

〈研究論文〉

H. Freudenthal の数学的活動論に関する一考察

—— Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を当てて ——

磯 田 正 美

H. Freudenthal の数学的活動論に関する一考察

—— Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を当てて ——

磯田 正 美

はじめに

数学的活動の教育は、そのものが目標として示されるか否かは別としても、数学の内容指導の中で必然的に行われてきた。数学教育界で、世界規模で活動が目標として注目されたのは、公理体系を象徴する集合と構造を基礎に教育課程を再構成しようとする New Math 運動に対する反動においてである。特に、運動が先行した米国における批判の皮切りとしては、Polya, G. 等の著名数学者連名による行き過ぎた現代化への批判がよく知られている (Ahlfors, L. et al 1962)。その批判の根拠として記されたのが、数学を知るとは数学することや数学することができるようになることにあるとする活動を目視する考え方である。

前半生を数学者、数学史家として送り、晩年に数学教育学研究を行ったオランダの Freudenthal, H. (1905-1990) は、そのような時代に数学教育国際委員会委員長を務め、数学とは活動であるという認識のもとで数々の数学教育著作を著し、数学教育の国際誌を創刊し、今日、世界の数学教育に広く影響を及ぼす Utrecht 大学の Freudenthal 研究所の設立に尽力した人物である。特に数学教育国際委員会 ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) は2004年の数学教育国際会議より Freudenthal の名を冠する功績賞を設けることを決めている。それは、彼が、世界の数学教育界に残した足跡の大きさを物語るものである。

彼の数学的活動論は、世界で知られた活動論であるばかりでなく、日本の教育課程に記され

た活動観と重なる¹⁾こともあり、日本でも度々参照されてきた (例えば、岡田稔雄 1977, 1978, 1979, 1981, 山口潤一郎 1995, 1996)²⁾。そして、彼の最晩年の頃から今日までは Freudenthal 研究所の活動論がよく参照される。

現在、Freudenthal 研究所が推進する現実的数学教育 RME (Realistic Mathematics Education)³⁾ は、同研究所の著作物が示す通り、Freudenthal の数学的活動論を踏襲したものといみなされる。しかし、RME が忠実に Freudenthal の考えを踏襲したかと言えば、そうとも言えない⁴⁾。本稿では、どう継承されたかを問題意識として、Freudenthal 研究所における今日の数学化論と Freudenthal 自身による元々の数学的活動論とを比較し、Freudenthal の数学的活動が備える特質を確認することを目的とする。

そのために、以下、第1章では、Freudenthal が数学的活動を問題にした背景を彼の New Math 当時の数学教育研究批判を軸に指摘する。続く第2章では、Freudenthal が学校数学において実現することを求めた数学的活動である数学化を彼自身がいかなる視野から記述したかを明らかにする。最後に、第3章では、現実的数学教育における漸進的数学化論と Freudenthal の数学化論の相違を明らかにし、逆のその相違から、Freudenthal の数学的活動論の特質が水準論にこそあることを指摘する。

1. Freudenthal の数学的活動論とその背景

ここでは、New Math 当時、Freudenthal がどのような問題意識から自身の数学的活動論を提案したかを述べる。

(1) Freudenthal の数学的活動を規定する用語
「数学化」

数学を集集合と構造にはじまる系統とみなした1950年代に遡る New Math 運動に対して、1960年代から1970年代にかけて数学の本性を人間活動に認め、それを数学教育の目標とすべきであるとする思潮が広まる。それを、New Math 運動の後期とみなす場合もあるが、今日の数学教育思潮へ展開する契機という意味では Wheeler, D. (1975) の提唱した数学教育人間化運動のはじまりともみなしえる。

Freudenthal は、New Math 運動を批判し、その人間化運動の思潮を率いた人物の一人とみなされる。彼の数学的活動論は、数学化という語に象徴される。彼の主張が、数学化という言葉で国際会議の席上で提案されたのは、Freudenthal が、数学教育国際委員会 ICMI の支援を得て組織した1967年のコロキウム「なぜ有用なものとして数学を教えるべきなのか」においてであった。そこで、出席者は一貫して数学的活動の分析を行っており、中でも彼は、講演録の中で次のように述べている。

「問題は『どのような数学を』にあるのではなくて『どのように数学を教えなければならないか』にある。その第一原則は、数学とは、実在を数学化することを意味しているということにある。～中略～人間が学ばなければならないのは、閉じた体系としての数学ではなく、むしろ活動としての数学、すなわち、実在を数学化する過程や、できるならば数学を数学化する過程である」(Freudenthal, H., 1968, p. 7: 以下, Freudenthal とわかる場合には年、ページのみ記す)

Freudenthal は、ここで「活動としての数学」と「閉じた体系(所産)としての数学」とを対置する¹⁰⁾。そして、生徒が学べきは、「閉じた体系としての数学」ではなく「活動としての数学」であることを指摘し、「活動としての数学」の言い換えとして「数学化」を提起している。そこでは、数学学習が数学化によるべきとする指摘がなされたのである。

後に Freudenthal は、「教育課題としての数

学」(1973)の中で、学問としての数学における数学化を、次のように記述した。

「科学が単なる経験の集積から脱却するや否や、科学は経験の組織化を必然的に含むこととなる。経験が算術と幾何で組織されることを示すのは難しいことではない。実在を数学的方法で組織することは、今日数学化と呼ばれる。しかしながら、数学者は、論理的関係がより早い進歩を保証するや実在を無視するようになる。数学的経験が蓄積される。その蓄積は一部が組織されることが求められる。この要求に対し、どのような方法(means)が使えるのか。もちろん、再び数学的方法である。これが数学自体の数学化のはじまりである」(1973, p. 44)

この記述に従えば、Freudenthal の言う数学化は、「経験の蓄積を対象として、数学的方法により組織すること」と定義付けることができる。そこでは、活動の本質が、数学的方法による再組織化という自己更新におかれている。教育学における Dewey の活動論、そして心理学における Piaget の活動論においても活動は、自己更新過程として描かれる。Freudenthal の数学化論は関連領域の語用とよく整合し(磯田 1984)、構成主義を基調とする今日の数学教育にも生きるものである。

特に Freudenthal が、数学化と数学的活動を同義とみなしていることは、例えば、次のような記述に現れる。「数学的活動とは、経験領域を、組織化する活動である。経験領域の組織化は、数学に限らないが、数学における組織化の方法は、極めて専門的な方法によっている。」(1973, p. 123)

以上のような「数学化」に焦点化した Freudenthal の数学的活動の規定は、彼の数学者ならびに数学史家としての彼の経験に基づくものである。彼の数学活動論は、New Math 当時における教育課程組織論やそこでの参照理論を批判をする形式で展開された。以下、その批判を参照することで、彼が数学化を提唱した背景を明らかにする。

(2) 再発明としての数学化

彼は、活動を教えるには活動を示すこととい

うコメニウスの考えを引用し、それを一層、今日的に言い換えるものとして「活動を学ぶ最良の方法は活動することである」という原理を記している(1973)。ここで活動とは、前述の数学化である。数学は数学化によって構成されてきたものであり、それを学ぶ最良の方法は数学化することなのである。コメニウスの原理の言い換えにこだわるのは、その点を明確化しないと、集合と構造ではじまる数学の系統を活動によって指導するというような、Freudenthal からみれば誤った事態も正当化しえるからである。

Freudenthal は、数学を教程化していく過程において生じる誤りの起源を次の二つに求めている。一つは、所産(体系)を前提に公理から順に教えようとする、すなわち、数学を活動としてではなく、所産とみなし、所産を所産として教えようとする誤りである。そこでは、公理から積み上げてみせることが活動とみなされる。Freudenthal は、そのような指導を、反教授学的な逆転と呼んでいる。

