１次元ベニー方程式に付随した乱流拡散と一般化コーシー過程

Turbulent Diffusion associated with the 1D Benney Equation and a Generalized Cauchy Process

金野秀敏

筑波大学　機能工学系

１．はじめに

“ソリトン乱流” という言葉が Complex Ginzburg-Landau (CGL) 方程式 [1,2] や Kuramoto-Shivashinsky (KS) 方程式 [3,4] の乱れた時空発展方程式で提出されてから久しい．実験では，古くは液膜流などで波形が観測され [5]，埋め込み次元や相関次元が計算されている [6] のみで詳しい解析はなされていない．また，Pt 単結晶上での一酸化炭素の酸化反応 [7] ではソリトン乱流や渦乱流などの多様な乱流状態も観測されている．Rayleigh Benard 対流の最近の実験では，多様な渦（ターゲット型渦，右巻き渦，左巻き渦やそれらの束縛状態や混合状態）が観測されている [8,9].

複雑な３次元非線型素励起の時・空ダイナミクスに関係した非線形素励起は上記のほかに欠陥，ホール，キンク，ショックなどがあり多彩である．“乱流状態” におけるこれらの実在系の実験に対応する理論モデルから生成される定量解析もあまり進んでいない．ここでは，１次元ベニー方程式の乱流状態における非線形素励起の数値計算の結果を紹介 [10,11] し，その確率・統計的な解析の試みを紹介する [10,11].

２．ベニー方程式のソリトン乱流

１次元のベニー方程式は次のような簡単なモデルである：

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

ここで，α は正であるとする（異常拡散または負拡散），また，γ は異常拡散によるシステムの不安定性を回復するために必要である．α がゼロの極限では KdV 方程式に帰着し，β がゼロの極限では Kuramoto-Sivashinsky 方程式に帰着する．

川原・藤 [3] らは系が乱流状態にある場合の数値計算で得られた波数スペクトルを１ソリトンが格子状にならんだ描像（ソリトン格子アプローチ）で定性的に説明可能であることを提唱，実行してきた．

しかし，このような簡単な方程式系であっても関係した非線型素励起 (nonlinear localized structure) はソリトンのみで定量的に十分な理解が可能とは言えない場合が多い．すなわち，粒子の生成・消滅を内包し，異種の素励起相互作用が重要な役割を果たしている高次元カオスであり，何らかのフラクタル構造や乱流拡散的な性質があると期待される．

３．分岐パラメータ

(1) 式をスケール変換

$$u \Rightarrow (\frac{\alpha^3}{\gamma})^{1/2} u,\ x \Rightarrow (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2} x \ \text{ and } \ t \Rightarrow (\frac{\gamma}{\alpha^2}) t\ .$$

して書きかえると

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \delta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \tag{2}$$

となり，分岐パラメータは

$$\delta = \beta/(\alpha\gamma)^{1/2} \tag{3}$$

$\delta \to 0$ の極限では (1) はKS 方程式に収束し，$\delta \to$ large の極限では (1) はKdV 方程式に収束する．また，もうひとつの分岐パラメータはシステムサイズ L である．

4．ソリトン解，カオス，相互作用ルール

座標系 $z \equiv x - ct$ and $u(z,t) = U(z)$ では

$$U''' + \delta U'' + U' + \frac{1}{2}U^2 - cU = 0 \tag{4}$$

を境界条件 $U = U' = U'' = U''' = 0$ のもとで解けば良い．$\delta = 0.043$ に対するソリトン解としては (a) One soliton solution; (b) Two soliton solution; (c) Double-peaked solution ;(d) Two double-peaked solution などが得られる．

特性方程式は

$$\lambda^3 + \delta\lambda^2 + \lambda - c = 0 \tag{5}$$

となるから，これの解 （$c > 0$ for $\delta \leq 3.71$） の型は

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \text{and} \quad \lambda_{2,3} = \lambda_R \pm \mathrm{i}\lambda_I \tag{6}$$

ここで，$\lambda_R \leq 0$．　KS 極限では　$c = 1.2161501239587$ に対して固有値は

$$\lambda_1 = 0.766251744506807 \tag{7}$$

$$\lambda_{2,3} = -0.383125871419907 \pm \mathrm{i}\ 1.20014846324921 \tag{8}$$

となるから Shilnikov type chaos の存在が示唆される．実際，分岐パラメータ $\delta \to large$ のときにはソリトンの伝播は直線運動であるが，$\delta \to small$ となりソリトンのジグザグ zig-zag 運動が起こるようになる（shilnikov chaos が発生する）．しかし，もっと分岐パラメータが小さくなり $\delta = 0.043$ のときにはソリトンの生成・消滅過程がカオス的運動をともなって発生する．

