処理) を $A_1, A_2, \dots, A_l, B_1, B_2, \dots, B_h$ とする. b 個のブロックがあり、そのブロックは p 行 q 列に配列されているとし、各ブロックに対して、因子 A の p 個の水準を行 (行処理という) に、因子 B の q 個の水準を列 (列処理という) に割り当てることにする. このようなデザインを split-block design という. ここでは、 $p < l, q < h$ である incomplete split-block design (ISBD) を考え、ISBD のモデルとして、処理効果が母数で、ブロック効果、行効果、列効果が確率変数である混合モデルを考える. また、3 段階の無作為化、(1) ブロックの無作為化、(2) ブロックの中の行の無作為化、(3) ブロックの中の列の無作為化を考える. i 番目の処理効果 τ_i は

$$\tau_i = \mu + \alpha_w + \beta_j + (\alpha\beta)_{wj}, \quad i = (w-1)h + j$$

($w = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, h$) である. ここで、 μ は一般平均、 α_w は A_w の主効果、 β_j は B_j の主効果、 $(\alpha\beta)_{wj}$ は A_w と B_j の交互作用効果である. Multistratum 分析において、stratum 情報行列 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ が与えられ、

$$\mathbf{A}_f \mathbf{x}_i = \lambda_{f,i} \mathbf{r}^\delta \mathbf{x}_i \quad (f = 1, 2, 3, 4)$$

を満たす $\lambda_{f,i}$ を stratum efficiency factor といい、 $\mathbf{x}_i' \mathbf{r}^\delta \boldsymbol{\tau}$ は Pearce, Caliński and Marshall (1974) によって basic contrast と呼ばれ、

$$\mathbf{x}_i' \mathbf{r}^\delta \mathbf{x}_i = 1, \quad \mathbf{x}_i' \mathbf{r}^\delta \mathbf{x}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

を満たす. ここで、 $\boldsymbol{\tau}$ は処理効果を表す列ベクトル、 \mathbf{r}^δ は処理組合せの繰り返し回数を対角成分に並べた対角行列である. Kachlicka and Mejza (2003) は l 個の行処理が s_1^2 個のテスト処理と s_2 個のコントロール処理からなり、 h 個の列処理が t_1^2 個のテスト処理と t_2 個のコントロール処理からなる場合を考え、square lattice design にコントロール処理を加え、Kronecker 積を用いて ISBD を構成し、その stratum efficiency factor を与えた. ここでは、 $s_2 = 1, t_2 = 1$ とし、ブロックの個数を少なくするために、semi-Kronecker 積を用いて ISBD を構成し、その stratum efficiency factor を与える.

2. Square lattice design

(V, B) をデザインとし、各ブロックの大きさは一定 (k) で、各処理が現れるブロックの個数は一定 (r) とする. B のブロックをいくつかのクラスに分け、各クラスにおいて、 v 個の処理が 1 回ずつ現れるようにできるとき、 (V, B) は resolvable であるといい、そのクラス

を resolvable class という. (V, B) を $v = s^2$, $k = s$ の resolvable design とし, resolvable class を S_1, S_2, \dots, S_r とする. 各 S_i, S_j ($i \neq j$) において, S_i の任意のブロックと S_j の任意のブロックに共通に現れる処理がちょうど 1 つあるとき, (V, B) を square lattice design といい, $SLD(s^2, r, s)$ と表す. ただし, $r \leq s + 1$ である.

3. コントロールをもつ ISBD の構成法

\tilde{N}_A, \tilde{N}_B を $SLD(s^2, r, s), SLD(t^2, r, t)$ の生起行列とし,

$$\tilde{N}_A = (\tilde{N}_{A1} : \tilde{N}_{A2} : \dots : \tilde{N}_{Ar}), \quad \tilde{N}_B = (\tilde{N}_{B1} : \tilde{N}_{B2} : \dots : \tilde{N}_{Br})$$

とする. ここで, $\tilde{N}_{Ai}, \tilde{N}_{Bi}$ は i 番目の resolvable class に対応し, \tilde{N}_A, \tilde{N}_B の各行は因子 A, B のテスト処理に対応している.

$$N_{Ai} = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{Ai} \\ \mathbf{1}'_s \end{pmatrix}, \quad N_{Bi} = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{Bi} \\ \mathbf{1}'_t \end{pmatrix}$$

とし,

$$N_A = (N_{A1} : N_{A2} : \dots : N_{Ar}), \quad N_B = (N_{B1} : N_{B2} : \dots : N_{Br})$$

とする. ここで, N_A, N_B の最後の行は因子 A, B のコントロール処理に対応している. このとき, 処理組合せとブロックの生起行列 N_1 を

$$N_1 = N_A \otimes N_B = (N_{A1} \otimes N_{B1} : N_{A2} \otimes N_{B2} : \dots : N_{Ar} \otimes N_{Br})$$

として, ISBD \mathcal{D} を構成すると, stratum efficiency factor は

| Contrast | No. | I | II | III | IV |
|--------------------------|--------------------|----------|--------------|--------------|----------------------------|
| $A^{(1)}$ | $r(s-1)$ | s'/r | $1 - s'/r$ | — | — |
| | $m(s-1)$ | — | 1 | — | — |
| $A^{(2)}$ | 1 | — | 1 | — | — |
| $B^{(1)}$ | $r(t-1)$ | t'/r | — | $1 - t'/r$ | — |
| | $m'(t-1)$ | — | — | 1 | — |
| $B^{(2)}$ | 1 | — | — | 1 | — |
| $A^{(1)} \times B^{(1)}$ | $r(s-1)(t-1)$ | $s't'/r$ | $t'(1-s')/r$ | $s'(1-t')/r$ | $1 - s'/r - t'/r + s't'/r$ |
| | $r(r-1)(s-1)(t-1)$ | — | t'/r | s'/r | $1 - t'/r - s'/r$ |
| | $rm(s-1)(t-1)$ | — | t'/r | — | $1 - t'/r$ |
| | $rm'(s-1)(t-1)$ | — | — | s'/r | $1 - s'/r$ |
| | $mm'(s-1)(t-1)$ | — | — | — | 1 |
| $A^{(1)} \times B^{(2)}$ | $r(s-1)$ | — | — | s'/r | $1 - s'/r$ |
| | $m(s-1)$ | — | — | — | 1 |
| $A^{(2)} \times B^{(1)}$ | $r(t-1)$ | — | t'/r | — | $1 - t'/r$ |
| | $m'(t-1)$ | — | — | — | 1 |
| $A^{(2)} \times B^{(2)}$ | 1 | — | — | — | 1 |

によって与えられる. ただし, $m = s - r + 1$, $m' = t - r + 1$, $s' = s/(s+1)$, $t' = t/(t+1)$ である.

On non-existence of affine resolvable triangular designs

景山三平

広島大学

1. Statement I

Let \mathbf{N} be the $v \times b$ incidence matrix of a triangular design with parameters $v = n(n-1)/2, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$.

Lemma 1.1. In a triangular design, the matrix $\mathbf{N}\mathbf{N}'$ has eigenvalues $rk, r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2$ and $r - 2\lambda_1 + \lambda_2$ with multiplicities 1, $n-1$ and $n(n-3)/2$, respectively.

Furthermore, when \mathbf{N} is the $v \times b$ incidence matrix of a triangular design with parameters $v = n(n-1)/2, b = \beta t, r = \alpha t, k, \lambda_1, \lambda_2$, having an affine α -resolvability, we have the following.

Lemma 1.2. In an affine α -resolvable design, the matrix $\mathbf{N}'\mathbf{N}$ has eigenvalues $rk, k\{1 - (\alpha-1)/(\beta-1)\}$ and 0, with multiplicities 1, $b-t$ and $t-1$, respectively.

Lemma 1.3. The matrices $\mathbf{X}\mathbf{Y}$ and $\mathbf{Y}\mathbf{X}$ have the same non-zero eigenvalues with the same multiplicities, where the matrices \mathbf{X} and \mathbf{Y} are of appropriate sizes.

By use of Lemmas 1.1, 1.2 and 1.3, we can easily obtain the following result.

Theorem 1.1. In an affine α -resolvable triangular design,

- (i) when $r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 > 0$ and $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, the affine α -resolvability does not hold;
- (ii) when $r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 = 0$ and $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, an identity $b = v + t - 1 - (n-1)$ holds;
- (iii) when $r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 > 0$ and $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, an identity $b = v + t - 1 - n(n-3)/2$ holds.

Remark 1.1. By the previous argument as in Lemmas 1.1, 1.2 and 1.3, it can be concluded that in an m -associate PBIB design, having the incidence matrix \mathbf{N} , with parameters $v, b, r, k, \lambda_i, \theta_i, \rho_i, i = 0, 1, \dots, m$, if any two eigenvalues of θ_i ($i \geq 1$) of $\mathbf{N}\mathbf{N}'$ with multiplicities ρ_i are positive, then the design with affine α -resolvability does not exist, where $\lambda_0 = r, \theta_0 = rk, \rho_0 = 1$. In particular, when $m = 2$, i.e., the design is 2-associate, if $\theta_1 > 0$ and $\theta_2 > 0$, we get Theorem 1.1(i).

2. Statement II

In a triangular design with parameters $v = n(n-1)/2, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$, the following main result can be established.

Theorem 2.1. There does not exist an affine resolvable triangular design.

When $\alpha \geq 2$, we can get some observations depending on the values of β . For example, the following Theorem 2.2 result can be provided. Before the proof, we need a result.

Lemma 2.1. The existence of an affine α -resolvable block design with $v, b = \beta t, r = \alpha t, k, q_1$ and q_2 is equivalent to the existence of an affine $(\beta - \alpha)$ -resolvable block design with $v^* = v, b^* = \beta t, r^* = (\beta - \alpha)t, k^* = v - k, q_1^* = v - 2k + q_1$ and $q_2^* = v - 2k + q_2$.

By Theorem 2.1 and Lemma 2.1 we can obtain the following.

Corollary 2.1. When $\beta - \alpha = 1$, an affine α -resolvable triangular design does not exist.

Theorem 2.2. When $2 \leq \beta \leq 10$, there does not exist an affine α -resolvable triangular design for any $\alpha \geq 1$.

Isomorphism Halving of 2-designs

名古屋大学大学院情報科学研究科 藤原祐一郎

V を有限集合, \mathcal{B} を V の部分集合の族とする。 V の異なる 2 つの要素からなる任意の非順序対が, 丁度 λ 回 \mathcal{B} の要素に含まれるとき, 有限集合の組 (V, \mathcal{B}) を 2-design と呼び, V の要素を点, \mathcal{B} の要素をブロックと呼ぶ。 また, $|V|$ を位数, もしくは次数と呼ぶ。 特に, $|V| = v$, $\lambda = 1$ かつ \mathcal{B} の要素がすべて V の k 元集合であるとき, Steiner 2-design と呼び, $S(2, k, v)$ と表記する。 点集合 V と, V の 2 元集合の族 \mathcal{E} の組 (V, \mathcal{E}) は一般にグラフと呼ばれ, \mathcal{E} の元を辺と呼ぶ。 任意の異なる 2 点が丁度 1 回 \mathcal{E} に含まれるとき, (V, \mathcal{E}) は完全グラフと呼ばれ, K_v と書く。 $S(2, k, v)$ は K_v の辺に対する, K_k による分解と同値である。

グラフ $G = (V, \mathcal{E})$ において, 2 点の組のうち, \mathcal{E} に含まれていないものすべてからなる集合を $\bar{\mathcal{E}}$ とする。 このとき, $(V, \bar{\mathcal{E}})$ を G の補グラフと呼び, \bar{G} と書く。 特に, $G \simeq \bar{G}$ のとき, G を自己補グラフと呼ぶ。

本発表では, 自己補グラフの K_k による辺分解を扱う。 これは, $S(2, k, v)$ のブロック集合 \mathcal{B} に対する, 同型な 2 つの集合 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ への分割と同値である。 $S(2, k, v) = (V, \mathcal{B})$ において \mathcal{B} の分割 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ が存在して, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset, \mathcal{B}_1 \simeq \mathcal{B}_2$ を満たすとき, (V, \mathcal{B}) は halvable であると言う。 Halvable $S(2, k, v) = (V, \mathcal{B})$ が存在するための v に対する自明な必要条件は, 少なくとも 1 つの $S(2, k, v)$ が存在し, かつ $|\mathcal{B}| = \binom{v}{2} / \binom{k}{2}$ が偶数であることである。 $k = 3, 4$ を満たす halvable $S(2, k, v)$ が存在するための v に対する十分条件は, $k \geq 5$ に比べて特によく調べられており, 以下の定理が知られている。

定理 1 (Das and Rosa [1]) $v \equiv 1, 9 \pmod{24}$, もしくは v が素数冪であり, かつ $v \equiv 13 \pmod{24}$ ならば halvable $S(2, 3, v)$ が存在する。

定理 2 (Phelps [2]) $v \equiv 1, 16 \pmod{24}$ かつ $v \neq 136, 184, 232, 328, 424, 616$ ならば halvable $S(2, 4, v)$ が存在する。

Halvable $S(2, 3, v)$ が存在するための自明な必要条件は, $v \equiv 1, 9, 13, 21 \pmod{24}$ であるので, 定理 1 は, halvable $S(2, 3, v)$ の存在問題はほぼ半

数の位数について解決している．さらに， $\text{halvable } S(2, 4, v)$ が存在するための自明な必要条件は， $v \equiv 1, 16 \pmod{24}$ であるので，定理 2 により，自明な必要条件を満たすすべての $v > 616$ に対して， $\text{halvable } S(2, 4, v)$ が存在するとわかる．

また，Steiner 2-design とよく似た組合せ構造に対しても，同様に 2 つの同型な部分構造に分割する問題が考えられている．有限集合 V と， V の要素からなる部分集合族 \mathcal{G} ， \mathcal{B} の組 $(V, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ のうち次の条件を満たすものを $\text{transversal design}$ と呼び， $TD(k, n)$ と書く．

1. \mathcal{G} は V の要素の分割であり，すべての $g \in \mathcal{G}$ に対して $|g| = n$ である．
2. 任意の 2 つの異なる V の要素からなる組が丁度 1 回 \mathcal{G} の要素，もしくは \mathcal{B} の要素のどちらかに含まれる．
3. すべての $b \in \mathcal{B}$ に対して $|b| = k$ であり，かつ $|V| = nk$ である．

$TD(k, n)$ についても Steiner 2-design の場合と同様に，ブロック集合 \mathcal{B} を同型な 2 つの集合に分割出来る場合， halvable であるといい， $\text{halvable } TD(3, n)$ については，存在する n を問う問題は完全に解決されている．しかしながら， $k \geq 5$ の場合については， $\text{halvable } S(2, k, v)$ の存在する位数はほとんど知られていなかった．我々は，以下の定理を証明した．

定理 3 $k \leq 5$ とする．このとき， $\text{halvable } S(2, k, v)$ が存在するための v に対する自明な必要条件は，十分大きな v に対して十分条件である．

本発表では定理 4 の他，十分大きくはない v や，任意の $k \geq 6$ に対する $S(2, k, v)$ に適用可能な，次の構成法を紹介する．

定理 4 $\text{Halvable } S(2, k, v)$ および $\text{halvable } S(2, k, w)$ が存在するとする．このとき， $TD(k, k)$ もしくは $TD(k, v)$ が存在するならば， $\text{halvable } S(2, k, vw)$ が存在する．

参考文献

- [1] P. K. Das and A. Rosa, Halving Steiner triple systems, *Discrete Math.* **109** (1992) 59–67.
- [2] K. T. Phelps, Halving block designs with block size four, *Australas. J. Combin.* **3** (1991) 231–234.