もう一つは、数学を所産とみなしながらも、それを活動的に工夫して教えようとする誤りである。Freudenthal はそのような指導を、教材の静的解釈により生まれる「おとぎ話」と呼んでいる。

この二つの誤りに対して、彼が提案する指導法は、「活動として解釈し、分析することで構成された指導方法」(1973, p. 120)としての再発明の指導法である。再発明とは、彼においては数学における活動にある数学化を学校数学において実現する方法である⁶⁾。再発明とは、人類の歴史的な発明を繰り返し再発明する⁷⁾ことを学校数学の学習に求めて用いられた言葉である(1973, p. 102)。数学化はその発明の過程が数学的方法による絶え間ない再組織化によるものであることを象徴しており、その活動を学校数学において実現する指導方法が再発明の指導方法なのである。

その再発明は、反教授学的な逆転と、教材の静的解釈と対置して特徴づけられる。再発明と反教授学的な逆転、再発明と静的解釈などとの対置は、後に彼の数学教育研究の一主題となる

教授学的現象学の提唱にも結びつく意味で重要であり、以下、詳述しておく。

(3) 反教授学的な逆転

反教授学的な逆転とは、後述するように数学とは演繹構造であるという論理分析(analysis)に立ち、数学は構造によって、教師や著者が信じる特定の演繹体系によって実現されるべきとする考え方である(1973, p. 103)。

それは、歴史的な発明の過程とは逆転した順序で指導するもので、Freudenthal の期待する活動である数学化を生徒自身が進める余地を無くすがゆえに反教授学的である。Freudenthal は、自身の数学史研究上の業績である数学的帰納法の場合で、このことを例示している。

「数学的帰納法(の原理;引用者)は、ある人々にとっては、生徒自身が定義付けるまでの再発明ができると認められる原理である。数学的帰納法を発明するには、数学的帰納法に関連した自明ないし自明でない凡例に親しんでいることが前提として想定される。歴史的には、たぶん二項定理(パスカルの三角形;引用者)がその前提になっていた。ところが、教科書では、二項定理は、数学的帰納法によって証明する。～中略～ ペアノの公理から数学的帰納法の原理を定理として演繹することは、演繹的教程(course)と言える。これは反教授学的な逆転のいい例である。実際、学習過程を分析すると、演繹的教程は、(歴史的発明過程とは;引用者)正反対であることがわかる。～中略～ 数学的帰納法は、太古以来用いられてきた。「多角数」はこの原理の意義深い適用である。この原理を意識的に受けとめ、定式化した最初の人パスカルである。きわめて新しい言語的命題に基づくその定式化は、注目すべき功績である。～中略～ かなり後になって、公理化の過程において、デデキントとペアノがその原理を定義付ける再解釈に従事する」(1973, pp. 122-123)

Freudenthal は、このような反教授学的な逆転が、教材の論理分析によってもたらされることを次のように指摘する。「(再発明を求めるソクラテスの対話法⁸⁾とは;引用者)極めて異なる指導方法がある。その指導方法の哲学は、指

導は系統的であるべきであり、その系統は教材の論理分析の結果であるか、さもなくば結果の逆順によるべきであるというものだ。仮に、言語が文章からなり、文章が単語からなり、単語が音声からなるならば、文字と音声からはじめて、それを一致させつつ、順に音節、単語、ついには物語全体へと教えられるべきである。～中略～ 仮に、かような分析により、数学が演繹的な体系を備えていると結論付けたならば、数学は構造に従って、より正確に言えば教師ないし教科書著者が信じた特定の演繹体系に従って、履修されるべきとなる。これこそ、私が、反教授学的な逆転と呼ぶものである。そこでは、唯一の教授関連要素、教材の論理分析が示される；生徒は論理分析結果を提示され、結果を知っており、分析された事柄を、目前で再構成してみせる先生の姿を眺めることを強いられる」(1973, p. 103)

所産として数学を認め、その論理分析結果である集合と構造に基づく演繹体系に準じて指導する New Math の教育課程では、生徒は Freudenthal の言う意味での数学を再発明する存在としては位置づけられず、従って、蓄積した経験を数学的方法により再組織化する活動をすることはできないのである。

(3) 静的解釈で生まれるおとぎ話

Freudenthal は所産としての数学を活動として教えようとする、再発明とは思えないような「おとぎ話」が作られることを指摘している。おとぎ話は、活動において記された事柄を、異なる文脈で解釈する静的解釈によってもたらされる。Freudenthal は言語分析でなされる静的解釈によって起きる問題点を次のように Principia mathematica から例示した。

「(Russel, B. と Whitehead, N. の “Principia Mathematica” に対して：筆者) それは、問いや問題を形成する一切の言語的意味が失われている。言語分析 (analysis) 学者は、言語表現の静的解釈に由来する次のパラドクスに、かつて期待を持って取り組んだ (struggle)。Walter Scott は “Quentin Durward” の著者であるから、Walter Scott を “Quentin Durward の著

者” にいつでも (この文脈では：筆者) 置き換えられる；とすれば、 $\frac{1001}{11}=91$ だから、 $\frac{1001}{11}$ をいつでも91に置き換えられる。しかし、‘Walter Scott は “Quentin Durward” の著者である’、さもなくば、 $\frac{1001}{11}=91$ である’ という記述では、同じような置き換えはできるだろうか？ 言語学では、この場合の代入ではなぜ意味が変わるのかを説明しようとする痛ましい努力がなされてきた⁹⁾。実際には、このパラドクスは、言語表現の静的解釈に基づいている¹⁰⁾。」(1973, pp. 115-116)

命題には、その命題が意味をなす文脈¹¹⁾がある。彼の言う静的解釈は、その文脈を外して別の目的、この場合は、わかりやすく教える目的で解釈することを指す。その活動が本来なされる動的な文脈から離れて静的に解釈した結果として本来の活動に反するおとぎ話が生まれるのである。

例として、Freudenthal の厳密さを話題にした例を利用する (1973 p. 152)。例えば、「ある三角形が4つの頂点をもつならば、その三角形は正三角形である」という命題は、真ですか？」という問いは、論理的には真であるが、聞く側の厳密さのレベルによっては無意味にも、誤りにも聞こえる。例えば、様々な長さの棒で三角形を構成してみる段階の子どもにこの質問をすれば、当惑するか、誤りと答える。時に教師は、そのような構成活動抜きで活動的に教えようとして三角形の図を示し「三角形の頂点は、2つか、3つか、4つか」というような問いを発する。知っている人が知らない人に教えようとすれば、その場限りに教材解釈をして、不自然な問いを発し、こどもの反応を聞いて、「よくできました」、「そうではありません」という問答を生み出す¹²⁾。それも教室での活動に映るが、Freudenthal の活動観からすれば、経験の数学的方法による組織化には該当しない活動は、数学的活動にはあたらない。

このような問題意識の基で記された Freudenthal の数学教育論は、彼の考える数学化を実現するための学校数学における数学的活動を具体化する考察と、さらに個々で述べた教材の論理

分析や教材の静的解釈を批判した場合に代替として提案される活動の分析方法（後の教授学的現象学）及びその分析成果へ展開していく。

（4）内容の発展と生徒の思考の記述

Freudenthal の数学的活動論は、その定義「（数学的な）経験の蓄積を数学的方法により組織する」によれば、そこでの「数学的な経験の蓄積」や「数学的方法」という変数に、何らかの内容を当てて、そこで数学がどのように進化するかということで記述しえと考えられる。「発明は、学習過程における水準（段階）として理解し、特に再発明においては、接頭語、再を考慮に入れている。」（1991, p. 36）再発明は発明と同じ過程をふむことはないが、少なくとも数学内容の段階的發展様相である水準を想定するのである。

Freudenthal は、再発明の方法を解説する過程で、数学を發展させる際に有効な一般方略を示し、問題解決を視野に活動の様相を記述したことで今日も世界的に注目される Polya G. の発見法論を、次のように批判する。