しかし，ソリトン的な素励起の生成・消滅則は大まかには

$$0 \to X$$

$$2\,X \to \ X$$

となって非常に単純な規則が見てとれる．このような規則は回転シリンダー内の油膜の運動の実験でも明確に観測されている [12]．しかし，上記の解析ではソリトン乱流の特性を明確にとらえられない．

5．確率論的定量解析

ソリトン X と輻射 Z を介在とした相互作用：

$$Z \to^{k_1} X\ , \tag{9a}$$

$$2X \to^{k_2} X\ , \tag{9b}$$

and

$$X \rightleftharpoons^{k_3}_{k_4} X + Z\ . \tag{9c}$$

を導入し，輻射 Z を断熱消去すると定常状態でのソリトン数 X の確率密度関数は

$$P_s(X) = \frac{P_0}{E(X)} \exp\{(\frac{\epsilon_1}{3}X^3 + \frac{\epsilon_2}{2}X^2 + \epsilon_3 X) + \frac{\epsilon_4}{2a}\log(aX^2 + bX + c) - (\alpha_5 - \frac{\epsilon_4}{2a}b)I\} , \qquad (10)$$

ここで，$a = k_4^2(D_{XX} - 2D_{XZ} + D_{ZZ})$ ，$b = 2k_1k_4(D_{XX} - D_{ZZ})$ $c = k_1^2(D_{XX} + 2D_{XZ} + D_{ZZ})$ ，
$\epsilon_1 = -\frac{k_2k_4}{a}$ $\epsilon_2 = -\frac{2k_1k_2k_4}{a} - \frac{b}{a}\epsilon_1$ $\epsilon_3 = \frac{2k_1k_3k_4}{a} - \frac{k_1^2k_2}{a} - \frac{\epsilon_1 c}{a} - \frac{\epsilon_2 b}{a}$, $\epsilon_4 = 2k_1^2k_3 - b\epsilon_3 - c\epsilon_2$ ，$\epsilon_5 = -\epsilon_3 c$
ここで，

$$I = \int \frac{dX}{aX^2 + bX + c} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{b + 2aX}{\sqrt{\Delta}} ,$$

$$\Delta = 4ac - b^2 .$$

のように求まる．数値実験で得られたソリトン数の揺らぎのサブ・ポアソン性を説明するためには，ソリトンと輻射数の雑音源の相関を負の値，$D_{XZ} < 0$, にする必要があることがわかった．

光子数の squeezed state の解析に Yuen [13] が負の拡散係数を持つ Fokker-Planck の方程式を使ったが，数学的には類似の解析といえる．一方，物理的には光子がバンチングすることによって，光の場の揺らぎが抑えられており，光子の計数がサブ・ポアソン統計に従うことになっていた．

このようなソリトン系ではソリトンがバンチングしていることになっているのだろうか？ソリトンの間隔分布を調べてみると，２ソリトン解（(b) Two soliton solution）のピーク間隔がソリトン乱流状態のソリトン間隔に近い値をとることがわかった．ソリトン乱流中の２ソリトン束縛状態の存在確率が高いことが示されたものと考えられる．

６．異常拡散と一般化 Cauchy 過程

ソリトン乱流の中に構造やソリトンの束縛状態があることを述べたが，乱流の特性は確率・統計的解析ではどのようにしてとらえられるのだろうか？ 一様乱流の場の特性をとらえるために，テスト粒子をトレーサーとして解析することが古くから行なわれてきた．

ここでも，同様の方法を踏襲して平均自乗距離を推定したところ

$$\langle [\Delta r(t)]^2 \rangle \sim t^\eta \qquad (11)$$

$$\eta \approx 1.2 \sim 1.4 \quad (\mathrm{super-diffusion}) \qquad (12)$$

程度の推定値が得られた． KS 方程式では次の１次元確率バーガース方程式

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = f(x,t) \qquad (13)$$

where

$$\langle f(x,t)f(x',t') \rangle = -\Gamma\nabla^2\delta(x-x')\delta(t-t') \qquad (14)$$

と同様のスケール則が成立していることが知られており [14]，Scaling form は Foster, Nelson and Stephen [15] に従って

$$\langle u(x+r, t+\tau)u(x,t) \rangle \to \tau^{-1/z} H(r^z/\tau) , \qquad (15)$$

ここで $H(\xi)$ は scaling function であり，拘束条件は $\lim_{\xi\to\infty} H(\xi) = 0$; $\lim_{\xi\to 0} H(\xi) = const$
$z = 3/2$ で与えられるから

$$\sigma^2 = \langle [\Delta r]^2 \rangle \sim t^{4/3} \qquad (16)$$

となることが示せるが，分散項が入ったベニー方程式では１次元のバーガース方程式の揺動力などの項を修正しなくてはならない．しかし，これはなかなか難しい．そこで，コーシ過程を分岐パラメータ δ を変化させた数値実験の値が再現できるように一般化することを考えよう．