1 D-optimal design

± 1 を成分とする次数 n の正方行列で最大の行列式を持つものを位数 n の **D-optimal design** という。Ehlich[2] は $n \equiv 2 \pmod{4}$ のとき、次のような D-optimal design の構成法があることを示した。

定理 1 (Ehlich) $n = 2v \equiv 2 \pmod{4}$, A, B を成分が ± 1 である可換な位数 v の正方行列とする。

$$AA^T + BB^T = (2v - 2)I + 2J \implies X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -A^T \end{pmatrix} : D\text{-optimal design}$$

(I : 単位行列, J : 成分がすべて 1 の行列)

特に A, B が巡回行列の場合は、**circular type** の D-optimal design とよぶ。 X が circular type D-optimal design とする。Chadjipantelis-Kounias[1] は、 k, r を A, B それぞれの各行の -1 の個数とすると、

$$(n/2 - 2k)^2 + (n/2 - 2r)^2 = 2n - 2.$$

が成立することが示した。

A, B が定理 1 の仮定の式をみたすとき $\pm A, \pm B$ もみたすので、 $1 \leq k \leq r \leq \frac{n-2}{4}$ と仮定しても一般性を失わない。また、 $n = 126$ 次以下の Chadjipantelis-Kounias[1] の式を満たすすべてのパラメータに対して circular type D-optimal design が構成されている。

2 Supplementary difference set

$k, r, v \in \mathbb{N}$, $A = \{d_1, \dots, d_k\}, B = \{f_1, \dots, f_r\} \subset \{0, \dots, v-1\}$ とする。各 $\ell \in \{0, 1, \dots, v-1\}$ に対して、

$$P_A(\ell) := |\{(i, j) \mid d_i - d_j \equiv \ell \pmod{v}\}|, \quad P_B(\ell) := |\{(i, j) \mid f_i - f_j \equiv \ell \pmod{v}\}|$$

とおく。

$$\lambda := P_A(1) + P_B(1) = P_A(2) + P_B(2) = \dots = P_A(v-1) + P_B(v-1)$$

が成立するとき、 (A, B) を $(v; k, r; \lambda)$ **supplementary difference set (SDS)** と呼ぶ。

Chadjipantelis-Kounias[1] は $(v; k, r; k + r - (n-2)/4)$ supplementary difference set から位数 $n = 2v$ の circular type D-optimal design が構成できること、逆に、それぞれの各行の -1 の個数が k, r である次数 v の行列 A, B から circular type D-optimal design が構成されているとき $(v; k, r; k + r - (n-2)/4)$ supplementary difference set が構成できることを示した。

本研究は山形大学の原田昌晃氏との共同研究の内容です。

3 巡回行列の生成

$$a = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1^+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\alpha_1^-}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_s^+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\alpha_s^-})$$

から $v-k$, k の順序付分割 $(\alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots, \alpha_s^+)$, $(\alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots, \alpha_s^-)$ が得られる。逆に、 $v-k$, k の自然数への順序付分割 $(\alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots, \alpha_s^+)$, $(\alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots, \alpha_s^-)$ から a が得られる。

このようなデータ表現をすることにより、以下のような性質が導かれる。

定理 2 巡回行列 A, B の 1 行目をそれぞれ

$$a_0 = (\alpha_1^+, \alpha_1^-, \alpha_2^+, \alpha_2^-, \dots, \alpha_s^+, \alpha_s^-), \quad b_0 = (\beta_1^+, \beta_1^-, \beta_2^+, \beta_2^-, \dots, \beta_{s'}^+, \beta_{s'}^-), \quad \alpha_i^\pm, \beta_i^\pm \in \mathbf{N}$$

とし、 a_1, b_1 を A, B の 2 行目とすると、次が成立する。

$$(a_0, a_1) = v - 4s, \quad (b_0, b_1) = v - 4s'.$$

系 3 上の定理の A, B から D -optimal design が構成されたとすると $(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = 2$ より、次が成立する。

$$s + s' = (v - 1)/2$$

Supplementary difference set で考えると次のような性質が得られる。

定理 4 巡回行列 A, B の 1 行目をそれぞれ

$$a_0 = (\alpha_1^+, \alpha_1^-, \alpha_2^+, \alpha_2^-, \dots, \alpha_s^+, \alpha_s^-), \quad b_0 = (\beta_1^+, \beta_1^-, \beta_2^+, \beta_2^-, \dots, \beta_{s'}^+, \beta_{s'}^-), \quad \alpha_i^\pm, \beta_i^\pm \in \mathbf{N}$$

とする。 A, B から Supplementary difference set が構成できるとすると、次が成立する。

$$(1) P_A(1) = k - s, \quad P_B(1) = r - s',$$

$$(2) P_A(2) = \sum_{\alpha_i^- > 2} (\alpha_i^- - 2) + |\{i | \alpha_i^+ = 1\}|, \quad P_B(2) = \sum_{\beta_i^- > 2} (\beta_i^- - 2) + |\{i | \beta_i^+ = 1\}|.$$

次に、 s というパラメータに関して考えてみる。 D -optimal design を構成する巡回行列 A, B の一行目を

$$a_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,v-1}), \quad b_0 = (b_{0,0}, b_{0,1}, \dots, b_{0,v-1})$$

とする。このとき、 m , $\gcd(v, m) = 1$ による写像 $\sigma_m : \{0, \dots, v-1\} \rightarrow \{0, \dots, v-1\}$ ($i \rightarrow m \times i \pmod{v}$) に対して、

$$(a_{0,\sigma(0)}, a_{0,\sigma(1)}, \dots, a_{0,\sigma(v-1)}), \quad (b_{0,\sigma(0)}, b_{0,\sigma(1)}, \dots, b_{0,\sigma(v-1)})$$

を 1 行目とする巡回行列 $\sigma_m(A), \sigma_m(B)$ は D -optimal design を構成する。

各論文に掲載されている位数 122 以下の D -optimal design で位数 82, 102, 114, 122 以外はパラメータ $s = \lfloor (v-1)/4 \rfloor$ を持っている。位数 82, 102, 114, 122 の知られている D -optimal design をパラメータ $s = \lfloor (v-1)/4 \rfloor$ を持つように変換できた。

参考文献

- [1] Th. Chadipantelis and S. Kounias, Supplementary difference sets and D -optimal designs for $n \equiv 2 \pmod{4}$, *Discrete Math.* **57** (1985), 211–216.
- [2] H. Ehlich, Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen, *Math. Z.* **83** (1964), 123–132.

標識自己補グラフの数え上げについて

近畿大学・理工 田澤新成、大野泰生、浅井恒信

1 序

グラフ G の補グラフ \overline{G} とは、 G の 2 点が隣接しているとき、かつそのときに限り、それらの 2 点为非隣接であるという隣接関係をもつようなグラフのことをいう。 G と \overline{G} が同型であるとき、 G は自己補グラフといわれる。自己補グラフの点の個数には制限があり、 G が自己補グラフならば、 G の点の個数 n は $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ を満たす。点の個数が与えられたとき、互いに同型でない自己補グラフの個数を求める式は Read[3] により与えられている。しかし、標識付けられた自己補グラフの個数を求める問題は未解決であることが Harary and Palmer[1] によりアナウンスされ、現在まで解決されていないと思われる。4、5 点の標識自己補グラフの個数は簡単に知ることができる。というのは、それらの自己同型群を簡単に導くことができるから。次の自己補グラフは 8 点の場合である。ここでは、8 点の標識自己補グラフの個数について考察する。この考察は、標識グラフの個数を求める指針を与えていると考えられる。つまり、標識グラフの数え上げと非標識グラフの数え上げは、通常、別々に扱われアプローチが異なっていた。しかし、ここで報告するアプローチはその融合の中で、結果を与えたものである。

2 標識グラフの数え上げ定理

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ 、 $Y = \{0, 1\}$ とし、写像 $f: X^{(2)} = \{\{x, y\} \subset X | x \neq y\} \rightarrow Y$ は点集合を X とする 1 つのグラフ $G(f)$ を表す。ここで 2 点の隣接関係は「 $\{x, y\}$ が $G(f)$ の辺 $\Leftrightarrow f(\{x, y\}) = 1$ 」である。以下、 f を点集合 $X = X(f)$ 上のグラフと呼ぶ。 $E(f)$ は f の辺集合である。 $Y^{X^{(2)}}$ でもって X 上のグラフ全体を表す。 A を X 上の置換群とし、 $\alpha \in A$ に対し $X^{(2)}$ 上の置換 α' を「 $\alpha'(\{x, y\}) = \{\alpha x, \alpha y\}$, $\{x, y\} \in X^{(2)}$ 」により定める。置換 $\alpha \in A$ とグラフ $f \in Y^{X^{(2)}}$ に対し、辺集合 $\{\alpha'(\{x, y\}) | \{x, y\} \in E(f)\}$ をもつグラフを αf と書く。 $\alpha f = f$ を満たす置換 α は f の自己同型写像である。また、グラフ f に対し、 $\Gamma(f) = \{\alpha \in A | \alpha f = f\}$ は f の自己同型群である。性質 P を有する X 上のグラフを $\mathcal{G}(P)$ で表す。すなわち

$$\mathcal{G}(P) = \{f \in Y^{X^{(2)}} | f \text{ は性質 } P \text{ をもつ}\}$$

置換 $\alpha \in A$ が固定する性質 P をもつ標識グラフの個数を $n(\alpha; P) = \#\{f \in \mathcal{G}(P) | \alpha f = f\}$ により定める。このとき、バーンサイドの補題により

定理 1. ι を A の単位元とし、 N を性質 P をもつ非標識グラフの個数とすると、性質 P をもつ標識グラフの個数は

$$n(\iota; P) = |A| \cdot N - \sum_{\alpha \in A - \{\iota\}} n(\alpha; P)$$

この定理は、非標識グラフの個数と単位元以外の $n(\alpha; P)$ が既知であれば、標識グラフの個数を教えてくれるものである。

3 位数8の標識自己補グラフの数え上げ

グラフ f の補グラフを \bar{f} と記す。自己補グラフ f に対し、 f から \bar{f} への同型写像を自己補写像という。自己同型写像と自己補写像の間にある関係がある。すなわち、 γ を自己補グラフ f の自己同型写像とすると、 f のある自己補写像 α, β に対し、 $\gamma = \alpha\beta$ と書ける。位数8の自己補写像(置換)は長さ4の2つの巡回置換の積あるいは長さ8の巡回置換である。このことから、自己同型写像(置換)の型がある程度決定される。 A は $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上の対称群である。置換 $\alpha \in A$ に対し、 $j_k = j_k(\alpha)$ は長さ k の巡回成分の個数を表し、 $(j(\alpha)) = 1^{j_1} 2^{j_2} \dots 8^{j_8}$ は α の型を表し、定理1に現れる $n(\alpha; P)$ は型 $(j(\alpha))$ に対し、 $n((j(\alpha)); P)$ と書く。

補題 1. (James and Kerber[2], p366 参照)

- 型 4^2 の2つの置換の積および型 8^1 の2つの置換の積は型 $1^8, 1^4 2^2, 2^4, 1^5 3^1, 1^1 2^2 3^1, 1^2 3^2, 1^2 2^1 4^1, 4^2, 1^3 5^1, 3^1 5^1, 2^1 6^1, 1^1 7^1$ のいずれかである。
- 型 4^2 の置換と型 8^1 の置換の積は型 $1^6 2^1, 1^2 2^3, 1^3 2^1 3^1, 2^1 3^2, 1^4 4^1, 2^2 4^1, 1^1 3^1 4^1, 1^1 2^1 5^1, 1^2 6^1, 8^1$ のいずれかである。

補題 2. 自己補グラフ f に対し、 f の自己補写像 α を考える。 f における点 x の次数 $d_f(x)$ について等式 $d_f(x) + d_f(\alpha x) = 7$ が成り立つ。

以上のことおよび自己補グラフの連結性から、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} n(1^6 2^1; P) &\geq 8 & n(1^4 2^2; P) &\geq 64 & n(1^2 2^3; P) &\geq 8 & n(2^4; P) &\geq 256 & n(1^5 3^1; P) &= 0 \\ n(1^3 2^1 3^1; P) &= 0 & n(1^1 2^2 3^1; P) &= 0 & n(1^2 3^2; P) &= 0 & n(2^1 3^2; P) &= 0 & n(1^4 4^1; P) &= 0 \\ n(1^2 2^1 4^1; P) &= 0 & n(2^2 4^1; P) &\geq 8 & n(1^1 3^1 4^1; P) &= 0 & n(4^2; P) &\geq 16 & n(1^3 5^1; P) &= 0 \\ n(1^1 2^1 5^1; P) &= 0 & n(3^1 5^1; P) &= 0 & n(1^2 6^1; P) &= 0 & n(2^1 6^1; P) &= 0 & n(1^1 7^1; P) &= 0 \\ n(8^1; P) &= 0 \end{aligned}$$

Read[3]により、位数8の非標識自己補グラフは $10(=N)$ 個あるから、この数値結果を定理1に適用すると $n(v; P) \leq 329056$ が得られ、つまり位数8の標識自己補グラフの個数は329056以下であることがわかる。

参考文献

- [1] F. Harary and E.M. Palmer, Graphical enumeration, Academic NY, 1973.
- [2] G. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley, 1981
- [3] R.C. Read, On the number of self-complementary graphs and digraphs, Journal London Math. Soc. **38**(1963), 99-104.

最適完全複合木構成問題について

中村 恵美子 (パナソニック CC ソフト)

玉利 文和 (福岡教育大学)

王 強 (福岡教育大学)

最適複合木

$G = (V(G), E(G))$, $|V(G)| = p$, $|E(G)| = q$ とする。

G が連結なとき、すなわち少なくともひとつの木を含むとき G を複合木と呼ぶ。 G が位数 p のすべての木を含むとき、 G を完全複合木と呼ぶ。明らかに位数 p の完全グラフは完全複合木である。完全複合木の中で辺の個数が最小のものを最適完全複合木という。また、断りがない限り最適完全複合木のことを最適複合木と呼ぶ。完全複合木に関して、次の定理がある。

定理 G を位数 p のグラフとする。 G が $e(G) \geq \lfloor \frac{p(p-2)}{2} \rfloor + 1$ を満たすならば、 G は位数 p の木をすべて含む。

最適複合木を求めるアルゴリズム

G の次数列を $d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_p)$ ($d_G(v_1) \geq d_G(v_2) \geq \dots \geq d_G(v_p)$) とすると、完全複合木 G の部分グラフとなる位数 p の木を T_m ($m = 1, \dots, M$) とする。ここで M は位数 p の木の総数である。このとき次数列は次を満たす。

$$d_G(v_i) \geq \max\{d_{T_m}(v_i) | m = 1, \dots, M\} \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

また、 $d(v_i) \leq p - 1$ より

$$\max\{d_{T_m}(v_i) | m = 1, \dots, M\} \leq d_G(v_i) \leq p - 1.$$

ここで $d_{T_m^{(i)}}(v_i) = \max\{d_{T_m}(v_i) | m = 1, \dots, M\}$ を満たす木 $T_m^{(i)}$ を考える。

求める最適複合木 G の次数列は以下を満たす。

$$\lfloor \frac{p-2+i}{i} \rfloor \leq d_G(v_i) \leq p-1$$

ベース

スターとパスを部分グラフとしてもつグラフを考える。このとき辺の数が最小のものをベースと呼ぶ。

最適複合木 G はスターとパスを部分グラフとしてもつので、 G はベースを含まなくてはならない。

位数 p が偶数のときベースの個数は $\frac{p-2}{2}$ 個、奇数のときは $\frac{p-1}{2}$ 個存在する。また、ベースの大きさは $2p-4$ 、次数列は唯一 $p-1, 3, \dots, 3, 2, 2, 1$ であり、それ以外は

$p-1, 3, \dots, 3, 2, 2, 2, 2 (p \geq 5)$ となる。以後、ベースを基にして最適複合木を構成していく。

完全複合木の次数

多重スター S_i

中心となる点の次数を i とし、その中心点に隣接するすべての点の次数を平均化した木を多重スターと呼ぶ。

次数列は次を満たす。

$$d_{S_i}(v_j) = \begin{cases} \lfloor \frac{p-1}{i} \rfloor + 1, & (j = 1, \dots, k) \\ \lfloor \frac{p-1}{i} \rfloor, & (j = k+1, \dots, i) \\ i, & (j = i+1) \\ 1, & (j = i+2, \dots, p) \end{cases}$$

最適完全複合木 G は 2 重スター S_2 , 3 重スター S_3 を含むので、ベースに辺を追加して、2 重スター S_2 , 3 重スター S_3 を含む複合木を考えると、以下の結果を得る。

$p = 10$ のとき、 $d(v_2) \geq 5$ $d(v_3) \geq 4$ $d(v_4) \geq 4$ G の大きさの最小値 18

$p = 11$ のとき、 $d(v_2) \geq 6$ $d(v_3) \geq 4$ $d(v_4) \geq 4$ G の大きさの最小値 21

$p = 12$ のとき、 $d(v_2) \geq 6$ $d(v_3) \geq 5$ $d(v_4) \geq 4$ G の大きさの最小値 24

$p = 13$ のとき、 $d(v_2) \geq 7$ $d(v_3) \geq 6$ $d(v_4) \geq 4$ G の大きさの最小値 28

$d(v_2) \geq 7$ $d(v_3) \geq 5$ $d(v_4) \geq 5$ G の大きさの最小値 28

$p = 14$ のとき、 $d(v_2) \geq 7$ $d(v_3) \geq 6$ $d(v_4) \geq 4$ G の大きさの最小値 30

$d(v_2) \geq 7$ $d(v_3) \geq 5$ $d(v_4) \geq 5$ G の大きさの最小値 30

$p \geq 15$ のとき、 $d(v_2) \geq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ $d(v_3) \geq \lfloor \frac{p+5}{3} \rfloor$ $d(v_4) \geq 4$

G の大きさの最小値 $2p - 4 + \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 3 + \lfloor \frac{p+5}{3} \rfloor - 4 = 2p + \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{p-1}{3} \rfloor - 8$

参考文献

- [1] 中村恵美子、「最適複合木の研究」、修士論文、福岡教育大学大学院、2004
- [2] E. Nakamura and F. Tamari, On an optimal complete complex tree, The 7th Meeting on Topological Spaces Theory and its Applications, August 2003, Yatsushiro College of Technology, Japan.
- [3] E. Nakamura and F. Tamari, On an optimal complete complex tree, The 8th Meeting on Topological Spaces Theory and its Applications, August 2004, Yatsushiro College of Technology, Japan.
- [4] Zhou Bing, A note on Erdos-Sos conjecture, Acta Math. Scientia, 4(3)(1984), 287-289

Balanced C_5 -Bowtie Designs

潮 和彦 (近畿大・理工)

1. Introduction

Let K_n denote the complete graph of n vertices. The complete multi-graph λK_n is the complete graph K_n in which every edge is taken λ times. Let C_5 be the 5-cycle (or the cycle on 5 vertices). The C_5 -bowtie is a graph of 2 edge-disjoint C_5 's with a common vertex and the common vertex is called the center of the C_5 -bowtie.