「数学を活動（すなわち数学化：引用者）と解する立場では、第一に、教える問題を活動として分析する。～中略～ Polya の本は、活動としての数学に対してほとんど貢献していない。ほんとうによく見ている人であればもっと沢山のことをみいだすだろう。なぜなら、よい先生は、（生徒を想定して、その課題にどのような反応が返るかの；引用者）¹⁰⁰思考実験を通じて、その分析を、繰り返し行ってきたからだ。～中略～活動として解釈し分析することで構成された指導方法を、再発明の方法と名付けた。」（1973, p. 120）

この Freudenthal の Polya 批判は、逆に Freudenthal の関心が、Polya の言う問題解決の発見方略のようなコンテンツフリーな発見法¹⁰⁰ではなく、学校数学の様々な内容を数学化の段階的發展において解釈すること、その際、生徒の活動を想定して分析に当たり、その内容的意味や意義の吟味とその活動の実現に注がれていることを示している。

生徒の立場を想定した数学内容の記述に彼の

関心が注がれていることは、彼の Piaget, J. 批判に端的に現れる。実際には Piaget の数学的活動論は、Freudenthal の数学史研究と関連し¹⁰¹、Freudenthal の活動論とその基本において整合するが、生徒の具体的な数学的な活動の内容記述においては、Freudenthal は Piaget の実験を、上述の論理分析の一種とみなし、生徒の実際の理解を記述しない点で誤りとしている。

「Piaget の実験における言語要素は、注目に値する。子ども達が手で行動する実験でさえ、実験の記述は質問・解答ゲームのごとく読みとれる。Piaget を研究する者誰もが、子どもが実験者の質問を理解しているかどうか、その質問が自由に答えてよい質問として理解しているかどうかの疑問を發する。場合によっては、実験者が、子ども達の解答の真意を理解しているかどうかさえ疑われる。」（1973, pp. 669-670）

生徒の数学の理解に立って活動を解釈していくことが Freudenthal の意図するところである。次章で述べるように、Freudenthal はその意図を、Piaget の發達段階ではなく van Hiele の思考水準によって具体化する。

2. 数学化を学校数学に具体化する枠組み

Freudenthal の意図する数学的活動である数学化からみて、New Math 当時知られた数学教育論は妥当なものではなかった。では、彼自身は、いかに学校数学において彼の数学化を実現しえ考えたのか。

本章では、彼が学校数学において数学化を実現するために示した枠組みを彼の数学教育論から記す。

（1）水準に基づく学校数学における数学化

Freudenthal は、学校数学において再発明の指導方法（1973, p. 120）を実現するために「van Hiele の再発明に対する解釈がより深い」と認めて（1973, p. 121）、van Hiele（夫妻）の思考水準論を参照した。

van Hiele, P. M.（夫）は、次のように述べている。「私が数学の教師になったとき、それがたいへん難しい職業であると気づいた。そこには、繰り返し説明しても、生徒が理解しない一群の

教材があった。特に幾何入門期は、あまりに難しかった。～中略～そして、その次には、生徒は突然、教材を理解するのだった。～中略～生徒は、よく次のようなことを言った。『そんなに難しくないのに、なぜ先生はあんなに難しく説明したの』。説明を工夫しても、その難しさは残った。それは、教師と生徒が異なる言葉を話しているようであった。そう考えることで、私は思考の異なる水準という解答を見いだしたのである。』(van Hiele, P. M., 1986, p. 39)

生徒は、幾何の学習過程で、その考えを段階を追って発展する。そのような生徒の数学理解に沿った思考水準を、Freudenthal は再発明の方法を具体化する直接の道具立てとみなした。Freudenthal は次のように指摘する。

「学習過程は水準によって構造化される。下位水準の活動は、その水準の方法で組織されるが、やがて高位水準では、分析する教材 (subject matter) となる。下位水準における操作材 (operational matter) は、高位水準において教材になるのである。生徒は、数学的方法 (mathematical means) によって組織することを学ぶ。すなわち、生徒は、自分自身の活動に潜在する内容を数学化することを学ぶのである。」(1973, p. 125) 「次の水準 (the next level) では、子どもは、自分がその前の水準 (the bottom level) でしたことを反省する。その前の水準における組織化の方法 (means) は、分析の対象になる。」(1973, p. 128)

水準の階層の存在を前提にすれば、Freudenthal において数学化は、学校数学においても、「経験の蓄積を対象として、数学的方法により組織すること」と数学の歴史的発展と同義に定義できる。そして、特に、この引用には、その数学化は、反省的思考が作用する場であることが本人の言葉で指摘されている。数学化が反省的思考による¹⁰⁾という彼の考えは、後で述べるように彼が認める van Hiele (夫妻：以下省略) の思考水準論との相違点である。

特に上記引用では、例示的な文脈で、数学的方法 (mathematical means) に当てる言葉として、その文脈に則して matter, devices などが

当てられている。最後の引用中の「前の水準における組織化の方法は、分析の対象になる」「下位水準の操作材は、教材になる」という記述で表された内容は、「方法の対象化」と要約され、数学的活動の本質として、今日の数学教育研究並びに教材の発展系統の分析に際して、広く参照されている。

Freudenthal の数学化の定義「経験の蓄積を対象として、数学的方法により組織すること」は、上述の引用に従えば、次の3つの局面で構成されると考えられる。

〈数学化の過程を構成する局面〉

- I. 数学化の対象：下位水準の数学的方法で組織された活動による経験が蓄積される。
 - II. 数学化：蓄積された経験は、新しい数学的方法によって再組織化される。下位水準の活動に潜む操作材、活動を組織した数学的方法を、教材ないし対象にして新しい数学的方法によって組織する反省が進展する。
 - III. 数学化の結果 (新たな数学化の対象)：高位水準の数学的方法で組織された活動による経験が蓄積される。

学校数学における数学化は、それが水準という数学の備える階層性を前提に構成される。彼の議論を見る限りは、その水準は、van Hiele の思考水準よりゆるやかな要件で設定されている。以下、その要件を明確化する。

(2) van Hiele の思考水準

水準の条件を示すために、van Hiele 夫妻の思考水準論の中でも、特に、幾何の思考水準、各思考水準のもつ共通性質、水準の移行を解説し、van Hiele 夫妻の思考水準論の特徴を明らかにする。そして、次節で、Freudenthal が van Hiele 夫妻のどの議論を参照しているのかを述べ、Freudenthal の言う水準の要件を確認することにする。

幾何の水準は、次の5水準で知られている。

視覚的水準：第1水準

例；物を形で考える。(形が方法である)

記述的水準：第2水準

例；形を性質で考える。(性質が方法である)

理論的水準：第3水準

例；性質を命題で考える。(含意が方法である)

論理形式水準：第4水準

例；命題を証明で考える。(論証が方法である)

論理規約水準：第5水準

例；証明を公理で考える。(形式論理が方法である)

特に、Freudenthal が学校数学における数学化の典型として記述する思考水準では、水準移行も含めて表現される(水準の数え方、表現の仕方は van Hiele, P. M., 1986 に依拠した)。

「幾何図形の性質の体系は、幾何図形を、第1水準(視覚的水準)で言及した図形の性質に結びつける諸関係を方法として組織されていく。第2水準(記述的水準)では、合同、相似、平行などの諸関係が現れる。それは、最初はシンボルとして、後にはシグナルとしての性格を備える。(例えば、区別しないという意味で用語「合同」を使うのはシンボルとしてであるが、三角形の決定条件としてそこでの関係を使うとシグナルになる)。しかしながら、それら新しい諸関係は、この第2水準で図形の性質を教材にしたようには、教材にできない。第2水準で組織する際の方法(devices, 概念装置：引用者)であった諸関係が、教材となるのは第3水準(理論的水準)においてである。ここでは、主に論理的性格を備えた関係間の関係が組織化の方法となる。図形間の一関係としての対称性は、含意(～ならば…である)表現(means)を利用して関係間の相互関係として、この第3水準で利用されるが、それを教材にするのは第4水準(論理形式的水準)からである。」(van Hiele, P. M., van Hiele-Geldof, D., 1958, p. 75)

