本冊子は、我が日本が創始・発展させ、数式処理において世界的トピックスの一つとなった『近似代数』の算法と応用に関して、文部省科学研究費補助金の援助を得て、平成９～１１年度の３年間に行なわれた研究成果をまとめたものである。

1. 研究課題： 近似代数の算法と応用の研究

2. 課題番号： ０９３０８００８

3. 研究組織

研究代表者：	佐々木建昭	(筑波大学・数学系・教授)	
研究分担者：	坂井 公	(筑波大学・数学系・助教授)	
研究分担者：	(北本 卓也)	(筑波大学・数学系・助手)	(９～１０年度)
研究分担者：	赤平 昌文	(筑波大学・数学系・教授)	
研究分担者：	(狩野 裕)	(筑波大学・数学系・助教授)	(９年度のみ)
研究分担者：	西村 泰一	(筑波大学・数学系・講師)	
研究分担者：	小池 健一	(筑波大学・数学系・講師)	
研究分担者：	田中 秀和	(筑波大学・数学系・助手)	
研究分担者：	塚田 信高	(筑波大学・数学系・助手)	
研究分担者：	野田松太郎	(愛媛大学・工学部・教授)	
研究分担者：	甲斐 博	(愛媛大学・工学部・助手)	
研究分担者：	加古富志雄	(奈良女大・理学部・教授)	
研究分担者：	鈴木 正幸	(岩手大学・工学部・助教授)	
研究分担者：	福井 哲夫	(武庫川女大・助教授)	
研究分担者：	元吉 文男	(電総研・知能情報部・室長)	

4. 研究経費

平成０９年度	９，１００千円
平成１０年度	５，０００千円
平成１１年度	２，８００千円
計	１６，９００千円

5. 報告書目次

00613750

1　研究の背景：近似代数とは？

従来の厳密数式処理は、整数・有理数の演算を基礎に、それらを代数的数に拡大し、変数を添加して多項式・有理式を構成し、それらを代数関数に拡大し、さらに関数を添加し、等々という具合に数式を構成して、それらの数式だけを用いて演算を行なっている。すなわち、整数・有理数の離散性が得られた答の厳密性を保証する。しかしながら、その代償として、(時間的および領域的) 計算量の増大と算法の融通性の欠如（算法が複雑になる一方、その適用領域が限定される）という欠点を有する。

一方、数値計算は極めて強力かつ融通性に富む計算法であるが、数値計算のこれらの特質は実数の連続性を基礎にして大胆に近似を導入することによってもたらされている。そこで、数式処理と数値計算を融合すれば、より一層強力な計算法が得られるであろう。このアイデアは 1960 年代末には既に提出されていたが、木に竹を接ぐようなシステムは開発されても、算法レベルでの融合は長らく実現されなかった。その理由は、計算代数と数値解析がそれぞれ整数・有理数の離散性と実数の連続性という、全く異なる性質に基礎を置いているためである。

この閉塞状況を打破したのは 1989 年の佐々木建昭と野田松太郎の論文であった。彼らは、1 変数多項式の “近似 GCD” の概念を提唱し、近似 GCD の “近似精度” と近接根の近接度との関係を論じた。近似 GCD を計算すれば厳密 GCD 計算では得られない近接根の情報が得られ、さらに “近似無平方分解” を実行すれば一定の近接度以下の近接根因子を分離できる。すなわち、近似 GCD の計算により、従来の厳密数式処理では得られない有用な情報が得られることを示した。彼らは多項式にノルムを導入し、微小な “摂動項” のノルムで近似の精度を定義したが、ノルムは連続的に変化しえるし、近似 GCD 自体が一意的なものではなく、（一定の範囲内で）連続的に変動しえるものである。かくして、厳密数式処理で離散的にのみ扱われていた GCD が、連続的概念である近似 GCD に拡張されたのである。

佐々木建昭は、近似 GCD の考えは多くの代数的演算に拡張できることを数理解析研究所の講演で指摘し、共同研究者とともに多変数多項式の近似 GCD や近似因数分解等の算法を考案した。野田松太郎は共同研究者とともに、近似 GCD の各種の応用を開拓した。さらに、加古富志雄は彼の開発した Lisp 処理系に近似代数用の各種の機能を付加した。そして、このような近似的代数演算は京都大学名誉教授の一松信により『近似代数』と命名された。近似代数は当初、外国に秘密に研究されたが、4 ～ 5 年を経ずして外国に知れるところとなり、アッと言う間に世界の数式処理研究の主流の一つとなった。だが、基本的アイデアの提唱という点で本研究グループは依然、世界をリードしている。

