関数解析学特別研究（楕円型境界値問題入門）

平良 和昭

2003年2月

序文

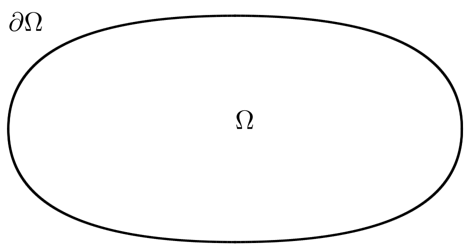
Riemann 積分の拡張である Lebesgue 積分は、Fourier 解析、確率論、偏微分方程式、関数解析等の現代数学の基礎であり、解析学を学ぶ際に最も基本的な役割を果たす。この講義ノートは、Lebesgue 積分論の基礎的な知識を仮定し、関数解析学の重要な応用例として、楕円型境界値問題の超関数解の存在及び一意性定理について、初学者用に丁寧にまとめた入門書である。本格的な自習書であるが、高度な Fourier 解析、確率論、偏微分方程式、関数解析等を学ぶ意欲的な学生にとって、将来、役に立つことを願っている。最初の原稿を作成するに際し，杉野延幸氏（現・広島県立広島国泰寺高等学校）に多大な協力を仰いだことを記して，感謝の言葉に代えたい。

Ω を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域（連結開集合）として，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであるとする。このとき，楕円型微分作用素に対する Dirichlet 境界値問題の Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ の枠組みにおける一意可解性について考察する：

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，微分作用素 A は次のような $2m$ 階の楕円型微分作用素とする：

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u\right).$$



楕円型境界値問題の（超関数）解の存在を証明する代表的な方法としては、次の 2 つがある：

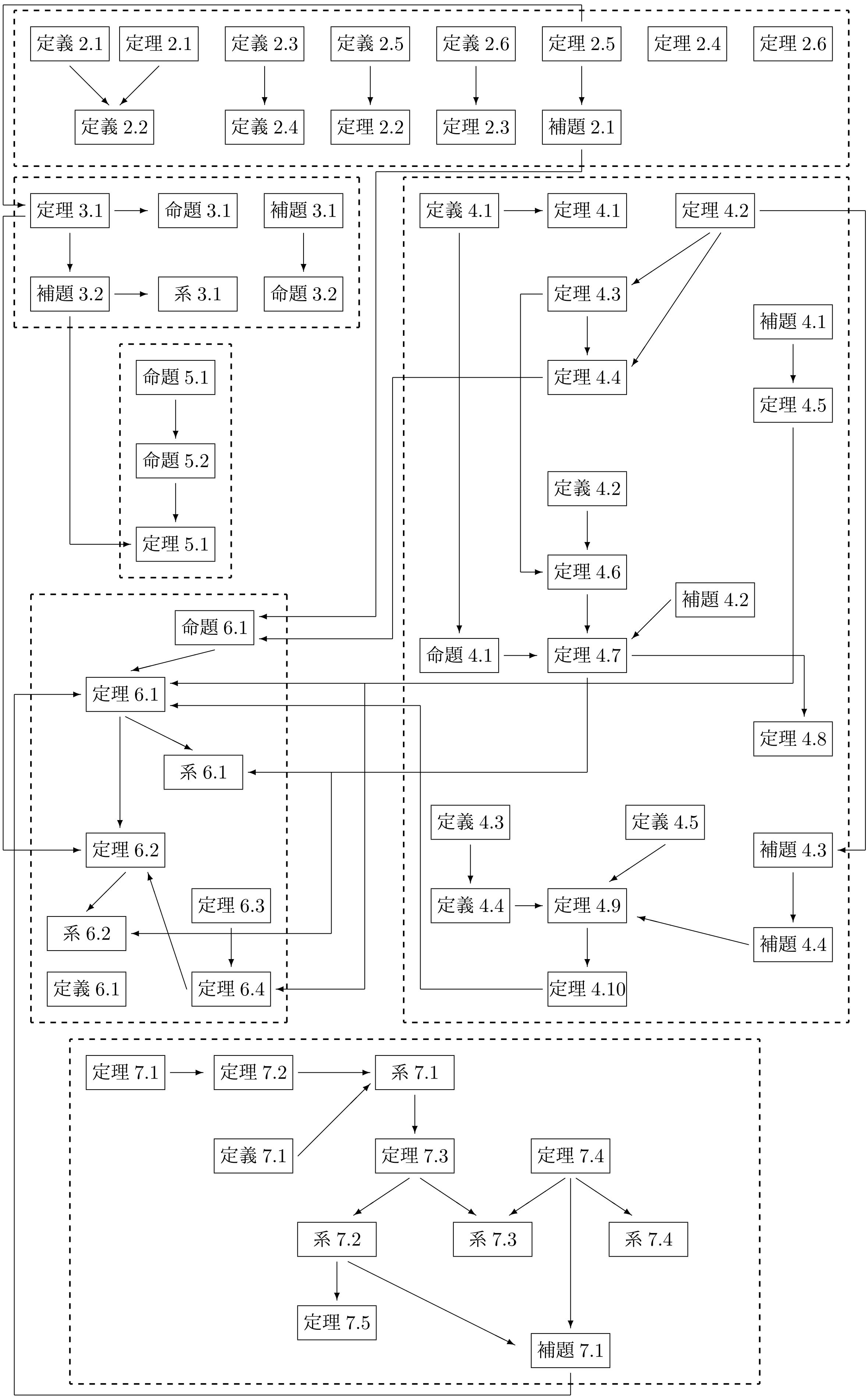
分野	項目	ポイント
ポテンシャル論	Fredholm の積分方程式 Newton 核 Poisson 核	特異積分作用素 擬微分作用素
変分法	変分原理 Euler–Lagrange 方程式	関数空間の設定 完備性、コンパクト性