ここでは幾何領域における数学的知識の階層性が水準として記される。その階層性の成り立ちを考えると「前の水準における方法(devices)は、次の水準で教材(対象)になる」という構図が浮かび上がってくる。この構図こ

そが、数学的活動の本質として前項で指摘した Freudenthal の考えの一つのルーツである(1991, p. 99)。そして後述するように、この構図を実現する前提に水準がある。

van Hiele, P. M. は、上述のように進化していく幾何における思考が、水準としてどのような特徴を備えているかを以下のようにまとめた(1959, p. 201)。

a. 水準に固有な方法：「各水準では前の水準で本質的であった方法(facon 仕方)も非本質的な方法の観を呈する」。例えば、物を形で考える幾何の視覚的水準では、事物の形を写し取ることは本質的な方法である。そして、形を性質で考える幾何の記述的水準では、図形を、物の形を写し取るのではなく性質を基にかくことは本質的な方法である。視覚的水準では、見た目を基準にした考察が行われるが、記述的水準では性質を基準にした考察が行われる。

b. 水準に固有な言語と関係網：「各水準にはその水準に適切な表象言語(symboles linguistiques)があり、その記号(signes)を結びつけるのに適切な関係網⁽⁴⁾がある。ある水準において『厳密』な関係が他の水準において厳密でないこともありうる」。幾何の記述的水準では性質を説明することで図形をイメージできるので、例えば図形を電話で伝えることができる。幾何の視覚的水準では、物にたとえて形を電話で伝えることができるが、記述的水準に至っていないので、性質をいくら言われてもどのような形か必ずしも適切に想像できない。

c. 水準間の通訳困難性(水準の不連続性)：「異なる水準で考える二人は理解し合うことはできない」。幾何の水準を例にする。視覚的水準では、おむすびは三角であり、交通標識「徐行」も三角である。記述的水準では、おむすびは空間図形であり、しかもどう投影しても角が局面であるため三角形は現れない。おむすびは三角形ではない。三角という言葉を使う人と三角形という言葉を使う人の間では、必ず誤解がおきる。それは、三角を知っていることは、三角形を学ぶ際に有意であると同時に障害ともなることを示唆している。記述的水準では、正方形は

台形ではない。しかし、理論的水準では、正方形は台形である。このような通訳困難例は、水準の相違が、単なる通訳では済まない関係網の相違であることを示唆している。

d. 水準の移行：「高い水準へ移る成熟は独特な仕方では生じる。この成熟は教育の課程であって、生物学的な順序での発達と考えるべきではない」。幾何の視覚的水準から記述的水準への移行は、学習指導抜きでは達せられない。

van Hiele, P. M. (1959) は、このような水準の性格ゆえ、水準の相違が、思考の相違、直観の相違を意味するとも指摘している。

特に、bで、van Hiele, P. M. の言う言語とは、水準に応じた専門語のことであり、水準が固有な専門語を持つという意味で、各水準は異なる数学理論を象徴している。思考水準は、言語階層という意味での数学理論が進化していくことを表している。そしてc, dは、水準間の上下（前後）関係を話題にした項目である。cでわかりあえない理由は、bの相違に基づいている。

先述の「方法の対象化」という特性は、水準における方法の固有性を指摘するaと水準の移行dに関連づけた思考水準の階層的順序性を構造的に説明したものでもある。ここでは、水準の序列性を性格づける「方法が教材となる」特性を条件として追加することにする。そして、a～d、及び「e. 方法の対象化」をvan Hieleの思考水準に共通する特性とみることにする。

van Hiele は幾何においてdの思考水準の移行の仕方は固有の過程と認めた。bより言語水準として性格づけられる思考水準の移行は、専門語の学習を伴って進展する。その過程を、van Hiele, P. M. は、次の5つの指導局面として記した(1959, p. 202, 1986, pp. 53-54)。

「情報」：話題となる活動領域を確定する。

「制約ある適応（導かれた方向付け）」：関係網を

（再）構成するための課題が与え、遂行する。

「明示化（説明）」：（潜在した）関係を明示する。

その際必要な専門語を教える。

「自由な適応（自由な方向付け）」：その関係網に

おいて一般性の高い課題を主体的に探求する。

「総合」：学んだことが鳥瞰でき、新しい関係網が思い通りに使えるようにする。

以上、van Hiele の思考水準の概要である。

(3) Freudenthal における水準要件

Freudenthal は学校数学における数学化の記述枠組みの典型として van Hiele の思考水準を選び、幾何領域での数学化の典型としてその詳細に言及する⁽¹⁰⁾が、Freudenthal の数学化論では、上述の議論をすべて受ける議論はしていない。例えば、水準の移行は話題にしても、それが5つの局面で達せられるという van Hiele の議論に彼は関心を示していない⁽¹¹⁾。

Freudenthal は、水準を van Hiele が示した5つの水準に準じて割り当てるよりは、話題にした数学的な内容・方法の相違に応じて水準を区別する立場に立つ。例えば、水準を記述する対象は、幾何のような大規模な内容領域に限定されておらず、水準の区分も幾何のように5つに限定されない。

例えば、先に引用した数学的帰納法の事例では、Freudenthal は、数学の歴史的発展⁽¹²⁾と指導過程を対照しつつ、次のように記述している。

「最下位の水準においては、帰納的推測が実践される^A。次の水準では、数学的帰納法は、原理とみなされ、反省の対象となる。同じ（さもなくばより高位の）水準で、その原理は、数学的帰納法の証明パターンとして定式化される^B。そこから、自然数に対するペアノの公理系までの過程は、局所的には議論できない^C。（下線引用者）」(1973, pp. 122-123)

この議論（下線部）は、

A 帰納的推測までできる第0水準、

B 数学的帰納法で証明までできる第1水準、

C 数学的帰納法を成立させる自然数の公理系まで前提にできる水準

として、3つの水準が区別されている。Bが曖昧なのは、反省という語で数学化過程までを含めて水準を記述したためである。B, Cの間では、ペアノによる自然数の公理的構成が求められ、A, Bのように局所的な事例として議論

し得ないことが指摘されている。

この事例を前述の van Hiele, P. M. の議論と対照すれば、Freudenthal の水準論においては、van Hiele の幾何の水準区分や大規模な内容領域における言語水準としての性格は弱く、数学的な表現や方法、考えの発展に応じて水準が割り当てられたものであることがわかる²⁰⁾。その意味で、前節で述べた van Hiele の思考水準の5つの特質の内、bの「水準に固有な言語と関係網」はFreudenthal においてはそのままでは適用し得ない。また、Freudenthal の水準論では、dの「水準の移行」は、van Hiele, P. M. の指摘した5つの局面としての指導過程ではなく、経験の反省による再組織化という数学化の過程としてとらえられる²²⁾。

すなわち、van Hiele 夫妻の思考水準の特徴と対照して、Freudenthal の水準の要件は、次のように整理できる。

数学化の前提としての水準要件

要件1. 水準に固有な方法がある。(a)

要件2. 水準に固有な方法に応じた言語や表現や関係網がある。(b改)

要件3. 水準間には通訳不能な内容がある。(c)

要件4. 水準間には方法の対象化の関係があり、その過程では反省が求められる。(e改)