本研究グループは、1991 年度以来、文部省・科学研究補助金により、近似代数に関して次のように研究を遂行してきた。

1. 1991～1993 年：試験研究 B(1) 「数値数式融合計算システムの開発」、6,500 千円。
2. 1994～1996 年：基盤研究 A(1) 「近似代数計算システムの開発」、10,500 千円。

本研究はこれらの研究をさらに発展させるべく計画されたものである。

2 研究の目的と成果の概要

本研究以前の6年間の成果により、近似代数用数式処理システムはほぼ完成しており、多項式のGCD計算や因数分解など、最も基本的な演算の近似算法も荒削りながら開発を終了した。そこで、本研究では以下の4点を目的とした。

1. 多くの代数的演算を近似代数の立場から算法化する。
2. すでに開発した近似代数算法の誤差解析を行って安定化を計る。
3. 開発した算法を NSL-GAL システムにインプリメントして公開する。
4. 理工学分野への近似代数の応用を計る。

近似代数の研究は、全体で協力して一つのテーマに取り組むような段階は既に終了し、現在は多様かつ広範なテーマに取り組む段階である。そこで、本研究では各研究者が各自の得意とするテーマについて取り組み、全体として上記の目的を達成することとした。その結果、上記の各目的に対し、以下のような成果を得た。

2.1 近似代数の算法開発について

- 近似因数分解算法の改良（長坂、佐々木）：多変数多項式の近似因数分解については、概念の提唱とナイーヴ算法の提案 (Sasaki et al., 1991) 以来、線形代数的算法の考案 (Sasaki et al., 1992)、ナイーヴ算法の改良 (Watt et al., 1995) が主な研究であった。佐々木と大学院生の長坂は、1992 年の Sasaki らの論文の不備を補って線形代数的算法を完成させ、主変数の次数と変数の個数に関して多項式時間の計算量をもつ算法に改良した。

- 誤差項を持つ1変数多項式の近似 Sturm 列の理論（照井、佐々木）：浮動小数計算では、Sturm 列の主項がキャンセルしても誤差部が主項に残り、また主項が異常に小さくなる場合には以後の計算に大きな誤差が入り込む。佐々木と大学院生の照井は、主項の大きさが一定値以下ならば、その微小主項を0とおいて Sturm 列を計算しても実根数が正しく計算できることを証明した。

- 多変数多項式の特異点での分解理論と非零代入問題の解決法の考案（佐々木、稲葉）：数式処理の基本的算法の一つに多変数多項式に対する一般 Hensel 構成がある。特異点でも実行できるように Hensel 構成を拡張した方法を拡張 Hensel 構成といい、3変数以上の場合は Sasaki と Kako により 1993 年に考案された。佐々木と大学院生の稲葉は、初期因子が多項式の場合の拡張 Hensel 構成を考察し、与えられた多変数多項式が (従変数に関する) 有理式級数を係数とする多項式に分解できることを証明した。そして、この分解を用いるならば、“非零代入” を行うことなく多変数多項式の因数分解が実行できることを示した。

- 2変数関数の有理関数補間理論（野田、甲斐）：有限個の点での値のみが与えられた関数を有理関数で補間することは古くから研究されてきたが、正確な数係数演算を前提としている。野田と甲斐は、1変数関数の有理式補間を浮動小数で実行すると与式にはない高く細いピークが現れるが、それは近似GCDで除き得ることを発見していた。彼らは、2変数関数の有理式補間を浮動小数で実行すると非常に薄く高い帯状の山脈が現れるが、2変数の近似GCDで除けることを示した。

2.2 近似代数算法の誤差解析について

- 浮動小数係数での多変数終結式計算の桁落ち解析（佐々木、佐藤）：浮動小数係数での多変数多項式の終結式計算における誤差については1969年のKu-Adlerの先駆的な仕事がある。佐々木と大学院生の佐藤は4種類の終結式算法における誤差を実験的に調べ、ガウスの消去法と剰余列法は大きな誤差を引き起こすが、小行列展開法と(Sasaki-Muraoの)効率的ガウス消去法は、与式が近似GCDを持つ場合を除き、ほとんど誤差を引き起こさないことを示した。

- 浮動小数係数での多変数Hensel構成の桁落ち解析（佐々木、山口）：多変数Hensel構成は計算代数において最も基本的かつ重要な算法であるが、近似演算の立場からの解析は皆無であった。佐々木と大学院生の山口は、浮動小数を用いたHensel構成では、展開点を特異点の近傍に選ぶならば、展開次数に比例した桁数だけ誤差が拡大する場合があることを理論的および実験的に示した。