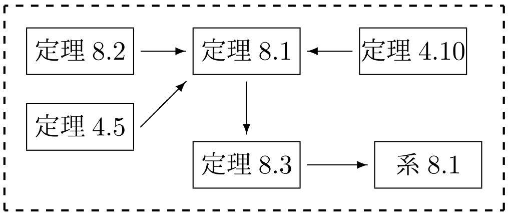
本講義ノートでは，そのうちの 1 つである Dirichlet の原理を用いた変分法のアイデアについて証明する。Dirichlet の原理は，Riemann が Laplace 方程式に対する Dirichlet 問題の解の存在の証明の際に提唱した方法である。本講義ノートでは，Laplace 作用素の場合から始め，順次、一般の楕円型作用素の場合について考察する。尚、古典的なポテンシャル論の現代版である擬微分作用素の理論を援用したアプローチについては、文献 [4] を参照されたい。

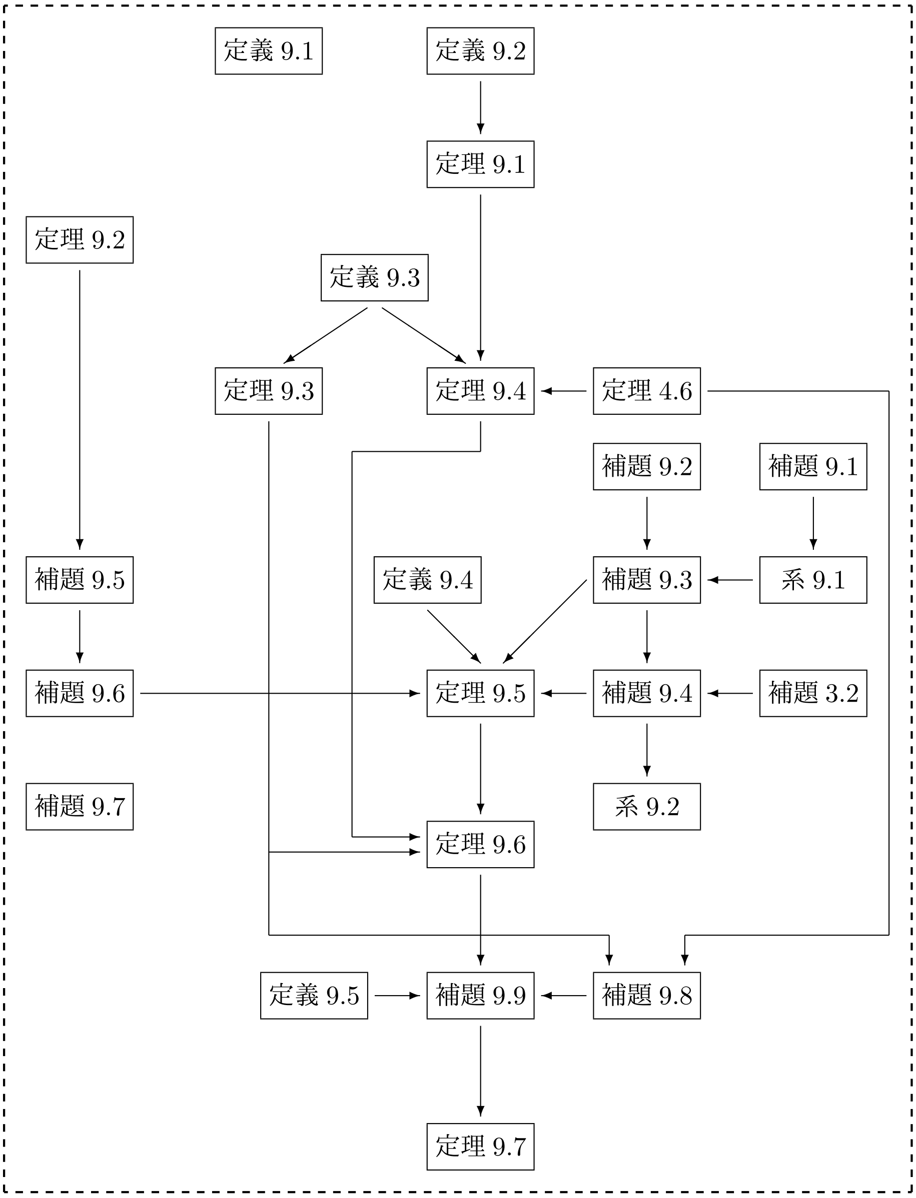
この問題に関して用いる主な理論，定理の鳥瞰図は, 次の通りである：

テーマ	Laplace 作用素の場合	一般楕円型作用素の場合
解の存在定理	Dirichlet の原理 Poincaré の不等式	Gårding の不等式 Lax–Milgram の定理 Fredholm の交代定理
解の一意性定理	Green の定理	Gårding の不等式
解の正則性定理	Weyl の補題	差分法
固有値分布	Rellich の定理 Hilbert–Schmidt の理論	Rellich の定理 Hilbert–Schmidt の理論