以上、Freudenthal の水準記述と van Hiele の思考水準の特徴付けとを比較して水準の要件を得た。Freudenthal は、彼自身が、何故 van Hiele 夫妻の幾何の思考水準を拡張したかを次のような自身の水準論に対する変遷として記している(1991, p. 98)。「(van Hiele 夫妻へ学位授与当時の記述では：引用者) 下位水準における学習者の操作材は高位水準では方法となる(と記した：引用者)。(その十年後の記述では：引用者) 学習者の下位水準における活動は高位水準においては彼自身の分析の対象となる：次の水準で下位水準の活動が意識され反省材になる(と記した。後者に「意識され反省材となる」という文言が加えられている：引用者)。～中略～(なぜ、私の記述が変わったか：引用者) 私は数学の発明において反省がなす役割を知っていた

からであり、(自身の数学的活動に関する限り)それが水準をあげる機能を有していると知っていたからであり、そして、その考え方を再発明において活用すべきと判断したからである。(1991, 96-102)」

彼は、学校数学において再発明の方法を具体化するために van Hiele の思考水準論を意図的に拡張したのである。

次章では、このような水準を前提にした Freudenthal の数学化観が Freudenthal 研究所の漸進的数学化論によって変貌することを、彼自身の言葉で指摘する。

(4) 現象学による教材論

具体的な教材を活動として実現するには、彼の活動論に準ずれば、先の数学化の局面、Ⅰ数学化の対象：経験を蓄積する活動、Ⅱ数学化：それを対象化し、数学的方法により組織する反省的な活動、Ⅲ数学化の結果という活動内容の特定が求められる。他方で、そこで必要な活動内容の特定が、前述した論理分析や静的解釈のように誤った活動分析によって行われる懸念がある。再発明の指導法を実現するために必要な適切な活動分析の方法論として Freudenthal が提案したのが現象学的分析である。

「数学的構造の教授学的現象学」(Freudenthal, 1983) は、直接には数学教育学の建設という Freudenthal (1978) の問題意識に発する。二分不能ではあるが仮に数学化と再発明が彼の数学教育研究の目的論を象徴したものとすれば、現象学は彼の研究方法論を象徴したものとみることができる。その現象学は、彼自身の言葉によれば哲学的考察ではなく、教授過程における活動分析の方法の確立を意図している。ただし、実際には、自身の数学、数学史研究経験を背景に教材を分析し、教育実践における生徒の立場想定すること自体は容易にかなわない彼自身は、数学内容・表現の次元での分析に留まり、どう教材を解すかという彼自身の教材論ともみなせる成果を得ている。そして、教授レベルの現象学的考察そのものは、むしろ次章で述べるように彼が指導した人々の手に委ねられたとみることができる。

彼の考察の要は次の通りである (Freudenthal, 1983, p. 10, pp. 28-33)。まず、現象学では、数学的構造は所産としてその構造が記述される様式で記述される。教授学的現象学においては、数学的構造は教授学習材であり、その認知過程が記述される。その認知過程は発生的現象学である。人は、数学的構造の発生的現象学へ向けて自らの思考を遡ると信じている。しかし、それが容易にできれば、Piaget の犯した誤解や先述したおとぎ話は生まれない。

数学的構造の現象学は数学の知識が求められ、加えて教授学的現象学には教育の知識が求められる。それゆえに彼は、「数学的構造の教授学的現象学」の大半を、最初に要請される数学的構造のもつ様々な表現を具体的な教材毎に記すことに当てている。それは、結果として彼自身の膨大な教材観の表明となっている。

具体的には彼は、数学の概念、数学的構造や数学の考えの現象学について、それらの本体（数学の概念、数学的構造や数学の考え）を、現象との関わりにおいて次のように記述した。その現象では、それらの本体は、組織化の手段であり、現象を組織するために創造され、拡張されることとして記述される。そして、それらの本体は、いかにその現象を組織する手段となるか、またそれにより我々はいかなる力をさずかるかとして記述される。そして、それら本体を表す様々な表現が収集され、それがどのように用いられるか、それにどのような価値があるかが、内容項目毎に歴史的に、数学的に具体的に記述された（以上 1983）。

Freudenthal が教授学的現象学の中で求めたのは、New Math の理論的基礎を与えた Bruner J. S. の主張に典型をみる概念達成という学習論ではなく、心的対象の構成 construction である。彼は言う。「 X を受容してほしいとして、 X の概念を教えないし教えようとする。～中略～（対象生徒には難しいので概念を具象化して教えようとする：引用者）。その具体化はいつも誤りだ。それは常に概念の本質を表すには粗雑過ぎる。～中略～教授学的現象学がなしえるのは、

その逆のアプローチを準備することだ」（1983, p. 32）。前者が概念達成のためになされる作業であり、それは別の言葉で言えば概念を活動として教えようとするおとぎ話の翻訳である。その逆のアプローチとは再発明であり、「数学的構造の教授学的現象学」とはその準備と位置づけられるのである。そして、彼が Bruner の概念達成に対置するのが心的対象の構成である。

彼は言う。「教授学習の最終目的は、心的対象の構成である。私は格別この語用を気に入っている。なぜなら、対象がいかに心的操作によって扱われるかを、この語用によって外挿する（extrapolate：関係を変域外へ推測する）ことができるからだ。～中略～ほとんどの場合、言語化と定式化が、概念形成を象徴する。群の心的対象が、群概念に先立つこと半世紀前に先行して存在していたことを指摘することは価値がある。Leibniz と John Bernoulli が何かに対して関数と呼んだ瞬間、それはもはや心的対象ではなくなっている。関数記号が、d'Alembert と Euler の著作に最初に記された瞬間、関数概念に至る道が示された」（1991, p. 19）

Freudenthal の数学化と対照すれば、ここで心的対象とは、数学の経験において蓄積された反省の対象、数学化の対象になりうるものであり、概念とは数学化の結果として明確にされていくものである。心的対象が構成されていれば、そこから数学化を構想しえる。何が心的対象であってほしいかを教材ごとに現象として詳述することで、数学化の活動内容が、誤った分析にそれずに特定しえる。彼の彼の「数学的構造の教授学的現象学」は、再発明の際に扱われるべき活動内容を失わないための個別教材論と言える。そして、そこでは New Math の動向で話題になった内容や表現も、無視された内容や表現も、彼の立場から記されている。

3. 真実の数学教育 RME との対比

研究指導はしても、直接教育実践の開発的研究をすることはなかった数学者 Freudenthal の数学教育論は、1960年代には van Hiele, 1970年代後半以後には、後に Freudenthal 研究所へ

と発展する彼が関わった研究プロジェクトや当時、彼が論文指導した研究者等の研究と重なって発展した²⁰⁾。

今日、Freudenthal 研究所が推進する真実的数学教育 Realistic Mathematics Education (RME) は、Freudenthal の数学教育論を踏襲するものとされているが、Freudenthal の活動論そのものは、彼の意のままの形式では受け継がれなかった。ここではその点を明らかにする。

(1) 水平的数学化と垂直的数学化

Freudenthal の指導によって展開されたオランダの Wiscobas 教科書プロジェクトの推進者 Treffers, A. (オランダ語 1978, 英訳 1987) は真実性のある教科書開発の一貫として数学化を、特に問題解決に関わって具体化し、Freudenthal の実在の数学化を水平的数学化、数学の数学化を垂直的数学化と言い換え (Goffree, F. 1993, p. 30), それを次のように規定した。

「問題を数学的に表現しえるまでの試みを水平的数学化という言葉で表す。～中略～ 垂直的数学化は、数学的手段によって問題解決ができるようにしていく概念領域をなす。問題を解く、解決を一般化する、一層形式化するなどの数学的過程に関係した活動が垂直的数学化である。」 (Treffers, A. 1987, p. 71)

Treffers の語用では、問題状況を探索し数学的方法を明確に適用できるまでにする状況の定式化の過程が水平的数学化であり、それが完了した上で、数学的方法により解答し、より高次の数学へと発展する過程が垂直的数学化である。