When λK_n is decomposed into edge-disjoint sum of C_5 -bowties, we say that λK_n has a C_5 -bowtie decomposition. Moreover, when every vertex of λK_n appears in the same number of C_5 -bowties, we say that λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition and this number is called the replication number. This balanced C_5 -bowtie decomposition of λK_n is called a balanced C_5 -bowtie design.

2. Balanced C_5 -bowtie decomposition of λK_n

Theorem 1. If λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition, then $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{20}$ and $n \geq 9$.

Theorem 2. If λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition, then $s\lambda K_n$ has a balanced C_5 -bowtie decomposition for every s .

Theorem 3. When $\lambda \geq 1$, $n \equiv 1 \pmod{20}$, and $n \geq 21$, λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition.

Theorem 4. When $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$, $n \equiv 1 \pmod{10}$, and $n \geq 11$, λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition.

Theorem 5. When $\lambda \equiv 0 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{5}$, and $n \geq 11$, λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition.

Theorem 6. When $\lambda \equiv 0 \pmod{5}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, and $n \geq 9$, λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition.

Theorem 7. When $\lambda \equiv 0 \pmod{10}$, $n \equiv 1 \pmod{2}$, and $n \geq 9$, λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition.

Conjecture 8. When $\lambda \equiv 0 \pmod{20}$ and $n \geq 9$, λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition.

Main Conjecture. λK_n has a balanced C_5 -bowtie decomposition if and only if $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{20}$ and $n \geq 9$.

3. Examples

Example 3.1. Balanced C_5 -bowtie decomposition of K_{21} .

$\{(i, i+1, i+6, i+13, i+3), (i, i+2, i+8, i+16, i+4)\} \ (i = 1, 2, \dots, 21).$

Example 3.2. Balanced C_5 -bowtie decomposition of K_{41} .

$\{(i, i+1, i+10, i+23, i+5), (i, i+2, i+12, i+26, i+6)\},$
 $\{(i, i+3, i+14, i+29, i+7), (i, i+4, i+16, i+32, i+8)\} \ (i = 1, 2, \dots, 41).$

Example 4.1. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $2K_{11}$.

Kazuhiko Ushio, Department of Informatics, Faculty of Science and Technology, Kinki University, Osaka 577-8502, JAPAN. E-mail:ushio@info.kindai.ac.jp Tel:+81-6-6721-2332 (ext. 4615) Fax:+81-6-6730-1320

$\{(i, i+1, i+6, i+7, i+4), (i, i+2, i+8, i+10, i+3)\} \ (i = 1, 2, \dots, 11).$

Example 4.2. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $2K_{21}$.

$\{(i, i+1, i+10, i+12, i+8), (i, i+3, i+14, i+19, i+6)\},$
 $\{(i, i+2, i+12, i+13, i+7), (i, i+4, i+16, i+19, i+5)\} \ (i = 1, 2, \dots, 21).$

Example 5.1. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $4K_{16}$.

$\{(i, i+1, i+10, i+4, i+11), (i, i+6, i+7, i+3, i+13)\},$
 $\{(i, i+2, i+10, i+5, i+13), (i, i+4, i+7, i+1, i+15)\},$
 $\{(i, i+3, i+10, i+6, i+15), (i, i+5, i+7, i+2, i+14)\} \ (i = 1, 2, \dots, 16).$

Example 5.2. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $4K_{26}$.

$\{(i, i+1, i+16, i+6, i+17), (i, i+10, i+11, i+5, i+21)\},$
 $\{(i, i+2, i+16, i+7, i+19), (i, i+9, i+11, i+4, i+22)\},$
 $\{(i, i+3, i+16, i+8, i+21), (i, i+6, i+11, i+1, i+25)\},$
 $\{(i, i+4, i+16, i+9, i+23), (i, i+7, i+11, i+2, i+24)\},$
 $\{(i, i+5, i+16, i+10, i+25), (i, i+8, i+11, i+3, i+23)\} \ (i = 1, 2, \dots, 26).$

Example 6.1. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $5K_9$.

$\{(i, i+1, i+6, i+5, i+2), (i, i+4, i+3, i+8, i+7)\},$
 $\{(i, i+2, i+8, i+6, i+5), (i, i+3, i+1, i+7, i+4)\} \ (i = 1, 2, \dots, 9).$

Example 6.2. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $5K_{13}$.

$\{(i, i+1, i+2, i+11, i+12), (i, i+4, i+8, i+5, i+9)\},$
 $\{(i, i+3, i+6, i+7, i+10), (i, i+2, i+4, i+9, i+11)\},$
 $\{(i, i+5, i+10, i+3, i+8), (i, i+6, i+12, i+1, i+7)\} \ (i = 1, 2, \dots, 13).$

Example 7.1. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $10K_{11}$.

$\{(i, i+1, i+2, i+9, i+10), (i, i+3, i+6, i+5, i+8)\},$
 $\{(i, i+2, i+4, i+7, i+9), (i, i+5, i+10, i+1, i+6)\},$
 $\{(i, i+4, i+8, i+3, i+7), (i, i+6, i+1, i+10, i+5)\},$
 $\{(i, i+7, i+3, i+8, i+4), (i, i+10, i+9, i+2, i+1)\},$
 $\{(i, i+8, i+5, i+6, i+3), (i, i+9, i+7, i+4, i+2)\} \ (i = 1, 2, \dots, 11).$

Example 7.2. Balanced C_5 -bowtie decomposition of $10K_{15}$.

$\{(i, i+1, i+2, i+9, i+4), (i, i+14, i+13, i+6, i+11)\},$
 $\{(i, i+3, i+1, i+2, i+9), (i, i+12, i+14, i+13, i+6)\},$
 $\{(i, i+5, i+8, i+12, i+14), (i, i+10, i+7, i+3, i+1)\},$
 $\{(i, i+7, i+3, i+1, i+2), (i, i+8, i+12, i+14, i+13)\},$
 $\{(i, i+9, i+4, i+10, i+7), (i, i+6, i+11, i+5, i+8)\},$
 $\{(i, i+11, i+5, i+8, i+12), (i, i+4, i+10, i+7, i+3)\},$
 $\{(i, i+13, i+6, i+11, i+5), (i, i+2, i+9, i+4, i+10)\} \ (i = 1, 2, \dots, 15).$

References

- [1] K. Ushio and H. Fujimoto, Balanced bowtie and trefoil decomposition of complete tripartite multigraphs, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E84-A, No. 3, pp. 839–844, March 2001.
- [2] K. Ushio and H. Fujimoto, Balanced foil decomposition of complete graphs, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E84-A, No. 12, pp. 3132–3137, December 2001.
- [3] K. Ushio and H. Fujimoto, Balanced bowtie decomposition of complete multigraphs, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E86-A, No. 9, pp. 2360–2365, September 2003.
- [4] K. Ushio and H. Fujimoto, Balanced bowtie decomposition of symmetric complete multigraphs, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E87-A, No. 10, pp. 2769–2773, October 2004.
- [5] K. Ushio and H. Fujimoto, Balanced quatrefoil decomposition of complete multigraphs, *IEICE Trans. Information and Systems*, Vol. E88-D, No. 1, pp. 17–22, January 2005.
- [6] K. Ushio and H. Fujimoto, Balanced C_4 -bowtie decomposition of complete multigraphs, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E88-A, No. 5, pp. 1148–1154, May 2005.

k -flow の分解性について

慶應義塾大学・理工 松田 浩孝

1 序

まず最初に, グラフ $G = (V, E)$ において, flow の一種である k -flow の定義と性質を, Reinhard Diestel[1] より紹介する. 次に, G における k -flow f, g, h が, 任意の $\vec{e} \in \vec{E}$ に対して,

$$f(\vec{e}) = g(\vec{e}) + h(\vec{e})$$

となるとき, f は, g と h に分解可能であるということにし, この k -flow の分解という概念から導き出される性質と, k -flow が分解可能であることの必要条件や十分条件について考察する.

2 k -flow

以下, グラフにおける flow について考える. グラフ $G = (V, E)$ と辺 $e = xy$ において, 辺の方向付けを次のように定義する.

$$\vec{E} := \{(e, x, y) \mid e \in E; x, y \in V; e = xy\}$$

関数 f が次の (F1), (F2) をみたすとき, f は flow であるという.

$$(F1) \quad f(e, x, y) = -f(e, y, x) \text{ for all } (e, x, y) \in \vec{E} \text{ with } x \neq y;$$

$$(F2) \quad \sum_{y \in N(x)} f(e, x, y) = 0 \text{ for all } (e, x, y) \in \vec{E} \text{ with } x \neq y.$$

(F2) は, Kirchhoff の法則が成り立つことを意味している.

flow の一種である H -flow について説明する. H をアーベル群とすると, flow $f: \vec{E} \rightarrow H$ が, すべての $\vec{e} \in \vec{E}$ に対して, $f(\vec{e}) \neq 0$ となるとき, f は H -flow であるという. $H = \mathbb{Z}_k$ とした \mathbb{Z}_k -flow が, 今後多々登場する.

次に, k -flow の定義を述べる. k を $k \geq 1$ なる整数とする. G 上の \mathbb{Z} -flow f がすべての $\vec{e} \in \vec{E}$ に対して $0 < |f(\vec{e})| < k$ となるとき, f を k -flow と呼ぶ. 一般のグラフに対して, k -flow の存在性を示すことは非常に困難である. それに対し, \mathbb{Z}_k -flow の存在性を示すことは比較的容易である. そこで, \mathbb{Z}_k -flow と k -flow の存在性の同値性を示した Tutte[2] を有効に用いる. また, Seymour[3] によって, すべての bridgeless グラフには 6-flow が存在することが示されている.

3 Flow と coloring の双対性

k -flow と vertex coloring には双対関係があることが Tutte[4] により示されている. つまり, G と G^* を双対関係のある平面グラフであるとする,

$$\chi(G) = \varphi(G^*)$$

が成り立つ. このことにより, 平面グラフにおいては k -flow の問題は, 平面上の map coloring の問題に置き換えることができる.

4 k -flow の分解

グラフ $G = (V, E)$ 上において k -flow f, g, h が存在するとして, すべての $\vec{e} \in \vec{E}$ に対して, $f(\vec{e}) = g(\vec{e}) + h(\vec{e})$ が成り立つとき, f は g と h に分解可能であるということにする. また, 演算は \mathbb{Z}_k 上の演算であるとする, \mathbb{Z}_k -flow の分解も同様に定義できる. このとき, 次の命題が容易に見つけられる.

Proposition 1 すべての \mathbb{Z}_2 -flow, 2-flow は分解できない.

Proposition 2 すべての \mathbb{Z}_3 -flow, \mathbb{Z}_5 -flow は分解可能である.

flow の分解性を調べるということにおいても, やはり k -flow よりも \mathbb{Z}_k -flow の方が比較的容易である. そこで, k -flow と \mathbb{Z}_k -flow の分解性の同値性を考え, グラフに条件をつけ, いくつかの定理を導くことができた.

Theorem 3 G が 3-正則グラフであるとき, 次の 5 つは同値である.

- (i) G に分解可能な \mathbb{Z}_3 -flow が存在する.
- (ii) G に分解可能な 3-flow が存在する.
- (iii) G に分解可能な \mathbb{Z}_4 -flow が存在する.
- (iv) G に分解可能な 4-flow が存在する.
- (v) G は 2 部グラフである.

Theorem 4 G が平面グラフであるとき, G に分解可能な \mathbb{Z}_3 -flow が存在することと, G に分解可能な 3-flow が存在することは同値である.

Theorem 5 $k \geq 4$ のとき, G に周の長さが l 以上の面が存在しないならば, G に分解可能な \mathbb{Z}_k -flow が存在することと G に分解可能な k -flow が存在することは同値である. ただし l は, $3 + 6/(k-3)$ よりも大きい奇数のうちで最小の数である.

参考文献

- [1] R. Diestel, *Graph Theory Second Edition*, Springer.
- [2] W. T. Tutte, On the imbedding of linear graphs in surfaces, *Proc. London Math. Soc.* (2) **51**, 474-483 (1950).
- [3] P. D. Seymour, Nowhere zero 6-flows, *J. Combin. Theory Ser. B* **30**, 130-135 (1981).
- [4] W. T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad. J. Math.* **6**, 80-91 (1954).