さらに、読者の便宜のため、次ページに, 本講義ノートでの定義，定理，補題，命題，系のつながりを一覧表にまとめてある。


定義 2.1
定理 2.1
定義 2.3
定義 2.5
定義 2.6
定理 2.5
定理 2.4
定理 2.6
定義 2.2
定義 2.4
定理 2.2
定理 2.3
補題 2.1
定理 3.1
命題 3.1
補題 3.1
補題 3.2
系 3.1
命題 3.2
定義 4.1
定理 4.1
定理 4.2
定理 4.3
補題 4.1
定理 4.4
定理 4.5
命題 5.1
命題 5.2
定理 5.1
定義 4.2
定理 4.6
補題 4.2
命題 6.1
命題 4.1
定理 4.7
定理 6.1
定理 4.8
系 6.1
定義 4.3
定義 4.5
定理 6.2
補題 4.3
定理 6.3
定義 4.4
定理 4.9
系 6.2
補題 4.4
定義 6.1
定理 6.4
定理 4.10
定理 7.1
定理 7.2
系 7.1
定義 7.1
定理 7.3
定理 7.4
系 7.2
系 7.3
系 7.4
定理 7.5
補題 7.1


定理 8.2
定理 8.1
定理 4.10
定理 4.5
定理 8.3
系 8.1


定義 9.1
定義 9.2
定理 9.1
定理 9.2
定義 9.3
定理 9.3
定理 9.4
定理 4.6
補題 9.2
補題 9.1
補題 9.5
定義 9.4
補題 9.3
系 9.1
補題 9.6
定理 9.5
補題 9.4
補題 3.2
補題 9.7
系 9.2
定理 9.6
定義 9.5
補題 9.9
補題 9.8
定理 9.7

目 次

第 I 部
準備

1　記号

(1) Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の点に対して, 伝統的な記号

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を使う。 また, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して,

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

とおく。

(2) 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ に対して,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

とおく。 また, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ に対して,

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

と定義する。

記号：$\alpha \le \beta$ は, $\alpha_j \le \beta_j$, $1 \le j \le n$, を意味する。 このとき,

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \binom{\beta_2}{\alpha_2} \cdots \binom{\beta_n}{\alpha_n}.$$

(3) 偏導関数について, 次の省略形を使う：

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i = \sqrt{-1})$$

例えば, 高階の偏導関数は次のようになる：

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

同様に, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

と表す。

2 超関数

この節では、超関数論の基本的な事項、概念、定理等について、丁寧に解説する。超関数導入の利点は、代数方程式の解法との比喩で、次のように述べられる：

代数学	解析学
代数方程式の解法	微分方程式の解法
代数的閉体（複素数体）の構成	完備な関数空間（超関数）の構成
代数学の基本定理	超関数解の存在定理
根の性質を調べる	超関数解の性質を調べる

あるいは、より詳しい対照表を作れば、次のようになる：

テーマ	代数方程式	微分方程式
枠組み	実数体	連続関数 Riemann 積分
存在定理	複素数体（代数的閉体）	超関数 Lebesgue 積分（完備性）
定性的性質	根の性質	解の一意性 解の正則性

2.1 超関数の定義

定義 2.1 (急減少関数) *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^n$ 上の C^∞ 関数が，その導関数とともに，$|x| \to \infty$ のとき $|x|$ の任意の巾より早く 0 に収束するとき，$\mathbf{R}^n$ 上の**急減少関数** *(rapidly decreasing function)* という。即ち，$f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ が，任意の $\alpha,\, \beta \in \mathbf{Z}^n_+$ に対して，

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

となるときをいう。$\mathbf{R}^n$ 上の急減少関数の全体を *Schwartz* 空間と呼び, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$，または $\mathcal{S}$ とあらわす。

定理 2.1 $\mathcal{S}$ 上の次の *2* つの定義半ノルムは同値である：

$$\mathcal{P} = \{p_{\alpha,\beta}\}, \quad p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^n_+). \tag{2.1}$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \{p_m\}, \quad p_m(f) = \sum_{|\alpha|+k \le m} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^k \left| \partial^\alpha f(x) \right|. \tag{2.2}$$

定義 2.2 次の (i), (ii) をみたす u を $\mathbf{R}^n$ 上の**緩増加超関数** *(tempered distribution)* という。

(i) u は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 上の線形汎関数，即ち, 各 $\varphi \in (\mathbf{R}^n)$ に複素数 $\langle u, \varphi\rangle$ を対応させる $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathbf{C}$ への線形写像である：

$$\langle u, c\varphi\rangle = c\langle u, \varphi\rangle, \quad \forall c \in \mathbf{C},$$
$$\langle u, \varphi+\psi\rangle = \langle u, \varphi\rangle + \langle u, \psi\rangle, \quad \forall\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