Treffers は、問題解決による学習指導を念頭ににした数学化が、学習指導における水準間で様々なルートで漸進的に進行するという視野から、このような漸進的数学化論²¹⁾を展開した。

特に、Treffers は、彼流に次のように水準を言い換えている。「第 1 水準では、例えば、初等学年では、事象の具体的な数量、測定値、視覚的な模型や図形などの心的に観察しえる対象についての操作に、数学的な思考対象は埋め込まれている。第 2 水準では、数や図形の関係が探究対象になる。別の言い方をすれば、一定の組織化が関係の関係網を作る。第 3 水準では、関

係そのものが考察の対象となる：諸性質間の関係や結びつきの特質が、互いに導きあうことが実現する。そこでは、組織化は論理的につながりのある体系へと適用される。」 (Treffers 1987, p. 243) ここでの Treffers の水準記述の特徴は、それが特定の内容に対しての水準ではなく、何にでも適用しえる形式で個別内容抜きに記述されている点にある。そして、van Hiele が長期スパンのマクロな水準であるとすれば、Freudenthal の水準は短期のミクロな水準であるとなし、図 1 を導入している。Treffers は言う。「この図は、一定の教程内の学習過程におけるマクロな水準に対して、ミクロ水準における数学化の網目と特定の進展を区別して示すことを目的としている。」 (Treffers 1987, p. 248)

そして、この Treffers の考え方は、水準を前提する Freudenthal の考えを弱めることになり、漸進的数学化論では先に記した水準の要件にみるような水準の相違は不明瞭となる。そして、漸進的数学化論は、その後 J. de Lange (現 Freudenthal 研究所所長) 等による Hewet プロジェクトでも継承された標準的な考え方となる (de Lange. 1987, p. 45; 図 2)。特に図 2 で、真世界とは、実世界ないし数学における内的な真実観のある世界を指している。この真実観を強調した教科書プロジェクトは、独逸、米国に翻案され、参照されるなど、現在、世界的に注目される教科書プロジェクトに育っている。

(2) 真実的数学教育 RME

Treffers が問題解決に関わって数学化を定式

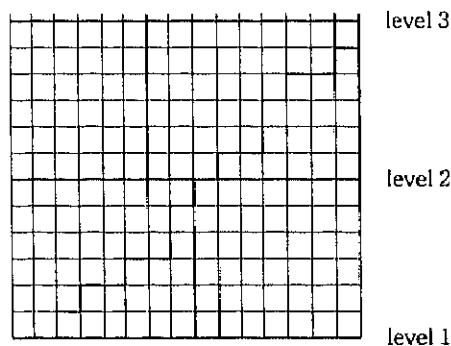
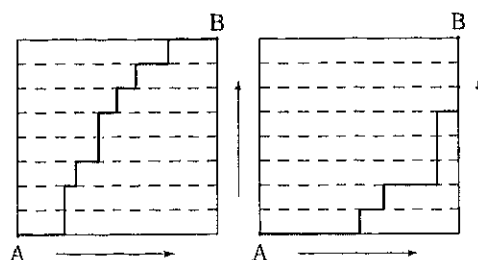
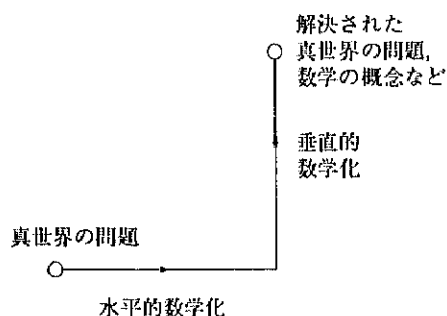


図 1 Treffers (1987) の漸進的な数学化



漸進的数学化：水平と垂直が漸進的に進行

図2 水平的数学化と垂直的数学化の漸進的様相 (de Lange 1987, p. 45)

化した伝統は、以後 Freudenthal 研究所の伝統として受け継がれる。

Freudenthal 研究所の現在の中心メンバーの一人 Gravemeijer, K. P. E. は、真実的数学教育のルーツが Freudenthal の活動としての数学解釈に基づくとしながら、その活動の特徴を問題を解くこと、発見すること、そして組織化することに認める (1994, p. 82)。組織化は Freudenthal によるとしても、問題とその発展をキーワードに活動を記述することは、むしろ Polya 的であり、Freudenthal がその活動の記述の中であまりこだわっていない点である。そして、Gravemeijer は、水準の特徴を記述することなく、水準の移行が、一般性、確実性、厳密性、簡潔性といった数学を特徴づける特質で達成されるとして、数学化を明確にするには、次のことが必要であるとしている。

一般性のために：一般化する。

確実性のために：反省する，正当化する，証明する。

厳密性のために：モデル化する，記号化する，定義する。

簡潔性のために：記号化する，図式化する。

これらの一般方略の指摘は、Freudenthal よりむしろ Polya によって明確に主張されたもののようにさえ見える。Gravemeijer は、RME の原理として次の3つをあげている。

第1原理：導かれた再発明と漸進的数学化。

第2原理：一般化され，しかも垂直的数学化のための模範的解法手続きを呼び起こす問題状況を発見するための教授学的現象

学。

第3原理：インフォーマルな知識からフォーマルな知識を導くための自己発達のモデル。

第1原理，第2原理のキーワードは、Freudenthal の用語である数学化，教授学的現象学を用いている。しかし，その記述内容の実質は，むしろ Treffers による問題解決を視野にした漸進的数学化論の延長にある。それが現在の Freudenthal 研究所の数学的活動論である。ここでは，どちらかと言えば内容編成に関心を持つ Freudenthal が採用しなかった Polya 的な方略論が見受けられる。それは，Freudenthal の数学教育論を理解しながらも，それを具体化しようとするれば，直面せざるおえない次のような現実からすれば必然的と考えられる。その現実とは，教程化において教科書教材化を進めれば，問題解決を話題にする必要が起きるという現実⁽²⁵⁾，しかも Freudenthal 研究所では研究が教科書開発と教授実験を併せて一単位のプロジェクトとして行われる現実，そして，生徒の理解は多様であるという現実である。

(3) Freudenthal の漸進的数学化批判

一方で，今日の Freudenthal 研究所の設立に貢献し，そこで多くの研究者を指導した Freudenthal 自身は Treffers 等の議論を必ずしも快しとせず，「数学教育再訪—中国講演録—」(1991)では，むしろ彼が元々主張してきたことに立ち返って考える姿勢を示している。特に，Freudenthal は，研究所で主流となった漸進的数学化論について次のように記した。

「ながきに渡り、私は、水平的数学化と垂直的数学化とを区別するという（研究所の漸進的数学化の：引用者）考え方に躊躇してきた。～中略～ その区別を以下のように特徴付けることにしよう。水平的数学化では、生きる世界（真実感のある世界：引用者）から記号的世界へ人を誘う。生きる世界においては、我々は営み、行う。他方の記号世界で、記号が構成され（shaped）、再構成（reshaped）され、機械的に、有意に、反省的に扱われる。それこそ（真の：引用者）垂直的数学化である。～中略～（ある人には、自然数は、その人が生きる世界に存在するもので代数和は記号的な世界に属する。しかし、別の人には、代数和は生きる世界に存在するもので、その記号表現は記号的な世界に属する。人によって生きる世界と記号的世界の区別は異なるとする議論に続いて：引用者）、水平的数学化と垂直的数学化は常に、その人が巻き込まれた特殊場面とその人が置かれた環境に依存している。そういった概論から離れた各論としては、様々な水準で例示することが、水平的数学化（生きる世界：引用者）と垂直的数学化（反省する：引用者）の間の区別を付ける最良の方法である。」（1991, pp. 41-42）