- 近似GCDに基づくハイブリッド有理関数近似の誤差評価法（甲斐、野田）：浮動小数での有理関数近似では、2.1に述べたように分子と分母の近似共通因子を近似GCDで除去する必要があるので、その誤差評価には近似GCDを考慮する必要がある。近似GCDの定義には幾つかの流儀があるが、甲斐と野田は3種類の定義に対して誤差上限の評価式を求め、それらが実際の誤差によく当てはまることを示した。

2.3 NSL-GALへのインプリメントについて

- GALへの近似代数用機能の追加（加古、佐々木）：浮動小数で代数計算を実行すると、数係数が十分に小さい場合、その項は誤差によって生じた項であるとして除去する必要がある場合がある。そこで、Kako-Sasakiが提案した有効浮動小数を用いて計算を行い、各係数の|誤差/値|の分布から『誤差より生じた項』であると実際的信頼度で推測できる機能を付加した。

- NSLをCコードで書き換え（加古）：現在のNSL(Nara Standard Lisp)は主要部がアセンブラで書かれており、移植性が悪い。世の中の多くのシステムがC言語で書かれていることを考慮し、NSLをC言語で書き換えた。

- 多項式を解とする線形方程式の解法プログラムの開発（元吉）：多項式係数の線形連立方程式の多項式解は代数学の種々の分野で重要な演算である。その計算にはGröbner

基底を利用した効率的算法が既に提案されているので、その算法をインプリメントした。

- FFT を利用した多倍長整数計算パッケージの開発（元吉）: 多倍長整数計算で FFT を利用して高速化をはかる際に、d を小さな整数としたときに結果が $2^n + d$ 語の演算を 2^n 点の FFT で計算する方法を考案し、インプリメントして実験を行なった。

- GAL とインターネットとのインターフェースの構築とテスト（福井）: 数式処理システムＧＡＬをインターネットを通じて利用可能なように改良を行った。インターネット用のサーバは武庫川女子大学に設置し、筑波大学およびドイツ・ケルン大学から物理学上の研究のために使用してみて、実際に有用であることを示した。

- 有効数システムの開発（鈴木）: 厳格に計算精度を保証できる数 (有効数) のシステムを開発し、有効数を係数とする数式処理システムを試作した。

- 有効数を用いた精度保証固有値計算プログラムの開発（鈴木）: 有効数上の行列計算パッケージを作成し、精度保証固有値計算を可能にした。

- 近似 Gröbner 基底パッケージの開発（鈴木）: 厳格に精度保証できる数が扱える数式処理システム上に、近似 Buchberger 算法に基づく近似 Groebner 基底パッケージの開発を行い、精度保証固有値計算プログラムを用いて、連立多変数代数方程式の精度保証求根パッケージを開発した。

- 連立代数方程式に対する Wu's Method のインプリメント（Zhi, 甲斐、野田）: 連立代数方程式に対する Wu's Method をインプリメントし、浮動小数演算により十分な精度で解を計算できることを示した。

2.4 近似代数の理工学への応用について

- 実射影平面上Ｎ本直線配置の分類法への応用（福井、関口）: 数学的研究であるＮ直線アレンジメントの分類・判定に数式処理システムを使用し、新しい結果を得た。８直線アレンジメントにおいては 300 時間の計算時間が必要であった。Ｎが９以上の計算には近似の導入が不可欠であり、現在、近似計算を実行中である。

- ハイブリッド有理関数近似の各種の応用（野田、甲斐）: 多項式近似が解析的な関数に対してしか適用できないが、有理関数近似は端点が特異な関数などにも適用でき、応用範囲が広い。この観点から、ハイブリッド有理関数近似をデータ平滑化、不定積分、コーシー主値積分、翼理論等の現れる特異積分方程式に適用し、良好な結果が得られることを示した。

- 近似べき級数解法を代数的制御理論へ応用（北本）: 制御理論では多変数連立偏微分方程式の解を扱うが、厳密に扱うことは難しく、通常は特定のパラメータに対する数値解の組を扱うことが多い。これに対し、パラメータに関する依存性をべき級数展開するならば計算は容易となる。この近似法を算法化し、具体的事例に適用して実用的に使えることを確認した。