New series of mutually M -intersecting k -arcs

東京理科大学 理工学部 宮本 暢子*
明星大学 情報学部 篠原 聡†

1. はじめに

q を素数中とする。射影平面 $\text{PG}(2, q)$ 上の k 個の点からなる集合で、そのうちの 3 点も同一直線上にないようなものを k -arc という。 M を有限個の非負整数の集合とする。 k -arc の集まりで、任意の 2 つの k -arc の共有点の個数が M に含まれているとき、この集まりを *mutually M -intersecting k -arcs* と呼ぶことにする。Mutually M -intersecting k -arcs は直交配列や均斉配列の構成に利用することができ、また光ファイバーを用いた符号分割多元接続通信を実現するために利用される光直交符号 (Optical Orthogonal Code) を得るためにも応用できる。

光直交符号では、各符号語とそれぞれを cyclic shift したもので、自己および相互相関の最大値がある一定値 ($= \lambda$) 以下となるようにする。この λ や、符号語の長さ n および重み w といった与えられたパラメータ (n, w, λ) に対して、符号語の数が最大であるような光直交符号を *optimal* であるという。

Mutually $\{0, 1, 2\}$ -intersecting $(q+1)$ -arcs を求める方法、およびこの集合から長さが $q^3 + q^2 + q + 1$ 、重みが $q + 1$ 、 $\lambda = 2$ であるような光直交符号が得られる事が筆者らによって示されている [1]。また、より一般的に mutually M -intersecting (k, d) -arcs と光直交符号との関係も明らかにされている [2]。ここでは、Mutually M -intersecting k -arcs の新しい系列を求める方法を紹介する。また、 k -arc である hyperoval 同士の交点に関する結果についても示す。

2. Mutually M -intersecting k -arcs

q を偶数の素数中とする。conic のすべての点における接線は唯一の点で交わり (この点を *nucleus* と呼ぶ)、conic にその nucleus を加えた点集合は $(q+2)$ -arc となる。この $(q+2)$ -arc を *hyperoval* (超卵型) と呼ぶ。このとき次の結果が得られる。

Lemma 1 N を射影平面 $\text{PG}(2, q)$ の点とし、 C_1, C_2 を点 N を nucleus としてもつような $\text{PG}(2, q)$ 上の異なる conic とするとき、 C_1 と C_2 は高々 2 点の交点を持つ。

Theorem 2 N を射影平面 $\text{PG}(2, q)$ の点とする。点 N を nucleus としてもつ $\text{PG}(2, q)$ 上のすべての conic の集合 \mathcal{C}_1 は、mutually $\{0, 1, 2\}$ -intersecting $(q+1)$ -arcs であり、 $|\mathcal{C}_1| = q^3 - q^2$ である。

Corollary 3 $\mathcal{C}' = \{C \cup N : C \in \mathcal{C}_1\}$ とするとき、 \mathcal{C}' は、mutually $\{1, 2, 3\}$ -intersecting $(q+2)$ -arcs であり、 $|\mathcal{C}'| = q^3 - q^2$ である。

Theorem 2 の集合から長さが $q^3 + q^2 + q + 1$ 、重みが $q + 1$ 、 $\lambda = 2$ であるような光直交符号が得られ、また Corollary 3 の集合から長さが $q^3 + q^2 + q + 1$ 、重みが $q + 2$ 、自己相関が 2、相互相関が 3 であるような光直交符号が得られる。

*E-mail: miyamoto@is.noda.tus.ac.jp

†E-mail: sshinoha@is.meisei-u.ac.jp

3. hyperoval の交点

2つの hyperoval の交点数について、conic の交わり方に基づいた分類を下記のように行ってきた。
 $\pi_i = \text{PG}(2, q^i)$ 、 $m(P)$ を 2つの conic の点 P における交点重複度とする。

Lemma 4 $M(i) = \{m(P) : P \in \pi_i \setminus \pi_{i-1}\}$ および $\mathcal{M} = (M(1); M(2); \dots)$ とおくと、 \mathcal{M} は次のいずれかとなり、それ以外にはならない。

$$(1, 1, 1, 1) \quad (\emptyset; 1, 1, 1, 1) \quad (1, 1; 1, 1)$$

$$(1; \emptyset; 1, 1, 1) \quad (\emptyset; \emptyset; \emptyset; 1, 1, 1, 1)$$

しかしながら、 $(\emptyset; \emptyset; \emptyset; 1, 1, 1, 1)$ のようなケースが存在しないことが次の定理により示された。

Theorem 5 任意の異なる 2つの conic は、 π_1 上で交点をもたないならば、必ず π_2 上で交点を持つ。

したがって、交点重複度がすべて 1 であるような 2つの hyperoval の交点数に対しても、以下のように分類が明らかとなった。

$$\delta = |C_1 \cap \mathcal{N}(C_2)| + |C_2 \cap \mathcal{N}(C_1)| + |\mathcal{N}(C_1) \cap \mathcal{N}(C_2)|$$

とおくとき、

Theorem 6 $q = 2^h$ とする。

$\mathcal{M} = (1, 1, 1, 1)$ のとき、 h が奇数ならば $\delta \leq 1$ 。

$\mathcal{M} = (\emptyset; 1, 1, 1, 1)$ のとき、 h が奇数ならば $\delta \leq 1$ 。

$\mathcal{M} = (1, 1; 1, 1)$ のとき、 h が偶数ならば $\delta \leq 1$ 。

$\mathcal{M} = (1; \emptyset; 1, 1, 1)$ のとき、 h が奇数ならば $\delta \leq 1$ 。

参考文献

- [1] Nobuko Miyamoto, Hirobumi Mizuno, and Satoshi Shinohara, “Optical orthogonal codes obtained from conics on finite projective planes”, *Finite Fields and their Applications*, Vol. 10, pp.405–411, 2004.
- [2] Nobuko Miyamoto and Satoshi Shinohara, “Mutually M -intersecting (k, d) -arcs and its application to optical orthogonal codes”, *Congressus Numerantium*, Vol. 160, pp.23–31, 2004.

グラフのアドレス付けとその応用

澤 正憲¹ (名古屋大学情報科学研究科)、藤井 隼人 (広島大学工学部情報科学科)

¹ email: discrete@jim.math.cm.is.nagoya-u.ac.jp

$G = (V, B)$ を単連結グラフとする、ただし $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 。自然数 N に対して、単射 $f: V \rightarrow \{0, 1, d\}^N$ を $f(v_i) = \mathbf{u}_i$ と定義し f をグラフのアドレス付けと呼ぶことにする。サイズ $n \times N$ の行列 $U = (f(v_1)^T \dots f(v_n)^T)^T$ をアドレス行列と呼ぶ、ただし X^T は X の転置行列を意味する。 $\{0, 1, d\}^N$ の元 \mathbf{u}_i をアドレスと呼び、 $\mathbf{u}_{i,r}$ によって \mathbf{u}_i の第 r 成分を表示する。また、写像 $h: \{0, 1, d\} \times \{0, 1, d\} \rightarrow \{0, 1\}$ を、 $\{\mathbf{u}_{i,r}, \mathbf{u}_{j,r}\} = \{0, 1\}$ の時に 1 それ以外のとき 0 をとる関数と定義する。この h を用いて、 $\{0, 1, d\}^N$ の 2 元間の距離が $H(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \sum_{r=1}^N h(\mathbf{u}_{i,r}, \mathbf{u}_{j,r})$ により定義される。

Graham と Pollak は次の問題を提示した: 任意の単連結グラフ $G = (V, B)$ の各頂点に、アドレス間の距離とグラフの距離が一致するようなアドレス付けは可能か [6]? このようなアドレス付けが存在すれば、あるネットワークにおいてサーバーからレシーバーへ最短の経路でメッセージが送信される。また、 K_3 へのアドレス付けを考えればシンボル d の必要性がわかるだろう。 G の直径を g とすれば長さ $N = g(|V| - 1)$ のアドレス付けが可能であるから [6]、所望のアドレス付けは常に存在する。従って最小のアドレス長 $N(= N(G))$ の決定が次の問題。

各グラフ G に対して $N(G)$ をアドレス数と呼び、長さ $N = N(G)$ のアドレス付けを最適であるという。一般のグラフ G に対して、 $N(G) \leq |G| - 1$ [10]、 $N(G) \geq \max\{n_+(D), n_-(D)\}$ [Witsenhausen, 1971] が知られている、ただし G の距離行列を D とし、 D の正 (負) の固有値の個数を $n_+(n_-)$ とする。Winkler の不等式において等号成立するグラフの系列は実際に存在するので [6]、この不等式は一般のグラフ G に対して最良であるといえる。とはいえ $N(G) < |G| - 1$ なるグラフも多数存在する。最小の例が $N(K_{2,2}) = |K_{2,2}| - 2$ である。Witsenhausen の不等式において等号が成立する時、 G は eigensharp addressing scheme をもつという [3]。

Eigensharp addressing scheme をもつグラフの系列として、 K_n, T_n, C_{2l+1} [6]、偶數位数の車輪グラフ (W_{2l})、偶サイクルを部分グラフとして含まないサボテングラフ [澤, 2005] 等が知られている。偶サイクルを部分グラフとして含むようなサボテングラフについては $N(G)$ は決定されていない。 $N(G) < |G| - 1$ なるグラフ G に限定すると、eigensharp addressing scheme を持つグラフの系列として知られているのは C_{2l} [6]、 K_{mn} [4]、 W_{2l+1} [澤, 2005] が知られている: 独立に West [9]、Graham-Pollak [5] によって、 $N(K_{2,2}) = 2$ 、 $N(K_{2,5}) = 5$ なることが示されている。偶サイクルに対しては $N(G) = |V|/2$ が成立する [6]: この場合 2 値でアドレス付けが可能である。2 値アドレス付け可能なグラフの特徴付けは [7] を参照されたい。この他に有効グラフを対象としたアドレス付けの研究もなされている [2]。

一般のグラフに対するアドレス付けの eigensharpness についてはほとんど知られていない。[3] で彼らは次の問題を提示した：直径 2 の強正則グラフで eigensharp addressing scheme をもつ為の条件は何か？ $(m, n) = (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5)$ の時かつその時に限り K_{mn} が eigensharp addressing scheme をもたないこと [4]、また、Elzinga 等 [3] によりペテルセングラフは eigensharp addressing scheme をもたないことが示されている。

G の biclique decomposition に必要な biclique の最小個数を $b(G)$ と表記する。 $N(G)$ を決定することによって、 $b(G)$ 或いはその下界が決定される。例えば $m, n \geq 1$ に対して上の 9 つの (m, n) を除いて、 $b(2K_m + 2K_n) = m + n - 2$ なることが示される。

References

- [1] L. Brandenburg, G. Gopinath, R. Kurshan, On the addressing problem of loop switching, *Bell System Tech. J.* **51**(7) (1972), 1445–1469.
- [2] F. R. K. Chung, R. L. Graham, P. M. Winkler, On the addressing problem for directed graphs, *Graphs Combin.* **1** (1985), no. 1, 41–50.
- [3] R. J. Elzinga, D. A. Gregory, K. N. Vander Meulen, Addressing the Petersen graph, *Discrete Math.* **286** (2004), 241–244.
- [4] H. Fujii, M. Sawa, An eigensharp addressing scheme on complete bipartite graphs, to appear in *Ars Combin.*
- [5] R. M. Graham, H. O. Pollak, *On embedding graphs in squashed cubes*, *Lecture Notes in Math.* **303**, Springer-Verlag, 1972, 99–110.
- [6] R. M. Graham, H. O. Pollak, On the addressing problem for loop switching, *Bell System Technical Journal* **50** (1971), 2495–2519.
- [7] R. M. Graham, P. Winkler, On isometric embeddings of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **288**(2) (1985), 527–536.
- [8] D. A. Gregory, V. L. Watts and B. L. Shader, Biclique decompositions and Hermitian rank, *Linear Algebra Appl.* **292** (1999), 267–280.
- [9] D. West, *Introduction to Graph Theory 2ed*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996, p.401 and p.422.
- [10] P. M. Winkler, Proof of the squashed cube conjecture, *Combinatorica* **3** (1983), 135–139.

3元線形符号の拡張性に関連する幾何学的構造

大阪府立大学・理学系研究科 岡本 けい

1 Introduction

Let $V(n, q)$ denote the vector space of n -tuples over $\text{GF}(q)$, the field of q elements. A linear code C of length n , dimension k and minimum (Hamming) distance d over $\text{GF}(q)$ is referred to as an $[n, k, d]_q$ code. The *weight* of a vector \mathbf{x} is the number of non-zero entries in \mathbf{x} . Let A_i be the number of codewords of C with weight i . If there exists an $[n+1, k, d+1]_q$ code C' which gives C as a punctured code, C is called *extendable* (to C') and C' is an *extension* of C . Let C be an $[n, k, d]_3$ code with $k \geq 3$, $\gcd(3, d) = 1$. We set three non-negative integers Φ_0, Φ_1, Φ_e as follows:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{3 \nmid i, i \neq 0} A_i, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \not\equiv 0, d \pmod{3}} A_i, \quad \Phi_e = \frac{1}{2} \sum_{d < i \equiv d \pmod{3}} A_i,$$

where the notation $x|y$ means that x is a divisor of y . The pair of integers (Φ_0, Φ_1) is called the *diversity* of C . Let \mathcal{D}_k be the set of all possible diversities of C . For $k \geq 3$, let \mathcal{D}_k^* and \mathcal{D}_k^+ be as follows:

$\mathcal{D}_k^* = \{(\theta_{k-2}, 0), (\theta_{k-3}, 2 \cdot 3^{k-2}), (\theta_{k-2}, 2 \cdot 3^{k-2}), (\theta_{k-2} + 3^{k-2}, 3^{k-2})\}$, $\mathcal{D}_k^+ = \mathcal{D}_k \setminus \mathcal{D}_k^*$, where $\theta_j = (3^{j+1} - 1)/2$. It is known that \mathcal{D}_k^* is included in \mathcal{D}_k and that C is extendable if $(\Phi_0, \Phi_1) \in \mathcal{D}_k^*([1])$. \mathcal{D}_k^+ is determined as follows.

Lemma 1 ([2]) (1) When k is odd (≥ 5): $\mathcal{D}_k^+ = \{(\theta_{k-2}, 3^{k-2})\} \cup \{(\theta_{k-2}, \theta_{k-2} - \theta_{U+1+s}), (\theta_{k-2}, \theta_{k-2} + \theta_{U+1+s} + 1) \mid 0 \leq s \leq U\} \cup \{(\theta_{k-2} - 3^{U+1+s}, \theta_{k-2} + \theta_{U+s} + 1), (\theta_{k-2} + 3^{U+1+s}, \theta_{k-2} - \theta_{U+s}) \mid 1 \leq s \leq U+1\}$, where $U = (k-5)/2$.
(2) When k is even (≥ 6): $\mathcal{D}_k^+ = \{(\theta_{k-2}, 3^{k-2})\} \cup \{(\theta_{k-2} - 3^{T+1+s}, \theta_{k-2} + \theta_{T+s} + 1), (\theta_{k-2} + 3^{T+1+s}, \theta_{k-2} - \theta_{T+s}) \mid 0 \leq s \leq T\} \cup \{(\theta_{k-2}, \theta_{k-2} - \theta_{T+s}), (\theta_{k-2}, \theta_{k-2} + \theta_{T+s} + 1) \mid 1 \leq s \leq T\}$, where $T = (k-4)/2$.

2 Geometrical Structure

We denote by $\text{PG}(r, q)$ the projective geometry of dimension r over $\text{GF}(q)$. A j -flat is a projective subspace of dimension j in $\text{PG}(r, q)$. We denote by \mathcal{F}_j the set of j -flats of $\text{PG}(r, q)$ and denote by θ_j the number of points in a j -flat, i.e. $\theta_j = |\text{PG}(j, q)| = (q^{j+1} - 1)/(q - 1)$, where $|T|$ denotes the number of elements in T for a given set T .

For an $[n, k, d]_q$ code C with a generator matrix G , the columns of G can be considered as a multiset of n points in $\Sigma = \text{PG}(k-1, q)$ denoted by \bar{G} . An i -point is a point of Σ which has multiplicity i in \bar{G} . Let Σ_i be the set of i -points in Σ . For any subset S of Σ we define the *multiplicity of S with respect to C* as $m_C(S) = \sum_{i=1}^{\gamma_0} i \cdot |S \cap \Sigma_i|$,

where $\gamma_0 = \max\{i \mid \text{an } i\text{-point exists}\}$. Then we obtain the partition $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_{\gamma_0}$ such that $n = m_C(\Sigma)$, $n - d = \max\{m_C(\pi) \mid \pi \in \mathcal{F}_{k-2}\}$. Conversely such a partition of Σ as above gives an $[n, k, d]_q$ code in the natural manner. Let Σ^* be the dual space of Σ (considering \mathcal{F}_{k-2} as the set of points of Σ^*).

Now, let C be an $[n, k, d]_3$ code with diversity (Φ_0, Φ_1) , $\gcd(3, d) = 1$, $k \geq 3$, and let \mathcal{F}_j^* be the set of j -flats of Σ^* , i.e., $\mathcal{F}_j^* = \mathcal{F}_{k-2-j}$, $0 \leq j \leq k-2$. We define F_0, F_1, F_e, F and \bar{F} as follows:

$F_0 = \{\pi \in \mathcal{F}_0^* \mid m_C(\pi) \equiv n \pmod{3}\}$, $F_1 = \{\pi \in \mathcal{F}_0^* \mid m_C(\pi) \not\equiv n, n-d \pmod{3}\}$,
 $F_e = \{\pi \in \mathcal{F}_0^* \mid m_C(\pi) < n-d, m_C(\pi) \equiv n-d \pmod{3}\}$, $F = F_0 \cup F_1$, $\bar{F} = F \cup F_e$.

Then we have $\Phi_0 = |F_0|$, $\Phi_1 = |F_1|$, $\Phi_e = |F_e|$ since $|\{\pi \in \mathcal{F}_{k-2} \mid m_C(\pi) = i\}| = A_{n-i}/(q-1)$. The extendability of C is viewed geometrically as follows.

Lemma 2 C is extendable if and only if \bar{F} contains a hyperplane of Σ^* .

A t -flat Π of Σ^* with $|\Pi \cap F_0| = i$, $|\Pi \cap F_1| = j$ is called an $(i, j)_t$ flat. Characterizing $(i, j)_t$ flats is quite useful to consider the conditions for the extendability, see [1-4]. An s -flat S in Π is called the *axis of Π of type (a, b)* if every hyperplane of Π not containing S has the same diversity (a, b) and if there is no hyperplane of Π through S whose diversity is (a, b) . The following theorems are obtained.