(ii) u は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 上で連続，即ち, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ の定義半ノルム系 $\mathcal{P} = \{p_m\}$ に対して，

$$\forall\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) : p_m(\varphi_j) \longrightarrow 0 \Longrightarrow \langle u, \varphi_j\rangle \longrightarrow 0$$

が成り立つ。

$\mathbf{R}^n$ 上の緩増加超関数全体を $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$，または $\mathcal{S}'$ とあらわす。

以下では, Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。

定義 2.3 $C_0^\infty(\Omega)$ を Ω で定義された C^∞ 関数で，その台が Ω のコンパクト集合となっているものの全体とする。K を Ω のコンパクトな部分集合とするとき，

$$\mathcal{D}_K = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mid \mathrm{supp}\ \varphi \subset K\}$$

とする。さらに，$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$|\varphi|_m = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |\partial_x{}^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

とおく。

定義 2.4 T が Ω 上の位 数 m の**超関数** *(distribution)* であるとは，T が $C_0^\infty(\Omega)$ から $\mathbf{C}$ への写像

$$T : C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \longmapsto T(\varphi) \in \mathbf{C}$$

で，次の性質をもつときをいう：

(i) 線形性：
$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \quad \forall a, b \in \mathbf{C}, \quad \forall\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(ii) Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対して，

$$|T(\varphi)| \le C|\varphi|_m, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}_K$$

となる整数 $m \ge 0$，定数 $C > 0$ が存在する。

以下，Ω 上の超関数全体を $\mathcal{D}'(\Omega)$ と表す。

例 2.1 任意の $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ に対して、次の式により位数 *0* の超関数 T_f が定義できる：

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega).$$

証明. 任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ $(\mathrm{supp}\ \varphi \subset K)$ に対して，

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &\le \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,dx \\ &\le \left(\int_K |f(x)|\,dx\right) \max_K |\varphi|. \quad \square \end{aligned}$$

注意 2.1 写像 $f \longmapsto T_f$ は $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ への単射である。言い換えると，任意の $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ は、超関数 $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ と同一視することができる。これは，後出の Du Bois Raymond の補題（補題 2.1）から示すことができる。このことから，$L^1(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ であり，一般に，

$$L^p(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty.$$

例 2.2 (Dirac の δ-関数) $a < c < b$ のとき，

$$\delta_c(\varphi) = \varphi(c), \quad \forall \varphi \in C_0(I)$$

とする。

$$\delta_c(x) = \begin{cases} +\infty & (x = c), \\ 0 & (x \ne c), \end{cases}$$

で，

$$\int_I \delta_c(x)\,dx = 1$$

である。この超関数 δ_c は位数 0 の超関数である。

証明.

$$|\delta_c(\varphi)| = |\varphi(c)| \le \max_K |\varphi|. \quad \square$$

例 2.3 (Cauchy の主値)

$$\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx \right),$$

とすると，$\text{v.p.}\,\dfrac{1}{x}$ は $\mathbf{R}$ 上で位数 1 の超関数である。

証明.

$$\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

で，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| \le 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

として考えていく。

ところで，

$$\begin{aligned} |(\text{第 2 項})| &\le \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|}|\varphi(x)|\,dx \\ &< \int_{|x|>1} |\varphi(x)|\,dx \\ &\le |K| \max_K |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

一方，

$$\int_{\varepsilon < |x| \le 1} \frac{1}{x}\,dx = 0$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) &= \int_{\varepsilon < |x| \le 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx - \int_{\varepsilon < |x| \le 1} \frac{1}{x}\varphi(0)\,dx \\ &= \int_{\varepsilon < |x| \le 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx \\ &= \int_{\varepsilon < |x| \le 1} \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt \right)\,dx \end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\text{第 1 項}) &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt\right)dx,\\
\left|\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\text{第 1 項})\right| &\le \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 |\varphi'(tx)|\,dt\right)dx\\
&\le \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 dt\right)dx\cdot C_K\max_K|\varphi'(x)|\\
&= 2C_K\max_K|\varphi'(x)|.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$\left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x},\varphi\right\rangle \le |K|\max_K|\varphi(x)| + 2C_K\max_K|\varphi'(x)|$$

となり，

$$\mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}).\quad\square$$

2.2 超関数の微分演算

$u \in C^1(\Omega)$ とすると, 部分積分によって,

$$\int (D_k u)\varphi\, dx = -\int u D_k \varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

となる。この等式の右辺は，u が微分可能でなくても $u \in L^1(\Omega)$ ならば意味を持つ。そこで，$u \in L^1(\Omega)$ のような場合にも、この右辺で定義される超関数でもって偏微分 $D_k u$ を定義する。

定義 2.5 一般に，$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して，

$$(D_k u)(\varphi) = -u(D_k \varphi),\ (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.3}$$

と定義する。さらに, 一般に,

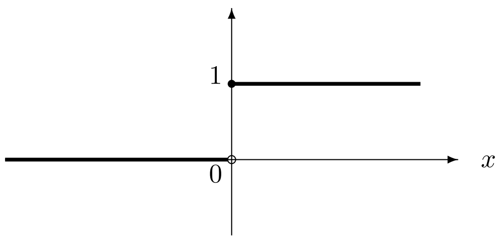
$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.4}$$