3 発表論文リストほか

●印を付した論文は全文を本冊に収録しているものである。

3.1 紙上発表

1. ● A. Terui and T. Sasaki: "Approximate Zero-points" of Real Univariate Polynomial with Large Error Terms, 情報処理学会 論文誌, 2000 (in print).
2. A. Terui and T. Sasaki: Durand-Kerner's Method for the Real Roots of Real Algebraic Equation, Japan J. Injus. Appl. Math., 2000 (in print).
3. T. Sasaki and F. Kako: Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction, Japan J. Indus. Appl. Math., Vol. 16, pp. 257–285, 1999.
4. ● 甲斐 博：ハイブリッド有理関数近似の誤差評価、情報処理学会 論文誌, Vol. 40, pp. 1754–1759, 1999.
5. L.H. Zhi, Y. Notake, H. Kai and M.-T. Noda: Hybrid Method for Solving Polynomial Equations, Proc. Fourth ATCM, Springer, pp. 231–244, 1999.
6. ● T. Sasaki and S. Yamaguchi: An Analysis of Cancellation Error in Multivariate Hensel Construction with Floating-point Number Arithmetic, Proc. ISSAC'98, ACM, pp. 1–8, 1998.
7. T. Sasaki and S. Sato: Cancellation Errors in Multivariate Resultant Computation with Floating-point Numbers, ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 32, No. 4, pp. 13–20, 1998.
8. Y. Ozaki and T. Sasaki: Univariate Factor Separation and its Application to Multiple/Close Root Problem, 数式処理, Vol. 6, pp. 30–46, 1998.
9. H. Kai and M.-T. Noda: Hybrid Computation of Cauchy-type Singular Integral Equations, ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 32, No. 2, pp. 59–60, 1998.
10. H. Minakuchi, H. Kai and M.-T. Noda: Algorithms of Generalized Inverse and Their Stabilization, Proc. Third ATCM, Springer, pp. 333–341, 1998.
11. K. Shiraishi, H. Kai, T. Saito and M.-T. Noda: Polynomial Algorithms for Optimization Problems, Proc. Third ATCM, Springer, pp. 404–413, 1998.
12. T. Fukui and J. Sekiguchi: Eight Lines Arrangements on the Real Projective Plane and the Root System of Type E_8, Proc. Third ATCM, Springer, pp. 377–388, 1998.
13. 関口次郎、福井哲夫：実射影平面上８直線アレンジメントＩ、数式処理, Vol. 7, No. 1, pp. 33–35, 1998.

14. 福井哲夫、関口次郎： 実射影平面上8直線アレンジメントII：構成実験の分析、数式処理, Vol. 7, No. 1, pp. 36–38, 1998.

15. T. Fukui and J. Sekiguchi: Experimental Computation of Configurations of Eight Lines on the Real Projective Plane, 姫路工大紀要, Vol. 9, pp. 1–11, 1998.

16. ● H. Kai and M.-T. Noda: Cauchy Principal Value Integral Using Hybrid Integral, ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 31, No. 3, pp. 37–38, 1997.

17. M.-T. Noda, I. Makino and T. Saito: Algebraic Methods for Computing a Generalized Inverse, ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 31, No. 3, pp. 51–52, 1997.

3.2 Preprints submitted

18. T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako: Error Analysis of Power-Series Roots of Multivaraite Algebraic Equation, preprint (30 pages), 1994.

19. K. Nagasaka and T. Sasaki: Approximate Multivariate Polynomial Factorization and Its Time Complexity, preprint (15 pages), 1999.

20. T. Sasaki and D. Inaba: On the Extended Hensel Construction and its Application to Multivariate Factorization, preprint (15 pages), 2000.

21. ● Y.N. Obukhov, T. Fukui and G.F. Rubilar: Wave Propagation in Linear Electrodynamics, preprint (12 pages), 2000.

3.3 講究録、解説記事、など

22. ● 佐々木建昭： 浮動小数係数での多変数Hensel構成における桁落ちのメカニズム、数理解析研究所 講究録 (印刷中), 2000.

23. ● 佐々木建昭、稲葉大樹： 拡張Hensel構成と多変数多項式の因数分解、数理解析研究所 講究録, 2000 (印刷中).

24. 甲斐 博、木原信二、野田松太郎： 二変数有理関数近似のハイブリッド計算と多変数近似GCDアルゴリズム、数理解析研究所 講究録, 2000 (印刷中).

25. 鈴木正幸： 戦術に忠実な並列Buchberger算法、数理解析研究所 講究録, 2000 (印刷中).

26. ● 元吉文男、秋葉澄孝、佐藤泰介： 等号公理下での論理式の標準形とその一階言語への応用、数理解析研究所 講究録, 2000 (印刷中).

27. 北本卓也： 近似代数とその制御系設計への応用、数理解析研究所 講究録, 1085巻, pp. 42–48, 1999.

28. 北本卓也： The CHACM Method for Computing the Characteristic Polynomial of a Polynomial Matrix, 数理解析研究所 講究録, 1085 巻, pp. 99–107, 1999.