Theorem 3 Let Π be a t -flat in Σ^* , $t \geq 2$.

- (1) For $(i, j) = (\theta_{t-1}, 0)$ or $(\theta_{t-1}, 3^t)$, Π is an $(i, j)_t$ flat if and only if Π contains a $(\theta_{t-1}, 0)_{t-1}$ flat which is the axis of type $((i-1)/3, j/3)$.
- (2) For $(i, j) = (\theta_{t-2}, 2 \cdot 3^{t-1})$ or $(\theta_{t-1} + 3^{t-1}, 3^{t-1})$, Π is an $(i, j)_t$ flat if and only if Π contains a $(\theta_{t-2}, 0)_{t-2}$ flat which is the axis of type $((i-1)/3, j/3)$.

Theorem 4 Let Π be a t -flat in Σ^* , $t \geq 3$.

Π is a $(\theta_{t-1}, 3^{t-1})_t$ flat if and only if Π contains a $(\theta_{t-3}, 0)_{t-3}$ flat which is the axis of type $(\theta_{t-2}, 3^{t-2})$.

Theorem 5 Let Π be a t -flat in Σ^* with odd $t \geq 5$, and let $(i, j) \in \{(\theta_{t-1}, \theta_{t-1} - \theta_{T+s}), (\theta_{t-1}, \theta_{t-1} + \theta_{T+s} + 1), (\theta_{t-1} - 3^{T+1+s}, \theta_{t-1} + \theta_{t-1} + \theta_{T+s} + 1), (\theta_{t-1} + 3^{T+1+s}, \theta_{t-1} - \theta_{T+s})\}$ with $1 \leq s \leq T$, $T = (t-3)/2$. Then Π is an $(i, j)_t$ flat if and only if Π contains a $(\theta_{2s-2}, 0)_{2s-2}$ flat which is the axis of type $((i-1)/3, j/3)$.

Theorem 6 Let Π be a t -flat in Σ^* with even $t \geq 4$, and let $(i, j) \in \{(\theta_{t-1}, \theta_{t-1} - \theta_{U+s}), (\theta_{t-1}, \theta_{t-1} + \theta_{U+s} + 1) \mid 1 \leq s \leq U\} \cup \{(\theta_{t-1} - 3^{U+1+s}, \theta_{t-1} + \theta_{t-1} + \theta_{U+s} + 1), (\theta_{t-1} + 3^{U+1+s}, \theta_{t-1} - \theta_{U+s}) \mid 1 \leq s \leq U+1\}$, $U = (t-4)/2$. Then Π is an $(i, j)_t$ flat if and only if Π contains a $(\theta_{2s-2}, 0)_{2s-2}$ flat which is the axis of type $((i-1)/3, j/3)$.

References

- [1] Maruta, T.: Extendability of ternary linear codes, Des. Codes Cryptogr., 35 (2005) 175-190.
- [2] Maruta, T., Okamoto, K.: Some improvements on the extendability of ternary linear codes, Finite Fields Appl., to appear.
- [3] T.Maruta, K.Okamoto.: Geometric conditons for the extendability of ternary linear codes, submitted for publication.
- [4] K.Okamoto, T.Maruta.: Extendability of ternary linear codes of dimension five, Proc. 9th International Workshop in Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT), Kranevo, Bulgaria, 2004, pp. 312-318.

Ternary Extremal Self-Dual Codes¹

山形大学・理 原田 昌晃

A ternary self-dual code C of length $2n$ is a $[2n, n]$ code over the finite field $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ of order 3 satisfying $C = C^\perp$ where the dual code C^\perp of C is defined as $C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_3^{2n} \mid x \cdot y = 0 \text{ for all } y \in C\}$ under the standard inner product $x \cdot y$. All codes in this talk are ternary self-dual codes. A self-dual $[2n, n, d]$ code exists if and only if $2n \equiv 0 \pmod{4}$. The minimum weight d of a self-dual code is bounded by $d \leq 3\lfloor n/12 \rfloor + 3$. If $d = 3\lfloor n/12 \rfloor + 3$, then the code is called *extremal*.

In this talk, I first describe what is known about the classification of self-dual codes and the existence of extremal self-dual codes of lengths ≤ 72 . All self-dual codes of lengths ≤ 20 have been classified and there are exactly two inequivalent extremal self-dual codes of length 24 (cf. [5]). Many construction methods of self-dual codes are known. For example, let H be a Hadamard matrix of order $n \equiv 2 \pmod{3}$ then (I_n, H) generates a self-dual code $C(H)$ of length $2n$. In this talk, the following construction is employed. Let A and B be $n \times n$ negacirculant matrices. If $AA^t + BB^t = -I_n$, then the following matrix

$$\begin{pmatrix} I_{2n} & A & B \\ -B^T & A^T & \end{pmatrix},$$

generates a self-dual code of length $4n$. The codes are called *four-negacirculant codes*. A classification of extremal four-negacirculant self-dual codes of lengths $n \leq 40$ and $n = 48, 52$ is presented. As a consequence, many new extremal self-dual codes are found. The currently known results on the existence of extremal self-dual codes for lengths n ($28 \leq n \leq 72$) are summarized as given in Table 1 where $\#(n)$ denotes the number of known inequivalent extremal self-dual codes of length n . In the columns “References”, QR_n and P_n denote the extended quadratic residue code and the Pless symmetry code of length n , respectively.

Finally I end my talk with the following (open) problems about the classification and the existence of extremal self-dual codes:

- Classify extremal self-dual codes of length 28.

¹This talk is based on joint work with W. Holzmann, H. Kharaghani and M. Khorvash (University of Lethbridge, Canada).

Table 1: Known extremal self-dual codes

| n | $\#(n)$ | References | n | $\#(n)$ | References |
|-----|------------|-----------------------------|-----|------------|-----------------------------|
| 28 | ≥ 33 | [2], [5] | 52 | ≥ 2 | [4], This talk |
| 32 | ≥ 293 | [1], [3], This talk | 56 | ≥ 200 | This talk |
| 36 | ≥ 1 | P_{36} (see [5]) | 60 | ≥ 2 | QR_{60}, P_{60} (see [5]) |
| 40 | ≥ 120 | [1], [3], This talk | 64 | ≥ 1 | $C(H_{32})$ (see [5]) |
| 44 | ≥ 330 | [1], This talk | 68 | ? | (see [5]) |
| 48 | ≥ 2 | QR_{48}, P_{48} (see [5]) | 72 | 0 | (see [5]) |

- Construct a new extremal self-dual code for length 36, 48, 52, 60, 64.
- Let H_{32} be the Paley Hadamard matrix of order 32. Then $C(H_{32})$ is an extremal self-dual code of length 64 and this is the only known extremal code. Is there a Hadamard matrix H of order 32 such that $C(H)$ is an extremal self-dual code of length 64?
- Determine whether an extremal self-dual code of length 68 exists or not.

References

- [1] M. Harada, New extremal ternary self-dual codes, *Australasian J. Combin.* **17** (1998), 133–145.
- [2] M. Harada, An extremal ternary self-dual $[28, 14, 9]$ code with a trivial automorphism group, *Discrete Math.* **239** (2001), 121–125.
- [3] W.C. Huffman, On extremal self-dual ternary codes of lengths 28 to 40, *IEEE Trans. Inform. Theory* **38** (1992), 1395–1400.
- [4] P. Gaborit and A. Otmani, Experimental constructions of self-dual codes, *Finite Fields Appl.* **9** (2003), 372–394.
- [5] E. Rains and N.J.A. Sloane, “Self-dual codes,” *Handbook of Coding Theory*, V.S. Pless and W.C. Huffman (Editors), Elsevier, Amsterdam 1998, pp. 177–294.

グリッドコンピューティングを用いた BIBD の 1 つの探索法について

関西学院高等部 丹羽時彦

大阪大学基礎工学部 白旗慎吾

日立システムアンドサービス 猪川徳信 田中一義 中垣智宏

1 はじめに

BIBD(Balanced Incomplete Block Design)[1] の形の発見は、数学的、論理的に追求して解を形成していく場合が多い。今回発表する内容は、そのようなアプローチに対し、統計とコンピュータを手段として用いることにより、シミュレーションを行い、解を見つけ出そうという試みである。つまり、論理的に追及するのではなく、乱数を用いてシミュレーションを行ない、多くある組み合わせの中から、条件にあう行列を見つけ出していく方法に関し、アルゴリズムと評価値に対する収束の特性と、それを生かしたグリッドコンピューティングへの適応の可能性について述べる。

2 表記法

探索アルゴリズムの説明を行なう前に、表記法について先に述べる。

Notation 1 生成行列 (generation matrix)

$v \times b$ の生起行列 $N = [n_{ij}]$ ($n_{ij} \in \{1, 0\}$) において、

$$\sum_{i=1}^v n_{ij} = k = \text{const.} \quad (j = 1, 2, \dots, b) \quad \sum_{j=1}^b n_{ij} = r = \text{const.} \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

を満たす行列を生成行列 $G = [g_{ij}]$ と呼ぶ。

Notation 2 内積行列 (projection matrix)

$v \times b$ の行列 G を生成行列としたとき、 $G \cdot {}^tG$ を内積行列 $P = [p_{ij}]$ と呼ぶ。ここで、 tG は、行列 G の転置行列を意味する。この、内積行列の特徴は、 $v \times b$ の生起行列に対し、内積行列は $v \times v$ の正方行列となり、対角線上には、 b の値が v 個並ぶこととなる。特に、BIBD の行列であれば、対角線上以外の成分は、すべて λ となる。

Notation 3 評価値 (evaluation value)

内積行列 P において、対角線を除いた成分の値が λ の値と一致する成分の個数を評価値と呼ぶ。すなわち、 $P = [p_{ij}]$ とすると、 $\#\{p_{ij} | p_{ij} = \lambda, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, v\}$ となる。評価値が変化するとき「生成行列が遷移する」と呼ぶ。

3 探索アルゴリズム

次に、シミュレーションで求める手順について述べる。

Step.1 生成行列 $G = [g_{ij}]$ ($1 \leq i \leq v, 1 \leq j \leq b$) を乱数により求める。

Step.2 その生成行列より、内積行列 $P = [p_{ij}]$ ($1 \leq i \leq v, 1 \leq j \leq v$) を求める。

Step.3 内積行列より、評価値を求める。つまり、対角線上を除く成分のうち、 $p_{ij} = \lambda$ ($i \neq j$) となる成分の個数を求める。

Step.4 内積行列の j 列目を基準にし、 $p_{ij} \neq \lambda$ ($i \neq j, 1 \leq i \leq v, 1 \leq j \leq v$) があれば、その列の最大値と最小値を求め、それぞれ $p_{ij}, p_{ij'}$ とする。

Step.5 $(i, j), (i, j')$ に対し、行列 G の j 行と j' において右の変換を行う。ただし、どの組み合わせを採用するか乱数で決めているが、基準となる行は、 $(1 \leq i \leq v)$ の順に行なっている。

| | | | | | |
|---------|---|---|---------------|---|---|
| i 行目 | 1 | 0 | | 1 | 0 |
| j 行目 | 1 | 0 | \rightarrow | 0 | 1 |
| j' 行目 | 0 | 1 | | 1 | 0 |

Step.6 変換後の内積行列の評価値を求め、その値が変換する前の値と比較し、収束値 $v(v-1)$ に近ければその生成行列を採用する。

Step.7 Step.2 から Step.6 を繰り返し、徐々に収束させていく。その際、あえて評価値の低い値を採用したり、noise を与えて崩したりすることにより収束を加速させる。

4 収束解析

上記の探索方法による収束のパスを辿ると、ある生成行列にヒットすれば、急激な勢いで収束を行う特性を持つ。そこで、私たちは、収束する生成行列であるのか、収束しない生成行列であるのか、評価値に着目しその判断基準としている。しかし、その評価値は、BIBD の形によってそれぞれ異なった領域に存在する特性を持つことが次第に分かってきた。

図 1 BIBD No.22 の収束パスと探索

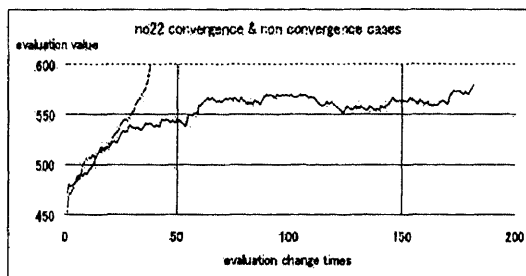


図 2 新しい探索方法

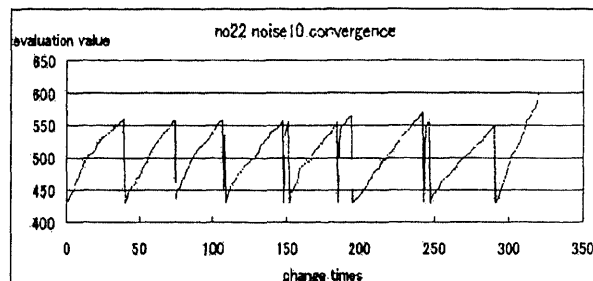


図 1 では、同じ BIBD (No.22) で探索を行った時の評価値の変化であるが、2つの異なる探索方法で行っている。なだらかな曲線は、評価値が高い周辺を中心に探索を行っているが収束には至らなかった。それに対し、収束した評価値の変化の様子は急激なもので、低い評価値から一気に、到達評価値へと至っている。BIBD の多くの収束の様子は、高い評価値の領域で行列が遷移し、やがて収束する生成行列に達し、高い評価値の領域に収束する生成行列が存在していることが分かる。よって、図 2 のように、評価値の低い領域を調べ、ある程度探索すれば一気に、もとの評価値の低い領域に戻る探索方法 [2] がより効果的であることが分る。

5 グリッドコンピューティングの採用 [3]

現在利用している環境は、教室のパソコン 48 台をグリッド環境に整備し、研究を行なっている。グリッドとは、クラスターと異なり、限られた環境の中だけではなく、場所に依存せずネットワークでつなげれば、ヘテロなパソコン [4] であっても利用することができる利便性がある。この環境を用いて、48 台のパソコンにそれぞれ異なる低い評価値の領域を設定し、収束する生成行列は急激に評価値が高くなるので、探索時間を短く (図 2) することにより、多くの生成行列を調べ上げていく方法を採用している。

6 最後に

BIBD(No.22) の型は、解は存在するものの、高い評価値領域を対象とする探索方法では解を発見することができなかった。しかし、少しの解決の明かりとして、目的とする評価値までのパスが、高い値ではなく低い値のところにあるのではないかと分かってきた。今後、この探索方針を採用し、グリッドコンピューティングにより、精度の高い探索プログラムも作成していきたい。尚、このグリッドコンピューティングの環境は、文科省 IT 人材育成プロジェクトにおいて構築されたものであり、それに携わっていただいた関西学院大学雄山真弓教授、高田茂樹教授、IBM、(株)メディアプラスの皆様へ感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Charles J. COLBOURN and Jeffrey H.Dinitz (1996). The CRC Handbook of Combinatorial Designs
- [2] 上坂吉則 (1997). ニューロコンピューティングの数学的基礎
- [3] 日本アイ・ビー・エム システムズ・エンジニアリング株式会社 (2004). グリッド・コンピューティングとは何か
- [4] The globus project (2000). Globus Quick Start Guide

MEP.1 計画の構成と比較

神戸大学総合人間 藤 君 鵬
神戸市立工業高専 末次武明
神戸大学発達科学部 白倉暉弘

1. はじめに

2^m ($m \geq 3$) 要因計画で, T_1 : weight(1 の数) が 0, 1 の処理組合せを全部集めた計画とすると, $T = T_1 + T_2$ (“+” は 2 つの計画の並置) が MEP.1 計画 (主効果が全て推定可能で, 2 因子交互作用から高々 1 個の未知効果が検索できて推定可能な計画) であるような計画 T_2 を構成することを考える.

誤差がないという仮定の下で, Srivastava (1975) の基本定理は, この場合, 次のように表される.

「 T が MEP.1 計画であるための必要十分条件は, 行列 $G = [1_N, g_1, \dots, g_m, g_{p_1 q_1}, g_{p_2 q_2}]$ ($1 \leq p_1 < q_1 \leq m, 1 \leq p_2 < q_2 \leq m, (p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$) に対して, $\text{rank } G = m + 1 + 2 \cdots (1)$ であることである。」

2. $T = T_1 + T_2$ の特徴づけと MEP.1 計画の構成例

上記の条件 (1) をこの構成の場合に考えて, 次の定理を得る.