と定義する。

この定義により，例えば u が Ω で位数 ℓ の超関数の場合，$D^\alpha u$ は Ω で位数 $(\ell + |\alpha|)$ の超関数となる。また，常に公式 $D_j D_k u = D_k D_j u$ が成り立つ。

例 2.4 次の関数 $H(x)$ を Heaviside 関数という：

$$H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \infty, \\ 0 & -\infty < x < 0. \end{cases}$$



明らかに, $H(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ であるが，$H'(x) = \delta(x)$ となる。実際，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx \\ &= \varphi(0) = \int_{-\infty}^\infty \delta(x)\varphi(x)\, dx = \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

となるからである。

例 2.5 $u(x), f(x) \in C(\mathbf{R})$ であって，超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ の意味で $\dfrac{d}{dx}u = f$ ならば，実は通常の意味で $u'(x) = f(x),\ -\infty < x < \infty$ が成り立っている。

証明. $\varepsilon > 0$ に対して，$u_\varepsilon(x) = u * \varphi_\varepsilon(x),\ f_\varepsilon(x) = f * \varphi_\varepsilon(x)$ とおくと，$u_\varepsilon,\ f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R})$ であって，$\varepsilon \to 0$ のとき，任意の有界区間で一様に $u_\varepsilon(x) \to u(x),\ f_\varepsilon(x) \to f(x)$ となることが容易に分かる。

一方，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x) &= \frac{d}{dx}(u*\varphi_\varepsilon(x)) = u*\varphi'_\varepsilon(x) \\
&= \int u(y)\frac{d}{dx}\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= -\int u(y)\frac{d}{dy}\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= \int f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= f_\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

であるから，$\varepsilon \to 0$ のとき，同じ有界区間で一様に $\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$. したがって，$u(x) \in C^1(\mathbf{R})$ であって $u'(x) = f(x)$, $-\infty < x < \infty$ が成り立つ。 □

定理 2.2 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と $\{u_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ について，超関数の意味で $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ ならば，任意の α に対して，超関数の意味で，

$$D^\alpha u = \lim_{j\to\infty} D^\alpha u_j \tag{2.5}$$

証明. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，仮定から $j \to \infty$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(D^\alpha u_j)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}u_j(D^\alpha\varphi) \\
&\longrightarrow (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\varphi) = (D^\alpha u)(\varphi). \quad \square
\end{aligned}
$$

定義 2.6 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ のとき，

$$(au)(\varphi) = u(a\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.6}$$

によって $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を定義する。

定理 2.3 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ とすると，

$$D_k(au) = (D_k a)u + aD_k u \quad \text{(Leibnitz の公式)} \tag{2.7}$$

が成り立つ。

証明. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\langle D_k(au), \varphi\rangle &= -\langle au, D_k\varphi\rangle \\
&= -\langle u, aD_k\varphi\rangle \\
&= -\langle u, D_k(a\varphi) - (D_k a)\varphi\rangle \\
&= -u(D_k(a\varphi)) + u((D_k a)\varphi) \\
&= (D_k u)(a\varphi) + u((D_k a)\varphi) \\
&= (aD_k u)(\varphi) + ((D_k a)u)(\varphi) \\
&= \langle aD_k u + (D_k a)u, \varphi\rangle. \quad \square
\end{aligned}
$$

2.3 Friedrichs の軟化作用素

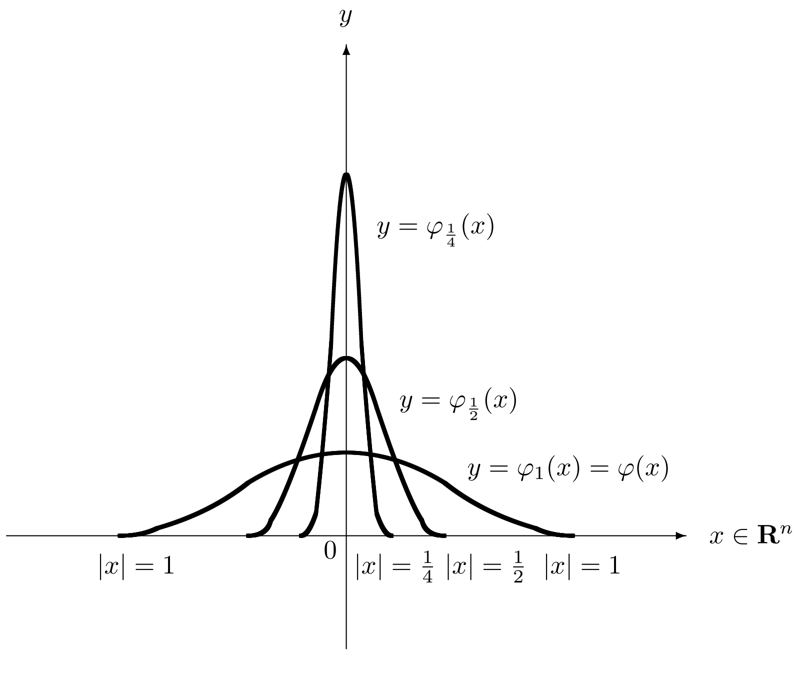
$\mathbf{R}^n$ 上の関数 φ として，次の性質を持つものをとる：

(i) $\varphi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.
(ii) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi(x) = 0, \quad |x| \geq 1$.
(iii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