Smoluchowsky 近似のもとでの Brown 運動の方程式は

$$\dot{x} + \frac{1}{\zeta}\frac{d}{dx}V(x) = \frac{1}{\zeta}F(x,t) \qquad (17)$$

ここで，

$$\frac{1}{\zeta}V(x) = v_0 + \alpha x^2 + \beta x^4 \tag{18}$$

$$\frac{1}{\zeta}F(x,t) = F_a(t) + xF_{p1}(t) + x^2 F_{p2}(t) \tag{19}$$

を $(F_a(t), F_{p1}(t), F_{p2}(t)$ はいずれも止規白色雑音で強度はしれぞれ $D_a, D_{p1}, D_{p2})$ 仮定すると，Cauchy 型の分布として次の３つが考えられる：

(Case I)

$$P_s(x) = P_I\ [D_a + D_{p1}x^2]^{-k_0} \tag{20}$$

(Case II)

$$P_s(x) = P_{II}\ [D_a + D_{p1}x^2 + D_{p2}x^4]^{-k_0} \tag{21}$$

(Case III)

$$P_s(x) = P_{III}\ x^{k_1}\ [D_{p1}x^2 + D_{p2}x^4]^{-k_2} \tag{22}$$

以下では，最も簡単な I 型のみ考察する． I 型の Langevin 方程式は 1 個の正規白色雑音を有する次の方程式と等価である ：

$$\dot{x} = -(2\alpha - D_{p1})x + \sqrt{D_a + D_{p1}x^2}\xi_m(t) \tag{23}$$

確率密度関数は次のようになる

$$P_s(x) = P_0(D_a + D_{p1}x^2)^{-(\alpha/D_{p1}+1/2)}\ . \tag{24}$$

(A) 次の条件が満たされるとき分散は発散する：

$$\alpha/D_{p1} + 1/2 < 1\ \ (2\alpha - D_{p1} < 0)\ . \tag{25}$$

一方，(B) 次の条件が満たされるとき分散は有限に留まる：

$$\alpha/D_{p1} + 1/2 > 1\ \ (2\alpha - D_{p1} > 0) \tag{26}$$

分散が発散する場合，平均２乗距離は時間的には次のように指数発散してしまうことになる：

$$\langle x^2 \rangle \sim \exp(\psi t)$$

ここで

$$\psi = 4(D_\eta - \alpha) \tag{27}$$

この指数発散を回避する安易な方法は相乗性雑音の項を fractional order の非線形項に置き換えることである：

$$x\eta(t) \Rightarrow x^\epsilon \eta(t) \tag{28}$$

すると，power-law 発散が復活する：

$$\langle x^2 \rangle \sim t^{2H} \tag{29}$$

ここで，

$$2H \sim 2/(2-\epsilon) \tag{30}$$

特別な場合として $\epsilon = 2/3 \quad 2H = 3/2$ (KS turbulence)，$\epsilon = 4/3 \quad 2H = 4/3$ (3D turbulence) となる．

7．まとめ

ここでは，1次元ベニー方程式のソリトン乱流領域での確率過程や統計解析を援用した定量解析の一端を紹介した．システムのダイナミクスの記述には他の多くの統計量や他の非線形素励起に注目した解析が必要である [10,11].

まえがきにも紹介した空間高次元系での多彩で複雑な現象を記述し，メカニズムを理解するためには，数値シミュレーション結果や実在系での実験データの詳細な確率過程・統計解析を援用した定量的検討が必要だろう．

参照文献

[1] H. T. Moon, Rev. Mod. Phys. 65 (1993) 1535.
[2] H. T. Moon, Phys. Fluids A3 (1991) 2709.
[3] 川原琢治，ソリトンからカオスへ，朝倉書店，1993.
[4] S. Toh, J. Phys. Soc. Jpn, 56 (1987) 949.
[5] 川原琢治，液膜流におけるソリトン，数理科学 260 (2)(1985) pp.54-61.
[6] K. Mori et al, Bull. Mech. Soc. Japan 58 (1992) 184. (in Japanese)
[7] M. Eiswirth, M. Bär and H. H. Rotermund, Physica D84 (1995) 40.
[8] R. E. Ecke, Y. Hu, R. Mainieri, G. Ahlers, Science 269 (1995) 1704.
[9] M. C. Cross and Y. Tu, PRL 75 (1995) 834.
[10] H. Konno and P. S. Lomdahl, J. Phys. Soc. Jpn., 69 (2000) 1629.
[11] H. Konno, Proc. of ISM Symposium 2001, Statistical Researches in Complex Systems, pp. 25-37.
[12] F. Melo and S. Douady, PRL 71 (1993) 3283.
[13] H. P. Yuen and P. Tombesi, Optics Commn. 59 (1986) 155.
[14] Y. Yakhot, Phys. Rev. A24 (1981) 621.
[15] D. Forster, D. R. Nelson and M. J. Stephen, Phys. Rev. A16 (1977) 732.