定理 1 (Shirakura(1993)) 上記の T_1 について, $T = T_1 + T_2$ が $k = 1$ に対する処理組合せの数が $N = N_1 + N_2$ の MEP.1 計画 である必要十分条件は, $1 \leq i < j \leq m$ を満たす任意の i, j について, $t_i * t_j$ が 0 でなく, 互いに異なることである.

次に, 定理 1 を満たす新しい MEP.1 計画の構成の例をあげる.

r が 3 以上の整数のとき, 各成分が 0, 1 である r -次元の点 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ を考える.

$n = r(r+1)/2$ とするとき, $n \times (2^r - 1)$ 行列 W を次のように決める.

列は, $(0, \dots, 0)$ を除いた上記の全ての r -次元の点でラベルづけられているとする. 行は, 成分中の 1 の数が 1 か 2 であるような点 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ でラベルづけられているとする. このとき, B 番目の行で A 番目の列の W の要素は次のように与えられる.

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i \pmod{2}$$

例 1) $r = 3$ に対する W は次のように表される.

| | (0, 0, 1) | (0, 1, 0) | (0, 1, 1) | (1, 0, 0) | (1, 0, 1) | (1, 1, 0) | (1, 1, 1) |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (1, 0, 0) | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (0, 1, 0) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| (0, 0, 1) | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| (1, 1, 0) | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| (1, 0, 1) | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| (0, 1, 1) | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

定理 2 先に定義した計画 T_1 について, 上記のように定義した行列 W を T_2 とすると, $T = T_1 + T_2$ が MEP.1 計画になる.

3. MEP.1 計画の最小構成について

Shirakura, T. (1993) の Table 2 ($3 \leq m \leq 10$) に対し, それより大きい $11 \leq m \leq 15$ に対して, $T_2(N_2 \times m)$ の N_2 を最小にする構成を試みた.

下の表では, Shirakura, T. (1993) にならい, N_2 の最小値を $g(m)$ としている. また, N_2^* は $2^{N_2} - 2 \geq m(m-1)/2$ を満たす N_2 の最小値で, $g^*(m) = m - 1$ である.

ただし, 3 節の W の N_2 は, $m \geq 12$ では, 上限の改善になっているので, 下の表には, $lc(m)$ として載せている. ($lc(m)$ は, $2^{n-1} - 1 \leq m < 2^n - 1$ のとき, $\binom{n}{1} + \binom{n}{2}$ である)

N_2 の最小値 $g(m)$ の表

| m | N_2^* | $g(m)$ | $lc(m)$ | $g^*(m)$ | |
|-----|---------|--------|---------|----------|----------------------------|
| 3 | 3 | 3 | | 3 | Shirakura(1993) Table 2 より |
| 4 | 3 | 3 | | 3 | |
| 5 | 4 | 4 | | 3 | |
| 6 | 3 | 3 | | 3 | |
| 7 | 6 | 6 | | 6 | |
| 8 | 5 | 6 | | 7 | |
| 9 | 6 | 7 | | 8 | |
| 10 | 6 | 7 | | 9 | |
| 11 | 6 | 8 | | 10 | |
| 12 | 7 | 8 | 10 | 11 | |
| 13 | 7 | 9 | 10 | 12 | <前節の W と同じ構成> |
| 14 | 7 | 10 | 10 | 13 | |
| 15 | 7 | 10 | 10 | 14 | |

4. MEP.1 計画の検索確率による比較

$\xi_2(\nu_i \times 1)$ は2因子交互作用からなる母数ベクトルとする. ζ を ξ_2 での未知母数で, 特に ζ_0 を ξ_2 の真の未知母数とすると, ζ に対する残差平方和 $S_e^2(\zeta)$ を用いて, 次のように MEP.1 計画 T に対する検索確率 P_T を考える.

$$P_T = \min_{\zeta_0 \in \xi_2} \{Pr(S_e^2(\zeta_0) < S_e^2(\zeta) \text{ for any } \zeta (\neq \zeta_0) \in \xi_2)\}$$

例) $m = 11$ の場合に, $N = 22$ である3つの MEP.1 計画 を比較してみる.

ρ は未知母数の真の大きさと誤差の標準偏差 σ の比 ($\rho = \frac{|\zeta_0|}{\sigma}$) で, 試行回数はいずれも 10000 回である.

「2m」は, weight が k の処理組合せを全部集めた集合 $\Omega(m, k)$ とするとき, 計画 $T = (\Omega(m, 1)', \Omega(m, m-1)')'$ で, $m = 11$ の場合である.

「LC」は, $T_1 = (\Omega(m, 0)', \Omega(m, 1)')'$ に, 3節の W を T_2 として付加した計画である.

「MI+」は, $T_1 = (\Omega(m, 0)', \Omega(m, 1)')'$ に, 4節のようにしてできるだけ処理組合せの数の少ない T_2 を作り, $N = 22$ になるように2行を付加した計画である.

なお, 参考として, 最後の列に, 「MI」として, 「MI+」の2行を付加する前の計画についての検索確率を与えている.

検索確率の表

| ρ | 2m | LC | MI+ | MI |
|--------|---------|---------|---------|---------|
| | 22 × 11 | 22 × 11 | 22 × 11 | 20 × 11 |
| 1.0 | 0.7140 | 0.1705 | 0.3607 | 0.2511 |
| 1.5 | 0.9736 | 0.4048 | 0.7090 | 0.5002 |
| 2.0 | 0.9990 | 0.6835 | 0.8881 | 0.6951 |
| 2.5 | 0.9998 | 0.8616 | 0.9545 | 0.7986 |

以上のように, ρ の各値で, 検索確率は, $P_{2m} > P_{MI+} > P_{LC}$ となる.

参考文献

- Shirakura, T. (1993). Fractional factorial designs of two and three levels. Discrete Mathematics 116, 99-135, North-Holland.
- Srivastava, J. N. (1975). Designs for searching non-negligible effects, in: A Survey of Statistical Design and Linear Model (ed. J. N. Srivastava), 507-519, North-Holland, Amsterdam.

**GA-optimal partially balanced fractional $2^{m_1+m_2}$ factorial designs
of resolution $R(\{00, 10, 01\}|\Omega)$ with $2 \leq m_1, m_2 \leq 4$**

陸 淑杰 広島大・工学研
谷口 英司 岡山理大・総合情報研
栗田 正秀 広島大・総合科
兵頭 義史 岡山理大・総合情報研, 国際自然研

3-因子交互作用以上の要因効果が無視可能な下で, 次のような線形模型を考える:

$$y(T) = E_T \Theta + e_T$$

ここに, $T = (T^{(1)}; T^{(2)})$: 単純部分均斉配列 $SPBA(m_1 + m_2; \{\lambda_{i_1, i_2}\})$, $y(T)$: 観測値ベクトル ($N \times 1$), E_T : 計画行列 ($N \times \nu(m_1, m_2)$), $\Theta = (\theta'_{00}; \theta'_{10}; \theta'_{01}; \theta'_{20}; \theta'_{02}; \theta'_{11})'$: 2-因子交互作用までの要因効果ベクトル ($\nu(m_1, m_2) \times 1$), e_T : 平均 θ_N で共分散行列 $\sigma^2 I_N$ の誤差ベクトル ($N \times 1$), $\nu(m_1, m_2) = 1 + (m_1 + m_2) + \binom{m_1+m_2}{2}$: 2-因子交互作用までの要因効果の数, $N = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \binom{m_1}{i_1} \binom{m_2}{i_2} \lambda_{i_1, i_2}$: 実験総数, $2 \leq m_k$ である.

定義 1 3-因子交互作用以上の要因効果が無視可能な下で, $\theta_{00}, \theta_{10}, \theta_{01}$ および $\theta_{20}, \theta_{02}, \theta_{11}$ のある線形結合が推定可能な計画を分解能 $R(\{00, 10, 01\}|\Omega)$ の計画という. ただし, $\Omega = \{00, 10, 01, 20, 02, 11\}$.

定義 2 $T = (T^{(1)}; T^{(2)})$: $SPBA(m_1 + m_2; \{\lambda_{i_1, i_2}\})$ のとき,

- (i) $(\bar{T}^{(1)}; \bar{T}^{(2)}) = (\bar{T})$: T の FCA ($SPBA(m_1 + m_2; \{\lambda_{m_1-i_1, i_2}\})$),
- (ii) $(T^{(1)}; \bar{T}^{(2)}) = (\check{T})$: T の LCA ($SPBA(m_1 + m_2; \{\lambda_{i_1, m_2-i_2}\})$),
- (iii) $(\bar{T}^{(1)}; \bar{T}^{(2)}) = (\bar{\bar{T}})$: T の CCA ($SPBA(m_1 + m_2; \{\lambda_{m_1-i_1, m_2-i_2}\})$)

という. ただし, $\bar{T}^{(k)}$: $T^{(k)}$ の “0” と “1” を入替えた配列.

ある代数の性質を用いて, 情報行列 $M_T (= E_T' E_T)$ は, 高々6次の実対称行列 $\|\kappa_{\beta_1 \beta_2}^{a_1 a_2, b_1 b_2}\|$ ($= K_{\beta_1 \beta_2}$) ($\beta_1 \beta_2 = 00, 10, 01, 20$ ($m_1 \geq 4$), 02 ($m_2 \geq 4$), 11) と同形になり, その重複度は $\prod_{k=1}^2 \{ \binom{m_k}{\beta_k} - \binom{m_k}{\beta_k-1} \} (= \phi_{\beta_1 \beta_2})$ である. 行列 $K_{\beta_1 \beta_2}$ の各要素 $\kappa_{\beta_1 \beta_2}^{a_1 a_2, b_1 b_2}$ は, $SPBA$ の指標 λ_{i_1, i_2} のある線形式で与えられる. また $K_{\beta_1 \beta_2}$ は, $K_{\beta_1 \beta_2} = (D_{\beta_1 \beta_2} F_{\beta_1 \beta_2} A_{\beta_1 \beta_2}) (D_{\beta_1 \beta_2} F_{\beta_1 \beta_2} A_{\beta_1 \beta_2})'$ と表現される. ここに, $D_{\beta_1 \beta_2}$, $A_{\beta_1 \beta_2}$ は各々対角成分が非零の対角行列, $F_{\beta_1 \beta_2}$ の指標 λ_{i_1, i_2} に対応する列の各成分は, 添字 i_1, i_2 と因子数 m_1, m_2 の関数の $\sqrt{\lambda_{i_1, i_2}}$ 倍で与えられる. このことから $\text{rank}\{K_{\beta_1 \beta_2}\} = \text{r-rank}\{F_{\beta_1 \beta_2}\}$ (: row rank) である.

未知母数ベクトル Θ のある線形結合 $C\Theta$ が推定可能であるための必要十分条件は, $XM_T = C$ となる行列 X が存在することである. ここに, C は $\nu(m_1, m_2)$ 次の行列 (よって X も $\nu(m_1, m_2)$ 次の行列) である. $C\Theta$ を $\theta_{00}, \theta_{10}, \theta_{01}$ および $\theta_{20}, \theta_{02}, \theta_{11}$ のある線形結合からなる母数ベクトルとする. このとき, ある条件の下で, C, X は, $K_{\beta_1 \beta_2}$ と同様に, それぞれ高々6次の行列 $\Gamma_{\beta_1 \beta_2}$, $\chi_{\beta_1 \beta_2}$ と同形になる. $\chi_{\beta_1 \beta_2}$ を未知行列とする行列方程式 $\chi_{\beta_1 \beta_2} K_{\beta_1 \beta_2} = \Gamma_{\beta_1 \beta_2}$ が解をもつための行列 $F_{\beta_1 \beta_2}$ を考えることにより, $N < \nu(m_1, m_2)$ のとき, 分解能 $R(\{00, 10, 01\}|\Omega)$ の $2^{m_1+m_2}$ -PBFF 計画を構築することができる.

[注 意] $N < \nu(m_1, m_2)$ のとき, 情報行列 M_T は正則ではない. よって, ある $K_{\beta_1 \beta_2}$ は正則行列ではない. したがって, 正則でない $K_{\beta_1 \beta_2}$ に対応する $F_{\beta_1 \beta_2}$ は, full row rank ではない.

定理 $N < \nu(m_1, m_2)$, $2 \leq m_1, m_2 \leq 4$ のとき, $\text{SPBA}(m_1 + m_2; \{\lambda_{i_1, i_2}\})$ から得られる計画が分解能 $R(\{00, 10, 01\}|\Omega)$ の $2^{m_1+m_2}$ -PBFF 計画となるための必要十分条件は, 下記の条件の 1 つを満たすことである:

(I) $m_1 = m_2 = 2$ ($\nu(2, 2) = 11$) のとき,

(i) $\lambda_{0,1} \geq 1, \lambda_{1,0} \geq 1, \lambda_{1,2} \geq 1, \lambda_{2,1} \geq 1, \lambda_{0,2} = \lambda_{1,1} = \lambda_{2,0} = 0$, さらに

(1) $\lambda_{0,1} + \lambda_{1,0} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} \leq 5, \lambda_{0,0} = \lambda_{2,2} = 0$, または

(2) $1 \leq \lambda_{0,0} + \lambda_{2,2}, 2(\lambda_{0,1} + \lambda_{1,0} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}) + \lambda_{0,0} + \lambda_{2,2} \leq 10$, またはそれらの FCA の条件, または

(ii) $\lambda_{1,1} = 1, \lambda_{0,0} \geq 1, \lambda_{0,2} \geq 1, \lambda_{2,0} \geq 1, \lambda_{2,2} \geq 1, \lambda_{0,0} + \lambda_{0,2} + \lambda_{2,0} + \lambda_{2,2} \leq 6, \lambda_{0,1} = \lambda_{1,0} = \lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 0$,

(II) $m_1 = 2, m_2 = 3$ ($\nu(2, 3) = 16$) のとき,

$\lambda_{0,1} \geq 1, \lambda_{1,0} \geq 1, \lambda_{1,3} \geq 1, \lambda_{2,2} \geq 1, 1 \leq \lambda_{0,0} + \lambda_{2,3}, 3(\lambda_{0,1} + \lambda_{2,2}) + 2(\lambda_{1,0} + \lambda_{1,3}) + \lambda_{0,0} + \lambda_{2,3} \leq 15, \lambda_{0,2} = \lambda_{0,3} = \lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = \lambda_{2,0} = \lambda_{2,1} = 0$, またはそれらの FCA の条件,

⋮

(V) $m_1 = 3, m_2 = 4$ ($\nu(3, 4) = 29$) のとき,

$\lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = \lambda_{2,2} = \lambda_{2,3} = 0$, さらに加えて

(i) $\lambda_{0,1} \geq 1, \lambda_{1,0} \geq 1, \lambda_{2,4} \geq 1, \lambda_{3,3} \geq 1, \lambda_{0,2} = \lambda_{0,3} = \lambda_{1,4} = \lambda_{2,0} = \lambda_{3,1} = \lambda_{3,2} = 0$, さらに

(1) $\{\lambda_{0,0}, \lambda_{0,4}, \lambda_{3,0}, \lambda_{3,4}\}$ 内の少なくとも 2 つ ($\{\lambda_{0,0}, \lambda_{3,4}\}, \{\lambda_{0,4}, \lambda_{3,0}\}$ は除く) が非零, $4(\lambda_{0,1} + \lambda_{3,3}) + 3(\lambda_{1,0} + \lambda_{2,4}) + \lambda_{0,0} + \lambda_{0,4} + \lambda_{3,0} + \lambda_{3,4} \leq 28, \lambda_{1,3} = \lambda_{2,1} = 0$, またはそれらの FCA の条件,

(2) $1 \leq \lambda_{0,0} + \lambda_{3,4}, 4(\lambda_{0,1} + \lambda_{3,3}) + 3(\lambda_{1,0} + \lambda_{2,4}) + \lambda_{0,0} + \lambda_{3,4} \leq 28, \lambda_{0,4} = \lambda_{1,3} = \lambda_{2,1} = \lambda_{3,0} = 0$, またはそれらの FCA の条件,

(3) $\lambda_{1,3} = 1, \lambda_{0,0} + \lambda_{3,4} \leq 2, \lambda_{0,4} = \lambda_{2,1} = \lambda_{3,0} = 0$, またはそれらの FCA, LCA, CCA の条件,

⋮

(VI) $m_1 = m_2 = 4$ ($\nu(m_1, m_2) = 37$) のとき,

$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,3} = \lambda_{2,x} = \lambda_{3,1} = \lambda_{3,2} = 0$ ($1 \leq x \leq 3$), さらに加えて

(i) $\lambda_{1,1} = \lambda_{3,3} = 1, \lambda_{0,4} \geq 1, \lambda_{4,0} \geq 1, 1 \leq \lambda_{0,0} + \lambda_{4,4}, \lambda_{0,0} + \lambda_{0,4} + \lambda_{4,0} + \lambda_{4,4} \leq 4, \lambda_{a,x} = \lambda_{b,0} = \lambda_{b,4} = 0$ ($a = 0, 4; 1 \leq b, x \leq 3$), またはそれらの FCA の条件,

(ii) $\lambda_{0,1} \geq 1, \lambda_{1,0} \geq 1, \lambda_{3,4} \geq 1, \lambda_{4,3} \geq 1, 1 \leq \lambda_{0,0} + \lambda_{4,4}, 4(\lambda_{0,1} + \lambda_{1,0} + \lambda_{3,4} + \lambda_{4,3}) + \lambda_{0,0} + \lambda_{4,4} \leq 36, \lambda_{0,y} = \lambda_{1,1} = \lambda_{1,4} = \lambda_{2,0} = \lambda_{2,4} = \lambda_{3,0} = \lambda_{3,3} = \lambda_{4,z} = 0$ ($2 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 2$), またはそれらの FCA の条件,

⋮

$C\Theta$ が推定可能である (よって, $XM_T = C$ となる行列 X が存在する) とき, $C\Theta$ の推定値は, $C\hat{\Theta}$ で, その共分散行列は, $\sigma^2 XM_T X'$ で与えられる. ここに, $\hat{\Theta}$ は正規方程式 $M_T \Theta = E'_T y(T)$ のある解である. $C\hat{\Theta}$ の中で一次独立な推定値の共分散行列を $\sigma^2 V_T$ とする.