さて，任意の $f \in L^p(\mathbf{R}^n)(1 \leq p \leq \infty)$ に対して，

$$J_\varepsilon f(x) := f_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy \tag{2.8}$$

とおく。この J_ε を Friedrichs の **軟化作用素** (mollifier) という。



定理 2.4 f_ε に関して次の性質が成り立つ：
(i) $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.
(ii) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

証明. (i) Young の不等式より，

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1}\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

(ii) $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ だから (2.8) の右辺より x について何回でも微分可能であることがわかる。よって，$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. $\square$

定理 2.5 $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ で，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

とする。また，

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

とする。このとき，

(i) $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ ならば，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^n).$$

(ii) $f \in L^p(\mathbf{R}^\infty)$ が一様連続ならば，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

証明. (i)

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

より，

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} (f(x-y) - f(x))\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (f(x-\varepsilon z) - f(x))\varphi(z)\,dz. \end{aligned}$$

よって，Minkowski の不等式より，

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^p} \le \int_{\mathbf{R}^n} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p} |\varphi(z)|\,dz.$$

ところで，

$$\|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p} \le \|f_{-\varepsilon z}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} = 2\|f\|_{L^p}$$

だから，

$$\|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p}|\varphi(z)| \le 2\|f\|_{L^p}|\varphi(z)| \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

また，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p} = 0$$

より，Lebesgue の優収束定理を適用して，

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^p} &\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p}|\varphi(z)|\,dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p}|\varphi(z)|\,dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ が一様連続であるとすると，φ の積分可能性より，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus W} |\varphi(z)|\,dz < \delta$$

となるコンパクト集合 W が存在する。よって，

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbf{R}^n} |f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \\ \le\ & \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,|\,\varphi(y)|\,dy \right) \\ =\ & \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left(\int_W |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,|\,\varphi(y)|\,dy + \int_{\mathbf{R}^n\setminus W} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,|\,\varphi(y)|\,dy \right) \\ \le\ & \sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n \\ y\in W}} |f(x-\varepsilon y) - f(x)| \int_W |\varphi(y)|\,dy + 2\|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}^n\setminus W} |\varphi(y)|\,dy \\ \le\ & \sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n \\ y\in W}} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,\|\varphi\|_{L^1} + 2\delta\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

ところで，f は一様連続で，W がコンパクトだから，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\ y\in W}}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|\right)=0.$$

よって，

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\|f*\varphi_\varepsilon-f\|_{L^\infty}\leq 2\delta\|f\|_{L^\infty}.\quad\Box$$

定理 2.6 $C_0(\mathbf{R}^n)$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leq p<\infty)$ のなかで $\|\cdot\|_{L^p}$ に関して稠密である。

証明. $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$, $f_1(x)=\mathrm{Re}f(x)$, $f_2(x)=\mathrm{Im}f(x))$ とおくと，$f\in L^p$ なので

$$f_1^+,\ f_1^-,\ f_2^+,\ f_2^-\in L^p$$

となる。よって，$f\geq 0$ として考えても一般性は失わない。

任意の $\varepsilon>0$ をとる。$S_n=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x|<n\}$ とおくと，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\,dx<\infty$ より，

$$\int_{\mathbf{R}^n-S_n}|f(x)|^p\,dx<\varepsilon^p$$

とできる。よって，

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & x\in S_n,\\ 0 & x\in {S_n}^c\end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_p &= \left(\int_{\mathbf{R}^n}|f_n(x)-f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^n-S_n}|f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

ところで，$f_n\geq 0$ より，$f_n(x)$ は非負単関数の単調増加列の極限となる。単関数 $g(x)$ を，

$$f_n(x)\geq g(x)\geq 0,\quad \int_{\mathbf{R}^n}(f_n(x)-g(x))^p\,dx<\varepsilon^p$$

となるようにとれる。よって，

$$\|f_n-g\|_p<\varepsilon.$$

また，$g(x)$ は，

$$g(x)=\sum_{j=1}^k\alpha_j\chi_{E_j}(x)\quad(\alpha_j>0,\quad E_j\subset S_n)$$

とかける。よって，各 E_j に対し，

$$F_j\subset E_j\subset G_j,\quad \mu(G_j-E_j)<\left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p$$

をみたすような閉集合 F_j，開集合 G_j が存在する。S_n は開集合だから，$G_j\subset S_n$ とできる。
$h_j(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上で $0\leq h_j(x)\leq 1$ となる連続関数で，

$$h_j(x)=\begin{cases}1 & x\in F_j,\\ 0 & x\in {G_j}^c\end{cases}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{E_j}(x) - h_j(x)|^p d\mu &\leq \int_{G_j - E_j} 1^p d\mu \\ &= \mu(G_j - E_j) \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p.\end{aligned}$$

よって，

$$\|\chi_{E_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{k\alpha_j}.$$

$h(x) = \sum_{j=1}^{k} h_j(x)$ とおくと，$h \in C_0(\mathbf{R}^n)$ で，

$$\begin{aligned}\|g - h\|_{L^p} &\leq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \|\chi_{E_j} - h_j\|_{L^p} \\ &< \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\|f - h\|_{L^p} &\leq \|f - f_n\|_{L^p} + \|f_n - g\|_{L^p} + \|g - h\|_{L^p} \\ &< 3\varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