ここで、Freudenthal は、彼が創始した研究所のその後の数学化論の展開と、彼自身の数学化論を整合させるために、生きる世界（真世界）で成していることが水平的な数学化であり、そのなしていることを対象に新たに記号的世界を構成することが垂直的数学化であるという自分が納得のいく語用であえて Treffers の主張を、言い換えている。この Freudenthal の引用において、数学化は生きる世界の再構成の繰り返しとして描き出される。このような生きる世界とその再構成の繰り返しという視野は、Treffers においても、Lange, J. にも共通している（de Lange, 1987, p. 39, p. 72）。

しかし、その場合でも Freudenthal の語用では、生きる世界とその再構成とが区別され、特に再構成こそが、数学化である。そして、Treffers らの漸進的数学化論に対する Freudenthal の主張の独自性は、数学化をあくまでも水準という

語で特徴付け、水準移行として数学化を記述すべきことを、彼が最後に強調している点である。漸進的な立場においては、図 2 のように一様には進行しない細かな層による漸進性が強調されることで、逆に、その水準は見えなくなる。水準を前提とする彼の立場からすれば、それは再発明や数学化を曖昧にする結果をもたらすのである。

教材においては明瞭に表せる水準が、それぞれの生徒の理解に応じては異なることは確かであるとしても、あくまで数学の個別内容側からその水準を記述しようと言うのが、彼が最晩年に示した態度であった。彼は次のようにも記している。

「いかに水準が理論的に設定されたものであろうとも、それを重んじるのは学習過程の組織者の役割である。わずかな優れた生徒だけがその水準に沿って進むという事実は、教授ストラテジにおいて、水準を無視してよいという根拠にはならない。いかに学習過程における飛躍を飛び越すかという診断されるべき問いが、そこで解答されてきている。～中略～ 水準が重んじられればこそ、学習過程は学習者や学習集団の必要に対応するように柔軟に組織できる。」（1991, p. 116）

この記述は、暗に Freudenthal の考える教材の水準が、生徒の多様な理解の現状を記述しえるものではないという批判が彼の身近に存在した可能性と、それでもなお、その意義を主張する彼の姿を彷彿させるものである。

むすび

本稿では、Freudenthal の数学的活動論の背景と特質を述べた上で、それを継承したとみなされる Freudenthal 研究所の活動論の現状が、実際には、晩年の Freudenthal の目に、必ずしも自身の意を汲むものとはみなしきれなかった事実を指摘した。これは岡田や山口の研究では記されていない点である。

Freudenthal の数学的活動論は、学校数学において再発明を実現するために、水準を基盤に、方法の対象化、反省、組織化などをキーワード

にした数学化として説明される。その前提である水準論が現在の Freudenthal 研究所では話題にされないということは、Freudenthal の数学化論は、Freudenthal 研究所ではむしろ改変されているとみることができる。

改変の背景には、Freudenthal 自身の晩年の言葉に表れるように、水準は教材の次元では明瞭だが、生徒の実際の理解の多様さにおいては判然としなくなる点を指摘できる。そのような水準論に立つ彼の数学化論を学校数学においてどう生かすことができるのか、その可能性は Freudenthal 研究所で今日話題にされるモデル論と筆者の数学化論である表現世界の再構成論などが検討するところである。その課題については、別の機会に記したい。

Freudenthal の数学的活動論は、水準の相違を前提に数学化によって記される。そこで進められる数学的方法による再組織化では、反省的思考が営まれるとみなされるなど、彼の活動論は Dewey や Piaget の活動論とも整合している。ただし、本論で述べたような異同もある。どのような視野で述べた場合に、Dewey, Piaget と整合する活動論が提出できるかについても、別の機会に述べることにする。

注

- (1) 日本の教育課程上、数学的活動が、Dewey (1916) による「生存 (life) とは環境に対する活動 (action) を通じての自己更新の過程である (p. 2)」という教育学的な意味での活動観と融合し、自己更新の過程と位置づけられたのは、昭和22年の学習指導要領算数科数学科編（試案）においてである（磯田，1999）。その考え方は、現行、中学校学習指導要領（平成10年12月）解説—数学編—でも踏襲された。本論で述べるように、Freudenthal の数学化論は、自己更新過程や反省を基本概念にしている。
- (2) わが国では Freudenthal の数学教育論は数学教育研究の目的や位置を示すに際して非常によく参照されているが、本稿同様にその数学教育論を解説した論文としては岡田禎雄（1977，1978，1979，1981）、山口潤一郎（1995，1996）

の研究が知られている。

- (3) 現実的数学教育と訳す場合もあるが、reality は必ずしも日常場面に限定されない。本論参照。
- (4) 本稿は、岡田、山口の研究と比較して、Freudenthal の再発明論、数学化論が Freudenthal 研究所の活動論にどのように継承されたのかを問題にした点、その際に晩年の著作を参照する点で異なる。
- (5) 数学を学ぶことを規定する認識論を数学とは何かに対する存在論的相違を根拠に話題にしたものとみることができる。類似の対置は例えばヘーゲル学派である Lakatos, I. (1976) の数学の哲学にもみることができる。その共通性は、数学を発展の層に基づく活動において捉える弁証法的視野にある (Freudenthal, 1973, p. 100-101)。後述するように Freudenthal は発見という語を用いないし、Lakatos は発見の論理学の意味で発見を用いて、数学のアイデア世界の確認の意味での発見 (discover カバーをはずす) を採用しない。
- (6) Freudenthal は後に、その指導法を「導かれた再発明」とも解説する (1991)。Freudenthal は、1962年以前より Dina van Hiele-Geldof の数学授業に対して再発見ではなく、再発明という語を採用したという (1991, p. 185)。後述するように発見法と言え、学校数学では Polya の発見法を想起し、New Math ではその指導法として Bruner J. S. の提唱した発見法を想起させる。後述するように Freudenthal はそれとは異なる主旨で発見という語用を採用する。
- (7) 前述したように Freudenthal は、もともとそこにあるものを再生する意味での発見 (discover) を教育の場で用いる語用を好まず、歴史上の発見を *discover* と呼ぶなら *re-discover* とみる考えを記している。
- (8) 産婆術、数学における発見法の一つともみなされる弁証法的対話である。
- (9) B. Russell 「指示について」にある事例である (Bertrand Russell, On denoting, *Mind* N. S., 14, 1905, パートランド・ラッセル, 清水義夫訳, 指示について, 坂本百大, 現代哲学基本論文集 I, 勁草書房 1986, p. 59)。飯田隆 (言語哲学

大全 I, 勁草書房 1987, pp. 190-193)

- (10) $A=B$ ならば A に B は代入できるが, 「 $A=B$ である」に代入すると元の意味が変わることを話題にした彼の意図は, 静的解釈を話題にするもので, ラッセル, フレーゲが話題にしようとした関心とは異なる。
- (11) 理論付加性を鑑みれば, 文脈は活動主体に依存しているので, 活動と置き換えることもできるが, ここでは批判する活動の誤用の問題と言葉が重なるので仮に文脈として解説する。
- (12) 岡田敬司 (コミュニケーションと人間形成, 1998, p. 112) は, 設問-応答-評価型の教授授業と性格付け, その特徴を検討し, 討論型授業と対比している。
- (13) Freudenthal, 1991, p. 95. 特に Freudenthal (1973) では, ソクラテスの問答法にも模して「教授学としては, 思考実験という言葉で, 生徒や生徒のグループを想定し, 彼らの反応を想定して対応して指導していこうとする教師, 著者の態度を表す」としている (p. 100)。
- (14) Freudenthal が再発明という語用を採用したのは, 大陸の伝統からして, 英語のカバーをはがす意味の発見 (discover) が, ともすればトリックやウィットなどの発見セットを指し, 教授学の方法というニュアンスを持たないからであるという (1991, p. 46)
- (15) Piaget の論理数学的抽象の背景には Freudenthal の数学史研究がある (E. Beth & J. Piaget, 1966, p. 222)
- (16) Freudenthal は「反省的思考は数学における発明の原動力である」とも言っている (1991, p. 100)。
- (17) ここで関係網の相違は, 同じものをみても同じものをみるとは限らないゲシュタルト心理学を背景にした考え方である。van Hiele 夫妻の思考水準論の特質は, 関係網の相違を異なる数学理論とみとめた階層化にある。
- (18) Dina van Hiele の幾何入門の指導過程を, 組織化 (数学化の定義の一部) の例として詳細を引用している。 (1973, pp. 406-419)
- (19) van Hiele は, その指導局面を Vygotsky, Leont'ev, Gal'perin に近い仕事をした van