定義 3 T を N 個の処理組合せをもつ $\text{SPBA}(m_1 + m_2; \{\lambda_{i_1, i_2}\})$ から得られる分解能 $R(\{00, 10, 01\}|\Omega)$ の $2^{m_1+m_2}$ -PBFF 計画とする. 同じ処理組合せ数 N をもつ $\text{SPBA}(m_1 + m_2; \{\lambda_{i_1, i_2}^*\})$ から得られるすべての分解能 $R(\{00, 10, 01\}|\Omega)$ の $2^{m_1+m_2}$ -PBFF 計画 T^* に対して, $\text{tr}\{V_T\} \leq \text{tr}\{V_{T^*}\}$ であるとき, T を GA-最適な計画という.

過飽和での追加実験の最適計画

埼玉大学・工 橋口博樹

1 Introduction and preliminaries

There has been much recent interest in supersaturated designs and their application in many fields, especially, computer aided engineering (CAE) in manufacturing industry. A design is said to be supersaturated if the number of factors in an experiment is greater or equal to the number of experimental runs. The benefit of supersaturated design is the use of screening experiments that determine which factors have a significant effect on a response with the assumption of effect sparsity.

In this paper, we show row sum equality for two Hadamard types of supersaturated design. Furthermore, we consider how to add some runs to the previous or original supersaturated design so that the experiment can be done sequentially. As numerical illustration, we evaluate a family of candidate supersaturated designs with eighteen factors and twelve runs in addition of two runs to ten initial runs.

Let \mathbf{X} be an $N \times k$ matrix of 1's and -1's, where $N < k + 1$. Each column of \mathbf{X} corresponds to a factor, and each row defines a factor-level combination. Assume that each column of \mathbf{X} contains the same number of 1's and -1's. It is also necessary that columns of \mathbf{X} are distinct. Booth and Con (1962), in the first systematic construction of supersaturated designs, proposed the criterion of minimizing

$$E(s^2) = \sum_{i < j} s_{i,j}^2 / \binom{k}{2} \quad (1)$$

where $s_{i,j}$ is the (i, j) th entry of $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$. A supersaturated design minimizing (1) is called $E(s^2)$ -optimal. Note that $s_{i,j} = 0$ when the i th and j th columns of \mathbf{X} are orthogonal. Thus $E(s^2)$ measures departure from orthogonality through the overall pairwise correlation among the k factors.

Tang and Wu (1997) showed that for any supersaturated design with k factors and N runs,

$$E(s^2) \geq \frac{k - N + 1}{(k - 1)(N - 1)} N^2 \quad (2)$$

They also showed that the lower bound in (2) is achieved by the following construction. Suppose $k = m(N - 1)$ and for $i = 1, \dots, m$, there exists an $N \times N$ Hadamard matrix $\mathbf{H}_i = [\mathbf{1} \ \mathbf{H}_i^*]$ such that $\mathbf{H}_1^*, \mathbf{H}_2^*, \dots, \mathbf{H}_m^*$ have distinct columns. Then $[\mathbf{H}_1^*, \mathbf{H}_2^*, \dots, \mathbf{H}_m^*]$ achieves the lower bound and is an $E(s^2)$ -optimal supersaturated design. Cheng (1997) gave unified treatment of Tang and Wu's optimality result and the optimality of Lin's (1993) half Hadamard matrices. Let \mathbf{H}^h be half Hadamard matrices \mathbf{H}^h such that

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{H}^h \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & * \end{bmatrix} \quad (3)$$

is an $N \times N$ Hadamard matrix and any two rows of $[\mathbf{1} \ \mathbf{1} \ \mathbf{H}^h]$ are orthogonal. If all of its columns are distinct, \mathbf{H}^h is an $E(s^2)$ -optimal supersaturated design.

2 Row sum equality for two Hadamard types of supersaturated design

The following two theorem is shown easily by Property 1 of Yamada and Lin (1997) and are useful to select columns for assigning factors to an supersaturated design, as mentioned in Iwata and Niki (2005).

Theorem 2.1 *Let $\mathbf{X} = [\mathbf{H}_1^*, \mathbf{H}_2^*, \dots, \mathbf{H}_m^*]$ be an $E(s^2)$ -optimal supersaturated design supposed that $k = m(N - 1)$ and an $N \times N$ Hadamard matrix $\mathbf{H}_i = [\mathbf{1} \ \mathbf{H}_i^*]$ such that $\mathbf{H}_1^*, \mathbf{H}_2^*, \dots, \mathbf{H}_m^*$ have distinct columns. For any $i \in \{1, \dots, k\}$ it follows that*

$$\sum_{1 \leq j \leq k} s_{ij}^2 = mN^2 \quad (4)$$

Table 1: Frequency of $E(s^2)$

| Pattern f | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | total |
|---------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E(s^2)$ | 8.05 | 8.47 | 8.89 | 9.31 | 9.73 | 10.14 | 10.56 | 10.98 | 11.40 | 11.82 | 12.24 | |
| # of $E(s^2)$ | 432 | 1698 | 5256 | 5886 | 9252 | 8010 | 9036 | 5250 | 3312 | 468 | 20 | 48620 |
| Freq. (%) | 0.89 | 3.49 | 10.81 | 12.11 | 19.03 | 16.47 | 18.58 | 10.8 | 6.81 | 0.96 | 0.04 | 100 |

Table 2: Eigen values of Pattern f

| | | | | |
|--------------|-----|---|------------------------|------------------------|
| Eigen values | -12 | 8 | $4(4 - \sqrt{4f + 5})$ | $4(4 + \sqrt{4f + 5})$ |
| Multiplicity | 8 | 8 | 1 | 1 |

where $s_{i,j}$ is the (i, j) th entry of $X^T X$.

Theorem 2.2 Let H^h be a half Hadamard matrix such that

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & H^h \\ 1 & -1 & * \end{bmatrix} \quad (5)$$

is an $N \times N$ Hadamard matrix and any two rows of $[1 \ 1 \ H^h]$ are orthogonal. Then it follows that

$$\sum_{1 \leq j \leq k} s_{ij}^2 = \frac{N^2}{2} \quad (6)$$

for any $i \in \{1, \dots, k\}$, where s_{ij} is the (i, j) th entry of $(H^h)^T H^h$. Note that H^h is an $\frac{N}{2} \times (N - 2)$ matrix.

3 Eigen analysis for supersaturated design with 10 runs and 18 factors

Next, we consider how to add tow runs to original supersaturated design so as to attain the $E(s^2)$ -optimality. We use Lin's (1993) supersaturated design with 10 runs and 18 factors, say X_1 , to conduct on the numerical illustration of eigen analysis. Let X_a be a new design after the addition such as $X_a^T = [X_1^T \ z_1 \ -z_1]$, where $z_1 \in \{-1, 1\}^k$ is a $k \times 1$ vector satisfying with $z_1^T \mathbf{1} = 0$. Our goal is to find z_1 so that X_a is the $E(s^2)$ -optimal supersaturated design. All enumeration for z_1 can be obtained by computer search because the total number is $\binom{18}{9} = 48620 \approx 5 \times 10^4$. They divide into 11 patterns with the same eigen values in Tables 1 and 2. These numerical results show that the equivalent class of $E(s^2)$ has same eigenvalues. General cases for such eigen analysis are future works.

References

- [1] Booth, K. H. V., Cox, D. R. *Technometrics*, **4**, 489-495 (1962)
- [2] Iwata, M., Niki, N. *to appear in proc. of IASC 2005*
- [3] Cheng, C. S. *Statistica Sinica*, **7**, 929-939 (1997)
- [4] Lin, D. K. J. *Technometrics*, **35**, 28-31 (1993)
- [5] Tang, B., Wu, C. F. J., *Canad. J. Statist.*, **25**, 191-201 (1997)
- [6] Yamada, S., Ikebe, Y., Hashiguchi, H., Niki, N. *J. Statist. Plan. Infer.*, **81**, 183-193 (1999).
- [7] Yamada, S., Lin, D. K. J. *Canad. J. Statist.*, **25**, 203-213 (1997)
- [8] Yamada, S., Lin, D. K. J. *Statist. Prob. Letters*, **45**, 31-39 (1999)
- [9] Yoshino, K., Nishina, K. *JAQC*, **34**, 5-12 (2004) (in Japanese)

1. 導入

定義 1. n をある正整数とし, $n \times m$ 配列 A を考える. 配列の各成分は $S = \{1, \dots, s\}$ とする. このような配列 A の任意の $n \times d$ 部分配列に対して, 長さ d のすべての順列がちょうど λ 回ずつ現れるとき, 行列 A は直交配列であるといい, $OA(n, m, s, d)$ で記す. m を制約数, s を水準, d を強さという (明らかに, $n = \lambda s^d$). また, 二つの直交配列 A, B に対して, A から列の置換・行の置換・列のシンボルの置換の組合せで B が得られるとき, 直交配列 A と B は同型であるという.

実験計画においてどのような OA を基盤に計画をたてるか (非同型な OA を使うことで構造の異なる実験ができる) という点で OA の同型分類は非常に重要である. しかし, 一般のパラメータでそれを行うことは非常に困難である. 本報告では, 3-水準の OA の数え上げに関する手法を提案する.

2. 数え上げの指標

ω を 1 の原始 3 乗根とし, $S = \{1, \omega, \omega^2\}$ とする.

定義 3. S をシンボル集合とする 3-水準の $n \times m$ 配列を $D = (d_{ij})$ とし, D の第 i 列を d_i とする. このとき, $t = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ ($l_i \in \{0, 1, 2\}$) に対して, $J(t) = J(l_1, l_2, \dots, l_m) = \sum_{i=1}^n (d_{i1})^{l_1} (d_{i2})^{l_2} \dots (d_{im})^{l_m}$ を行列 D の t に対する J -characteristic という. また, $J = (J(0, 0, \dots, 0), J(1, 0, \dots, 0), J(2, 0, \dots, 0), J(0, 1, \dots, 0), \dots, J(2, 2, \dots, 2))^T$ を配列 D に対する J -vector という. (明らかに $J(0, 0, \dots, 0) = n$ である.)

定義 4. D を S をシンボル集合にもつ $n \times m$ 配列とする. $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$, $r_i \in S$ を長さ m の行ベクトルとし, D の行ベクトルとして r が現れる回数を $N(r)$ とする. $N(r)$ を indicator function という. また,

$N = (N(1, 1, \dots, 1), N(\omega, 1, \dots, 1), N(\omega^2, 1, \dots, 1), N(1, \omega, \dots, 1), \dots, N(\omega^2, \omega^2, \dots, \omega^2))^T$ を D に対する indicator function vector という.

定理 1. H を G の m 個の Kronecker 積 $G \otimes G \otimes \dots \otimes G$ とする. このとき, $N = 3^{-m} HJ$ が成立する. ただし, $G = ((1, 1, 1)^T, (1, \omega^2, \omega)^T, (1, \omega, \omega^2)^T)$ とする.

補題 1. S をシンボル集合とする $n \times m$ 配列 D が $OA(n, m, 3, d)$ であることと, D の J -characteristic で $w(t) \leq d$ である任意の $t (\neq (0, 0, \dots, 0))$ に対して, $J(t) = 0$ であることは同値である. ただし, $w(t)$ は t のハミング重みとする.

D を $OA(\lambda 3^d, d+1, 3, d)$ とする. このとき, $w(t \neq (0, 0, \dots, 0)) \leq d$ なる $J(t)$ は補題 1 より 0 である J -vector からそのような座標位置をすべて除去した長さ $2^{(d+1)} + 1$ のベクトルを J^* -vector と呼び, また, その座標位置に対応する H の列を除去した $3^{(d+1)} \times (2^{(d+1)} + 1)$ 行列を K とする.

補題 2. S をシンボル集合とする 3-水準の $n \times (d+1)$ 配列 D において, D が $OA(\lambda 3^d, d+1, 3, d)$ であることと, $3^{-(d+1)} KJ^*$ の任意の成分が非負整数となる J^* が存在することは同値である.

次に, OA の行・列・シンボルの置換を J -characteristic の置換で表現することを考える.

(行の置換) D を $OA(n, m, 3, d)$ とする. このとき, D に対する J -vector は, D の行の置換で不変である.

(列の置換) D_A を $OA(n, d+1, 3, d)$ とし, D_B を D_A から列 i と列 j の置換によって得られる OA とするとき, $J_A(l_1, \dots, l_i, \dots, l_j, \dots, l_{d+1}) = J_B(l_1, \dots, l_j, \dots, l_i, \dots, l_{d+1})$ が成立する.

ただし, J_A, J_B はそれぞれ D_A と D_B に対する J -characteristic とする.

(シンボル ω, ω^2 の置換) D_A を $OA(n, d+1, 3, d)$ とし, D_B を D_A の列 i の ω, ω^2 の置換によって得られる OA とするとき, $J_A(l_1, \dots, l_i, \dots, l_{d+1}) = J_B(l_1, \dots, 2l_i, \dots, l_{d+1})$ が成立する. ただし, J_A, J_B はそれぞれ D_A と D_B に対する J -characteristic とする.

(シンボル $1, \omega, \omega^2$ の巡回置換) D を $OA(n, d+1, 3, d)$ とする. このとき, D の各列のシンボルの置換 $(p_1, p_2, \dots, p_m), p_i \in \{1, \omega, \omega^2\}$ と J^* -vector に対して $N(p_1, p_2, \dots, p_m)$ の座標位置に対応する K の行をアダマール積を演算として乗じることは同値である. ただし, (p_1, p_2, \dots, p_m) は $p_i = 1$ のとき第 i 列は置換なし. $p_i = \omega$ のとき第 i 列のシンボルを $(1 \rightarrow \omega, \omega \rightarrow \omega^2, \omega^2 \rightarrow 1)$ で置換, $p_i = \omega^2$ のとき第 i 列のシンボルを $(1 \rightarrow \omega^2, \omega \rightarrow 1, \omega^2 \rightarrow \omega)$ で置換するものとする.

3. $OA(9\lambda, 3, 3, 2)$ の同型分類について

$OA(9\lambda, 3, 3, 2)$ の同型分類について考える. 上の議論を用いて, OA の必要十分条件を満たしながら J -characteristic に順序をつけることで, 同型な OA を一意的に表現することで次の結果を得る.

定理 2.