2.4　Du Bois Raymond の補題

補題 2.1 (Du Bois Raymond) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ が，

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

を満たすならば，

$$f = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

証明. K を Ω の任意のコンパクト部分集合とし，$\chi \in C_0^1(\Omega)$ を K 上で $\chi(x) = 1$ とする。

$$f_\chi(x) = \chi(x)f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K, \\ \chi(x)f(x) & x \notin K \end{cases}$$

とすると，

$$f_\chi \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

$\rho \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ を，

$$\begin{cases} \text{supp } \rho \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}, \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

として，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とする。
すると，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$\rho_\varepsilon * f_\chi \longrightarrow f_\chi \quad \text{in } L^1(\mathbf{R}^n).$$

ところで，

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon * f_\chi(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) f_\chi(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(y)(\chi(y)\rho_\varepsilon(x-y))\,dy.\end{aligned}$$

$$\chi(\cdot)\rho_\varepsilon(x-\cdot) \in C_0^1(\mathbf{R}^n), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

よって，

$$\rho_\varepsilon * f_\chi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

とすると，

$$\|f_\chi\|_{L^1} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\rho_\varepsilon * f_\chi\|_{L^1} = 0$$

となり，

$$f_\chi(x) = \chi(x) f(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n.$$

特に，

$$f(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in K.$$

したがって，K は任意なので，

$$f(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \quad \square$$

3 Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ と $H_0^1(\Omega)$

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界な領域（連結開集合）とする。$u,\, v \in C^1(\overline{\Omega})$ ならば，

$$D(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\, dx$$
$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + D(u,u) \right)^{1/2}$$

とおく。$W^1(\Omega)$ を

$$W^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid D_i u \in L^2(\Omega),\ 1 \le i \le n \right\}$$

とかき，**Sobolev 空間**という。ただし，$D_i u$ は超関数の意味での偏微分である。空間 $W^1(\Omega)$ は, 内積

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u(x) \cdot \overline{v(x)}\, dx + D(u,v)$$

に関して Hilbert 空間である。

さらに，$H^1(\Omega)$ を，ノルム $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ に関して $C^1(\overline{\Omega})$ の完備化した空間とすると、次の定理が成り立つ：

定理 3.1

$$W^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

証明. $u \in H^1(\Omega)$ とすると，$H^1(\Omega)$ の完備性より，

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

となるような $C^1(\overline{\Omega})$ の Cauchy 列 $\{u_j\}$ が存在する。さらに，$\left\{ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}$ は $L^2(\Omega)$ の Cauchy 列である。よって，$L^2(\Omega)$ の完備性より，

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \longrightarrow v \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

となる $v \in L^2(\Omega)$ が存在する。したがって，任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega)$，$i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx &= \lim_{j \to \infty} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \\
&= -\lim_{j \to \infty} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) \varphi(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega v(x) \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

よって，$D_i u = v \in L^2(\Omega)$ となり，$H^1(\Omega) \subset W^1(\Omega)$.

逆に，$u \in W^1(\Omega)$ とする。また，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$ となるような $\rho(x) \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ をとり，

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\rho^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad \forall \varepsilon > 0$$

とおく。さらに，

$$u_\varepsilon(x) = u * \rho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy$$

とおくと，$u_\varepsilon \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$. ここで，

$$\rho_\varepsilon{}'(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_i} \rho_\varepsilon(x-y)$$

に注意すると，部分積分により，

$$\begin{aligned} {u_\varepsilon}'(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} {\rho_\varepsilon}'(x-y)u(u)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\,dy. \end{aligned}$$

したがって，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\longrightarrow u \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^n), \\ {u_\varepsilon}' &\longrightarrow u' \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

ここで，u_ε を Ω に制限すると，

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\longrightarrow u \quad \text{in } L^2(\Omega), \\ {u_\varepsilon}' &\longrightarrow u' \quad \text{in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

よって，$u \in H^1(\Omega)$ となるので，$W^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. □

注意 3.1 この定理より，これからは $W^1(\Omega)$ と $H^1(\Omega)$ を同一視して, $H^1(\Omega)$ とする。

次に，$H^1(\Omega)$ のすべての関数が一般的な意味で“境界値”をもつことを示す。

命題 3.1 (トレース定理) トレース写像を

$$\begin{aligned} \gamma_0 : C^1(\Omega) &\longrightarrow C(\partial\Omega) \\ u &\longmapsto u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

と定義する。このとき，写像 γ_0 は連続的な写像

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

に、一意的に拡張できる。

証明.