29. 照井章、佐々木建昭： "Approximate Zero-points" of Univariate Polynomial with Large Error Terms, 数理解析研究所 講究録, 1085 巻, pp. 111–119, 1999.

30. 佐藤智之、佐々木建昭： 浮動小数係数多変数多項式の終結式計算における桁落ち誤差とその解析、数理解析研究所 講究録, 1085 巻, pp. 120–131, 1999.

31. 甲斐 博、野田松太郎： ハイブリッド計算による Cauchy 型特異積分方程式の解法について、数理解析研究所 講究録, 1085 巻, pp. 151–158, 1999.

32. 佐々木建昭： 数式処理の最新事情、数理科学 (サイエンス社), No. 425, pp. 5–7, 1998.

33. ● 佐々木建昭、加古富志雄： 『近似代数』とは？、数理科学 (サイエンス社), No. 425, pp. 8–20, 1998.

34. 野田松太郎、甲斐 博： 数式処理と数値計算 – いかに結合させるか？、情報処理, Vol. 39, No. 2, pp. 105–110, 1998.

35. 野田松太郎： ソフトウェアとしての数式処理、信学技報, SS98-25, pp. 31–38, 1998.

36. 福井哲夫、関口次郎： 数式処理の実射影平面上Ｎ本直線配置問題への応用事例、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 62–74, 1998.

37. 照井章、佐々木建昭： 誤差項を含む一変数多項式の根の誤差上界、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 106–110, 1998.

38. 長坂耕作、佐々木建昭： 多変数多項式の近似因数分解とその計算量、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 111–118, 1998.

39. 山口 哲、佐々木建昭： 浮動小数係数の多変数多項式の Hensel 構成の誤差解析、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 119–126, 1998.

40. 北本卓也： 近似根の応用について（その３）、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 135–138, 1998.

41. 甲斐 博、斎藤友克、野田松太郎： 近似的 GCD とハイブリッド有理関数近似の誤差の関係について、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 139–145, 1998.

42. 白石啓一、甲斐 博、斎藤友克、野田松太郎： ある種の非線形計画問題の代数的解法について、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 146–153, 1998.

43. 水口寛之、甲斐 博、野田 松太郎： 浮動小数演算に基づく安定化理論計算システムの作成、数理解析研究所 講究録, 1038 巻, pp. 177–182, 1998.

3.4 口頭発表

44. T. Sasaki: Mechanism of Cancellation Errors in Multivariate Hensel Construction with Floating-point Numbers, IMACS-ACA Conf., Madrid, 1999.

45. H. Kai and M.-T. Noda: Hybrid Rational Function Approximation and its Applications, IMACS-ACA Conf., Madrid, 1999.

46. H. Kai and M.-T. Noda: Hybrid Computation of Bivariate Rational Interpolation, ISSAC'99, Poster Session, Vancouver, 1999.

47. 甲斐 博、野田松太郎： 二変数有理関数近似のハイブリッド計算、数理研『プログラム変換と記号・数式処理』研究集会、1999.

48. 鈴木正幸： 分散共有メモリを用いた並列 Gröbner 基底計算の性能評価、第 7 回数式処理学会大会, 1999.

49. 川井、鈴木正幸： 数式処理による代数方程式の近似的解法、平成 11 年度 第 3 回 情報処理学会 東北支部研究会, 1999.

50. T. Sasaki and S. Sato: Cancellation Errors in Multivariate Resultant Computation with Floating-point Numbers, IMACS-ACA Conf., Prague, 1998.

51. T. Sasaki and T. Yamaguchi: An Analysis of Cancellation Error in Multivariate Hensel Construction with Floating-point Number, IMACS-ACA Conf., Prague, 1998.

52. K. Nagasaka and T. Sasaki: Approximate Multivariate Factorization and its Time Complexity, IMACS-ACA Conf., Prague, 1998.

53. H. Minakuchi, H. Kai, K. Shirayanagi and M.-T. Noda: Algorithm Stabilization Techniques and Their Application to Symbolic Computation of Generalized Inverses, IMACS-ACA Conf., Prague, 1998.

54. ● H. Kai and M.-T. Noda: Accuracy Analysis of Hybrid Rational Interpolation, IMACS-ACA Conf., Prague, 1998.

55. 川井、鈴木正幸： 有効数を用いた代数方程式の精度保証、平成 10 年度第 3 回情報処理学会 東北支部研究会, 1998.

56. 鈴木正幸： 有効数係数多項式、平成 9 年度第 3 回情報処理東北支部大会, 1997.

以下の頁は著作権者の許諾を得ていないため、公表できません。

p. 9 ～p.

p. 　～p.

p. 　～p.

p. 　～p.

p. 　～p.