1. $a_i + b_i + c_i = 3\lambda, a_i, b_i, c_i \geq 0, (i \in \{1, 2, 3, 4\})$
2. $\forall i \in \{2, 3, 4\}$ に対し, $(b_i - a_i) + (b_1 - a_1) = 3k', k' \geq -k$
3. $\forall i \in \{2, 3, 4\}$ に対し, $(c_i - a_i) + (c_1 - a_1) \geq -3k$
4. $\forall i, j \in \{2, 3, 4\} (i \neq j)$ に対し, $(b_i - a_i) + (b_j - a_j) + (c_1 - a_1) \geq -3k$
5. $\forall i, j \in \{2, 3, 4\} (i \neq j)$ に対し, $(c_i - a_i) + (c_j - a_j) + (b_1 - a_1) \geq -3k$
6. $\forall i \in \{2, 3, 4\}$ に対し, $a_i \leq b_i, a_i \leq c_i$
7. $a_2 \geq a_3 \geq a_4, a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \leq \min\{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 | i \in \{2, 3, 4\}\}$

これらの線形不等式のもとで次の線形方程式 $-3\lambda + \sum_{i=1}^4 a_i = 3k, (k = 1, \dots, k)$ の整数解 $(k, a_i, b_i, c_i (i \in 1, 2, 3, 4))$ は非同型な $OA(9\lambda, 3, 3, 2)$ と一対一対応し, また, 解全体は非同型な $OA(9\lambda, 3, 3, 2)$ 全体を決定する.

(注) 不等式 6, 7 で等号が成立する場合, 場合分けを必要とするがここではそれは省く.

最後に, 定理 2 で不等式 2, 3, 4, 5 を包含する順序付けを考え, 不等式 8 をシンプルな形にし, また, 定理 2 の一般の強さへの一般化を行うことが今後の研究課題である.

References

1. Hedayat, A., Seiden, E. and Stufken, J.; On the maximal number of factors and the enumeration of 3- symbol orthogonal array of strength 3 and index 2. *J. Statist. Plann. Inference.* 58 (1997) 43-63.
2. Hedayat, A., Stufken, J. and Su, G.; On the construction and existence of orthogonal arrays with three levels and indexes 1 and 2. *J. Statist. Plann.* 25-5 (1997) 2044-2053.
3. Stufken, J. and Tang, B.; Complete enumeration of two-level Orthogonal arrays of strength d with $d+2$ constraints. *Submitted for publication.*
4. Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A. and Stufken, J. *Orthogonal Arrays: Theory and Applications.* (1996) New York: Springer.

実務未経験者に対するQCシミュレーション教育効果についての考察

ー品質工学 望目特性実験シミュレーションの教育効果ー

松下電器産業株式会社 半導体社 清水 貴宏
神戸大学 発達科学部 稲葉 太一

1. はじめに

統計的品質管理は、モノづくりにおいて非常に重要と考えられるが、一部の企業で使用されているものの、実際に正しく運用されている企業は多くはない。

当社では、統計的品質管理教育を過去から行ってきたが、実運用や定着面について課題があり、より実践的でかつ実務への展開と定着を行うための教育システムを模索してきた。97年に品質管理学会 関西支部で発表した教育システムで、座学による統計的品質管理教育と実務の橋渡しをするQCシミュレーション教材を開発し、以降、独自に当社のモノづくりに応じたQCシミュレーションを開発してきた。

現在までに、紙飛行機・コイン発射・紙コプター・投石器と4つのQCシミュレーションを開発・導入し、日本国内だけでなく、中国・インドネシアでの技術・製造者に対する研修で効果を上げている。

今回、神戸大学 発達科学部において、実務経験のない学生を対象に、QCシミュレーションによる研修効果の有無を確認したので報告する。

表1 QCシミュレーション内訳

| QCシミュレーション | 使用する統計的品質管理手法 | 対象 |
|------------|---|-------------------|
| 紙コプター | ・散布図 ・特性要因図 ・ヒストグラム(+工程能力指数) | 製造中堅社員 |
| 紙飛行機 | ・チェックシート ・特性要因図 ・ヒストグラム(+工程能力指数) ・管理図 | 製造係長クラス 大卒新入社員 |
| コイン発射 | ・ヒストグラム ・単回帰分析 ・特性要因図 ・実験計画法(二元配置) ・検定/推定 | 技術新入社員 |
| 投石器 | ・ヒストグラム ・特性要因図 ・品質工学 ・検定/推定 | 技術中堅社員 |

2. QCシミュレーション教材

当社のQCシミュレーションは表1のような内訳で運用している。

従来のQCゲームは、「手法」を学ぶためのものが多く、実務に結びつくものが少なかった。また、主催者側が意図する範囲での条件ぶりや因子の選択など、受講者側の創意工夫や思考的改善の点が弱く感じられた。

当社においては、QCシミュレーションの開発視点として、

- ①受講者側の固有技術的判断や創意工夫による改善が行えること。
- ②実務を模擬できること。
- ③複数の統計的管理手法を駆使して分析し改善できることとしている。



図1 コルク

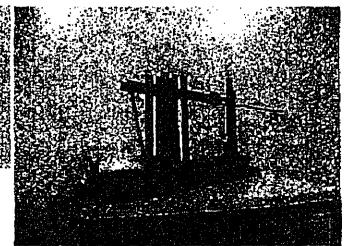


図2 発射台

2. 1 「投石器最適条件抽出」概要

「投石器最適条件抽出シミュレーション」は、図1のようなコルクを図2のような発射台を用いて、所定の位置にコルクが着地する最適条件を抽出するものである。

この発射台は、受講対象者に分かり易い因子として、図3にあるように、因子A：支点距離、因子B：ばね種類、因子C：支点位置、因子D：投石点調整距離、因子E：ばね位置を手引書に提示してある。これ以外にも、「ものを投げる」という原理・原則を考えれば、気づく因子が複数ある。

2. 2 実験手順

実験手順はQCストーリーに従って、以下の様な手

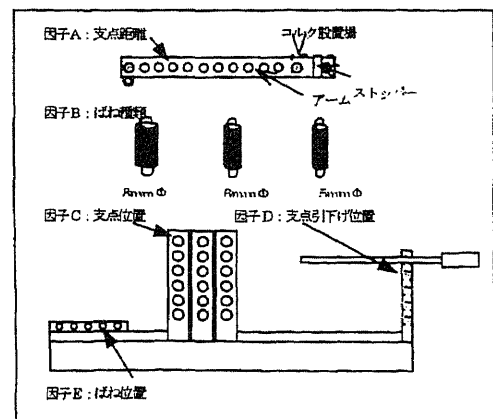


図3 初期条件

順で行う。

- 手順 1. 目標の提示
- 手順 2. 現状把握(ヒストグラム作成)
- 手順 3. 要因分析(特性要因図作成)
- 手順 4. 投石方法の確立
- 手順 5. 主要因抽出と水準決定
- 手順 6. 割付と実験(L18)
- 手順 7. データ処理(SN 比と感度算出)
- 手順 8. 要因効果図と最適条件抽出
- 手順 9. 工程平均と利得算出
- 手順 10. 感度調整
- 手順 11. 確認実験

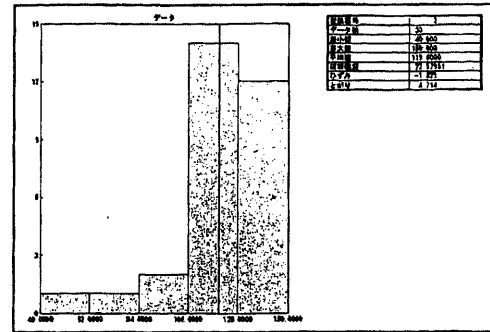


図4 初期分布

3. 実施例

図3のような初期条件でn=30のコルク飛距離データを収集し、ヒストグラムを作成させると図4の結果を得た。飛距離が極端に短いデータがあるが、受講生に投石時の状態をヒヤリングすると「コルクが引っかかって飛ばなかった」との回答があり、投石時にコルクが引っかからない投石状態を検討させた。

受講生は4因子(因子A: 支点距離, 因子B: ばね種類, 因子C: 支点位置, 因子D: 支点引下げ位置)を選択した。水準は因子A: 2水準, 因子B, C, Dを3水準として、混合直交表L18に割付実験を行った。結果を表2に示す。次式に従って、SN比と感度を算出し、図5の要因効果図を作成する。

$$SN \text{ 比: } \eta = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} (S_m - V_e) \right) \quad \text{感度: } S = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} (S_m - V_e) \right)$$

SN比の高い各因子の水準を選択し、SN比での最適条件を推定した後、目標感度への感度調整を行い、最終の最適条件抽出を行う。

3. 1 実施における受講生の反応

表3のように受講後、受講生からは、

- ①データと分析の大切さ
- ②固有技術の重要性
- ③ものづくりの楽しさ

を理解できたと回答している。

4. まとめ

本研修をものづくり未経験の学生を対象に実施したが、シミュレーション形式の教育は、実務を擬似的に体験させ、データの重要性や創意工夫によるモノづくりの楽しさを理解し、統計的管理手法がモノづくりに重要であることを理解させることが出来る有効な方法であることが確認できた。

表2 混合直交表(L18)への割付と実験結果

| 因子 | A B C D | | | | コルク飛距離(単位:cm) | | |
|----|---------|-----|-----|-----|---------------|-----|-----|
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 8 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| 9 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| 11 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 12 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 13 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 |
| 14 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| 15 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| 16 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 17 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 18 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |

現行条件

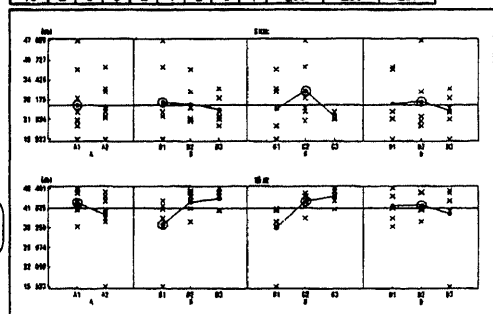


図5 要因効果図

表3 受講生感想

| 受講生 | 感想(要約) |
|-----|---|
| A | 授業を通してSN比を重視、因子を少なくした結果良かった。実際の授業では、もっと多くの因子を使っていると思うので、興味は高まると思う。 |
| B | 作業や実験の正確さがモノづくりに重要だと実感した。 |
| C | 今回の実験で失敗した経験もあったが、他のメンバーと協力してシミュレーションで検証できたことは非常に良かった。今後の授業に活かしたい。 |
| D | 統計的な実験で結果を出すことは初めてだったので、非常に楽しかった。実験結果でよい結果が得られたのにコンテストで負けて悔しかった。機会があれば、また参加したい。 |
| E | SN比を高めるだけじゃなくて目標値に近づけようとしたが、因子が少なく困難だった。目標値と感度を高めることで自分たちのデータの強みからしるべき課題を見た。 |
| F | 因子抽出においても「ものを飛ばす」という原理・原則を考えた。実際に飛ばす実験も楽しかった。実際に飛ばす実験も楽しかった。実際に飛ばす実験も楽しかった。 |
| G | 授業を通してデータと分析の大切さ、固有技術の重要性、ものづくりの楽しさを理解できた。今後の授業に活かしたい。 |

CCCP を用いた DNA library screening のための positive detecting algorithm

慶應義塾大学・理工 上原 啓明

DNA library screening において、大量の DNA の断片 (A, T, G, C の塩基列) の中から、ある試験に対して陽性 (positive) 反応を示す塩基列 (clone と呼ぶ) を見出す試験が行われる。そのための一つの方法として、2 段階グループテストと呼ばれる次のような検査方法が用いられることがある。 n 種の各 clone を一つ一つテストすると n 回のテストが必要になるが、通常、positive clone の割合は、0.0001~0.005 程度のことが少なくない。このような場合、複数の clone をひとつにまとめてそのグループ (pool と呼ぶ) に対して、反応試験を行うことによって、試験の回数を減らすことができる。たとえば、ある pool の試験の結果が negative の場合には、そこに含まれるすべての clone が negative であることが 1 回の試験で判定できる。一方、positive の場合には、その中のいずれかの clone が positive であるとわかるので、個別に試験を行うことによって positive な clone を識別できる。試験に用いられるさまざまな clone の集合からなる pool の族を pooling design と呼び、各 pool に対する反応試験の結果から個々の clone が positive である確率を推測する方法を pooling experiment と呼んでいる。そして、その確率の高い clone に対して個別に試験を行うことによって positive clone を判定できる。pooling design は 2 部グラフ (タナーグラフ) あるいは結合行列 (検査行列) で書くことができる。

しかし、このような反応試験では pool に対する試験の結果に false positive, false negative などの判定誤りが起こることは避けられない。それらの誤りの存在を仮定して、その下で判定誤りの確率を小さくする実験の計画が必要である。また、これらの試験で得られた結果から推定値を直接計算するには、 $2^n - 1$ 通りの場合についての和を計算する必要があるが、計算量が膨大になり、したがって、高速で精度の高い識別アルゴリズムの開発が重要である。

識別アルゴリズムには、Knill ら [1] による MCMC (Markov chain Monte Carlo) 法を用いたアルゴリズム MCPD (Markov chain pool results decoder)、および、上原・神保 [2] によるベイジアンネットワークを用いたアルゴリズム BNPD (Bayesian network pool results decoder) がある。BNPD は MCPD より高速であり、タナーグラフに短い loop が存在しない場合、MCPD と同等の識別能力を有するが、タナーグラフに短い loop が存在する場合、識別能力が低くなってしまうことがある。そこで、本発表ではその欠点を補うために CCCP (concave convex procedure) [3] を用いた識別アルゴリズム CCPD (concave convex procedure pool results decoder) を開発し、これらのアルゴリズムの識別能力をシミュレーションにより比較した。

シミュレーションでは、Knill ら [1] で用いられている clone の数を 1298, pool の数を 47, 各 clone の反復数 (各 clone を含む pool の数) を 4 とした pooling design を用いた。この pooling design には短い loop が含まれている。positive clone の数を 3 個とし、300 回のシミュレーションを行った。

シミュレーションの方法は、まずいくつかの clone を選んで positive とし、それにしたがって各 pool が positive であるか否かによって、各 pool の反応結果をあらかじめ与えておいた誤り確率に従うように定める。そして、それぞれのアルゴリズムにより、各 clone が positive である確率を評価し、確率が高い順に並べ、真に positive である clone のうち最も順位が低いものに注目し、300 回のうち最も順位が低いものが x 位以内であった回数 y を図 1 に表示した。この結果より、positive 識別能力は (MCPD) > (CCPD) > (BNPD) の順でよいことがわかる。さらに、計算時間は表 1 のより (BNPD) > (CCPD) > (MCPD) の順でよいことがわかる。

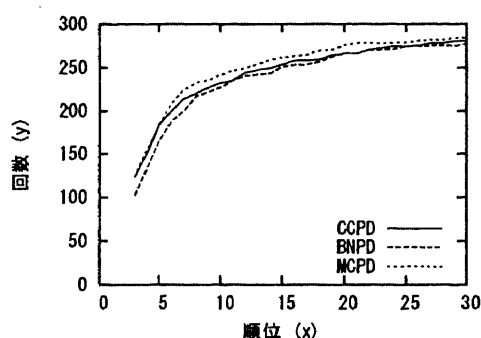


図 1: positive 識別能力
clone 数 $n = 1298$
positive clone の数: 3

表 1: 計算速度

単位: 秒

| n | CCPD | BNPD | MCPD |
|-------|-------|------|-------|
| 981 | 0.22 | 0.00 | 1.91 |
| 1298 | 0.27 | 0.01 | 2.49 |
| 3088 | 0.81 | 0.02 | 8.49 |
| 6371 | 1.68 | 0.05 | 17.60 |
| 10121 | 3.33 | 0.09 | 27.73 |
| 30050 | 11.09 | 0.26 | 81.80 |

CPU: Intel® Xeon™ 3.06 GHz

OS: Red Hat Linux 9

したがって、個別試験を行う前の第 1 段階の pooling experiment においては、タナグラフに短い loop が存在しない場合には BNPD を用い、そうでない場合には CCPD を用いると、短時間で比較的よい十分な識別能力が得られると思われる。

参考文献

- [1] E. Knill, A. Schliep and D. C. Torney (1996), Interpretation of pooling experiments using the Markov chain Monte Carlo method, *Journal of Computational Biology*, **3**, 395-406.
- [2] H. Uehara and M. Jimbo (2005), A positive detecting code and its decoding algorithm for DNA library screening, *Journal of Computational Biology*, submitted.
- [3] A. L. Yuille (2002), CCCP algorithms to minimize the Bethe and Kikuchi free energies: convergent alternatives to belief propagation, *Neural Computation*, **14**, 1691-1722.