Parreren の心理学を基礎に設定したと言われる (Dina van Hiele, 1984, Bert van Oers, 2000)。特にこの指導局面は, 行為を内面化する基本変換を教授区分として表した Gal'perin の教授水準の発想に重なる部分が多いとみることもできる。Freudenthal は, 数学教育の基礎理論を解説する過程で, Gal'perin を紹介している (1991, p. 138)

- (20) 歴史としてみれば, 帰納的推測は, 二項係数を推測できる時代, 例えば, 14世紀の朱世傑の四元玉鑑の時代に認められ, 数学的帰納法は, 二項係数の定理を証明した17世紀のパスカルの時代に認められる。プラトンの著作にみられる図形数についての議論は, 図形を媒介にして帰納的推測の域を越えている。数学的帰納法的前提には自然数列があるが, パスカルの時代には, 自然数の存在は直観的である。数学的帰納法の原理による自然数の公理系の構成は19世紀のペアノに認められる。
- (21) Freudenthal 自身, 彼が van Hiele の幾何の水準の重要性を認めて, それを意図的に他の領域へ拡張したこと, その際, van Hiele のように絶対性の強いものではなくしたことを指摘している (1991, p. 101)
- (22) 特に, Freudenthal は, 1961年には van Hiele 夫妻に準じて「下位水準における学習者の操作材は高位水準には教材になる」と記したが, 1969年には「下位水準における学習者の活動は高位水準では分析 (analysis) の対象となる, 別の言葉では, 次の水準ではその活動が意識でき, 反省の教材となる」として, 自動的に教材になるのではなく, 意識して「反省」対象とすることが水準移行の手段であると意図的に表したと記している (1991, pp. 98-99)。
- (23) 最晩年の著作「数学教育再訪—中国講演録—」(1991) 内では, 彼が指導した Treffers, A や Streefland, L. の名前が繰り返し話題になる。
- (24) 教授原理として, 現象の探究, 垂直的数学化を支援する道具, 自立的構成, 相互作用, 関連づけをあげており, 水準の飛躍を漸進的に歩むことをねらっている (Treffers, 1987, pp. 247-250)。

(25) 日本の現行, 中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—でも, 自己更新的な数学学習論と問題解決による方法の獲得論は併記されている(pp. 25-26)。

参考文献

- Ahlfors, L., et al. (1962). On the Mathematics Curriculum of High School, *Mathematics Teacher*, vol. 55, 191-195.
- Beth, E., & Piaget, J. (1961). *Mathematical Epistemology and Psychology*, D. Reidel: Dordrecht.
- de Lange, J. (1987). *Mathematics Insight and Meaning*, Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum.
- Dewey, J. (1916). *John Dewey, Democracy and Education*, Macmillan Publishing (Dover Paperback Edition 1966).
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 1, p7.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel: Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*, D. Reidel: Dordrecht
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel: Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer: Dordrecht.
- Goffree, F. (1993). HF: Working on Mathematics Education, Steefland L. edited. *The Legacy of Hans Freudenthal*, Kluwer: Dordrecht. 21-49
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*, Utrecht CD-b.
- Russell, B. (1905) On denoting, *Mind N. S.*, 14, (バートランド・ラッセル, 清水義夫訳, 指示について, 坂本百大, 現代哲学基本論文集 I, 勁草書房 1986)
- Streefland, L. edited (1993). *The Legacy of Hans Freudenthal*, Kluwer: Dordrecht
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions*, D. Reidel: Dordrecht

- van Hiele, P. M., van Hiele-Geldof, D. (1958). *A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools*, H. Freudenthal edted, Report on Methods of Initiation into Geometry, J. B. Wolters.
- van Hiele, P. M. (1959). La pensee de l'enfant et la geometrie, *Bulletin de L' Association des Professeurs de Mathematiques*, 199-205.
- van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds.), (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 1-214). Brooklyn, NY: Brooklyn College, C.U.N.Y. (Original work in 1957).
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- van Oers, B. (2000). The Appropriation of Mathematical Symbols. Cobb P., Yackel E. & McClain K. edited. *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. LEA. 133-176.
- Wheeler, D. (1975). Humanizing Mathematical Education, *M. Teaching*, No. 71, 5-6.
- 磯田正美 (1984) 数学化に関する一考察, 筑波大学修士論文
- 磯田正美 (1999) 数学的活動の規定の諸相とその展開, 日本数学教育学会誌, 第81巻, 第9号, 10-16
- 飯田隆 (1987) 言語哲学大全 I, 勁草書房
- 岡田禱雄 (1978) H. Freudenthal の数学教育論 (I), 広島大学学校教育学部紀要, 第3部, 1-10
- 岡田禱雄 (1978) H. Freudenthal の数学教育論 (II), 広島大学学校教育学部紀要, 第2部第1巻, 103-111
- 岡田禱雄 (1979) H. Freudenthal の数学教育論 (III), 広島大学学校教育学部紀要, 第2部第2巻, 81-87
- 岡田禱雄 (1981) H. Freudenthal の教授学的現象学の概念, 中国四国数学教育学会集学教育学研究紀要, 7, 53-55

- 岡田敬司 (1998) コミュニケーションと人間形成,
ミネルバ書房
- ボリア G. 柿内賢信訳 (1964) いかにして問題
をとくか 丸善
- 文部省 (1947) 学習指導要領算数科数学科編 (試
案) 日本書籍
- 文部省 (2000) 中学校学習指導要領 (平成10年12
月) 解説—数学編— 大阪書籍
- 山口潤一郎 (1995) H. Freudenthal の教授学的現
象学に関する内容学的研究. 中国四国教育学会
教育学研究紀要第2部, 42, pp. 178-183
- 山口潤一郎 (1996). H. Freudenthal の教授学的現
象学に関する内容学的研究(2). 中国四国教育学
会教育学研究紀要第2部, 42, pp. 178-183

Study of Mathematization by Hans Freudenthal:
Differences between the ideas of mathematical activities
of the Freudenthal Institute and Hans Freudenthal

Masami ISODA

Institute of Education

Hans Freudenthal is well known for his activity theories in mathematics education. The Freudenthal Institute has developed the ideas of activity theories in mathematics education based on his ideas. Various articles by the institute describe the ideas derived from Freudenthal. On the other hands, he himself did not always accept the ideas. In this paper, his original ideas are described based on his four major publications; *Mathematics as an Educational Task*, *Weeding and Sowings*, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* and *Revisiting Mathematics Education*. His mathematics activities focus on mathematization by organizing methods of mathematics. For applying these activities to mathematics education, he developed his ideas by expanding the levels of van Hiele. Mathematization is the term for an activity in order to move to a higher level through the function of reflective thinking. On the other hand, the Freudenthal Institute has employed the term 'progressive mathematization'. Progressive mathematization consists of both horizontal mathematization and vertical mathematization. At horizontal mathematization we reinterpret a problem field allowing it to become accessible to mathematical treatment. At vertical mathematization, we conceptualize it mathematically. The ideas of progressive mathematization changed the meanings of the levels. Thus, at last of his life, he concluded the following: The distinction between horizontal and vertical mathematizing depends on the specific conditions. Apart from generalities, examples at various levels are the best way to explain differences between horizontal and vertical mathematizing.