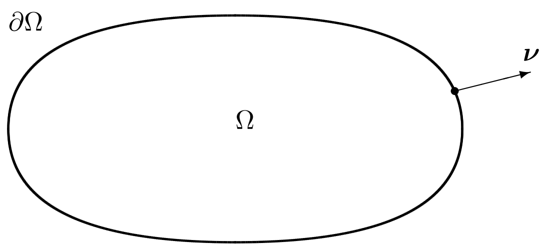
$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2\,d\sigma(x) \leq C\|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

を示せばよい。ただし，C は正の定数とする。

$C^1(\overline{\Omega})$ の関数は $H^1(\Omega)$ で稠密なので，

$$u \in C^1(\overline{\Omega})$$

と仮定する。



このとき，発散定理（定理 7.1）より，

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2\,d\sigma(x) &= \int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2 \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\,d\sigma(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|u(x)|^2\nu_j(x)\right)\,dx. \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ は, 境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである。したがって，Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2\, d\sigma &= \sum_{j=1}^n \left\{ \int_\Omega \left| u(x) \cdot \overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)} \cdot \nu_j(x)\, dx \right| + \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \cdot \overline{u(x)} \cdot \nu_j(x) \right| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega |u(x)|^2 \left| \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j}(x) \right| dx \right\} \\ &\leq C \left\{ \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \right\}. \quad \square\end{aligned}$$

$C_0^1(\Omega)$ を Ω でコンパクトな台をもつ $C^1(\Omega)$ の関数の集合とし，$H_0^1(\Omega)$ を $C_0^1(\Omega)$ の $H^1(\Omega)$ における閉包とする。即ち，$u \in H_0^1(\Omega)$ であるとは，$u \in H^1(\Omega)$ に対して，

$$\|u - \varphi_j\|_{1,\Omega} \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty)$$

となる関数列 $\varphi_j \in C_0^1(\Omega)$ が存在するときをいう。

次の命題は，境界条件によって $H_0^1(\Omega)$ の特徴づけを与える：

命題 3.2 $u \in H^1(\Omega)$ に対して，次の *2* 条件は同値である。

(i) $u \in H_0^1(\Omega)$.
(ii) $\gamma_0(u) = 0$.

言い換えると，

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(u) = 0\}.$$

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)：$u \in H_0^1(\Omega)$ とすると，$u_j \to u$ となるような $C_0^1(\Omega)$ の Cauchy 列 $\{u_j\}$ が存在する。よって，

$$\gamma_0(u) = \lim_{j\to\infty} \gamma_0(u_j) = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：以下，上半空間 $\mathbf{R}_+^n$ で話をすすめる。$u \in H^1(\Omega)$ として，

$$u(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(x) u(x) + \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i(x)\right) u(x)$$

と分解する。ただし，

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i(x) = 1$$

とする。このとき，任意の $\varepsilon' > 0$ に対して，

$$\|\alpha_i u - \psi_i\|_{1,\Omega} < \varepsilon', \quad i = 1, 2, \ldots, p \tag{3.1}$$

となるような $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在することを示せば，

$$\|u - \sum_{i=1}^p \psi_i\|_{1,\Omega} \leq \sum_{i=1}^p \|\alpha_i u - \psi_i\|_{1,\Omega} \leq p\varepsilon$$

だから，u が C_0^∞ 関数で近似できるので $u \in H_0^1(\Omega)$ であることがわかる。

ここで，次の補題をあげる：

補題 3.1 $\psi \in H^1(\mathbf{R}_+^n)$ で $\gamma_0(\psi) = 0$ とする。このとき，$\varepsilon > 0$ に対して，

$$\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) \in H^1(\mathbf{R}_+^n)$$

で，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) \longrightarrow \psi(x', x_n) \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}_+^n).$$

ただし，

$$\widetilde{\psi}(x', x_n) = \begin{cases} \psi(x', x_n) & x_n > 0, \\ 0 & x_n < 0 \end{cases}$$

である。

補題 3.1 の証明. Lebesgue 積分の絶対連続性より，

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} |\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) - \psi(x)|^2 \, dx \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

は明らか。また，$\gamma_0(\psi) = 0$ だから，ジャンプ公式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n}\widetilde{\psi}(x', x_n) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\psi(x', x_n)\right)^{\sim} + (\gamma_0(\psi)) \otimes \delta(x_n) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\psi(x', x_n)\right)^{\sim} \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_n}\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_n}\psi(x', x_n) \right|^2 dx &= \int_{\mathbf{R}_+^n} \left| \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x_n}(x', x_n - \varepsilon) - \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx \\ &\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0). \end{aligned}$$

したがって，

$$\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) \longrightarrow \psi(x', x_n) \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}_+^n). \quad \square$$

命題 3.2 の証明に戻る。補題 3.1 より，軟化作用素を用いて，

$$\widetilde{\psi}_{\varepsilon/2}(x', x_n) := \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \rho_{\varepsilon/2}(x' - y', x_n - y_n)\widetilde{\psi}(y', y_n - \varepsilon) \, dy_n \right) dy'$$

を考える。$0 < x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$，$y_n > \varepsilon$ とすると，$y_n - x_n > \dfrac{\varepsilon}{2}$ だから，

$$\rho_{\varepsilon/2}(x' - y', x_n - y_n) = 0.$$

よって，$\widetilde{\psi_{\varepsilon/2}}(x', x_n)$ の台が $x_n \geq \varepsilon/2$ の範囲にあることがわかり，

$$\widetilde{\psi_{\varepsilon/2}}(x', x_n) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}_+^n).$$

また，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，$H^1(\Omega)$ の位相で $\psi(x)$ に近づく。この関数を $\psi_i(x)$ とすれば，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき (3.1) をみたす。

以上より，命題 3.2 が証明できた。 $\square$

次の補題により，

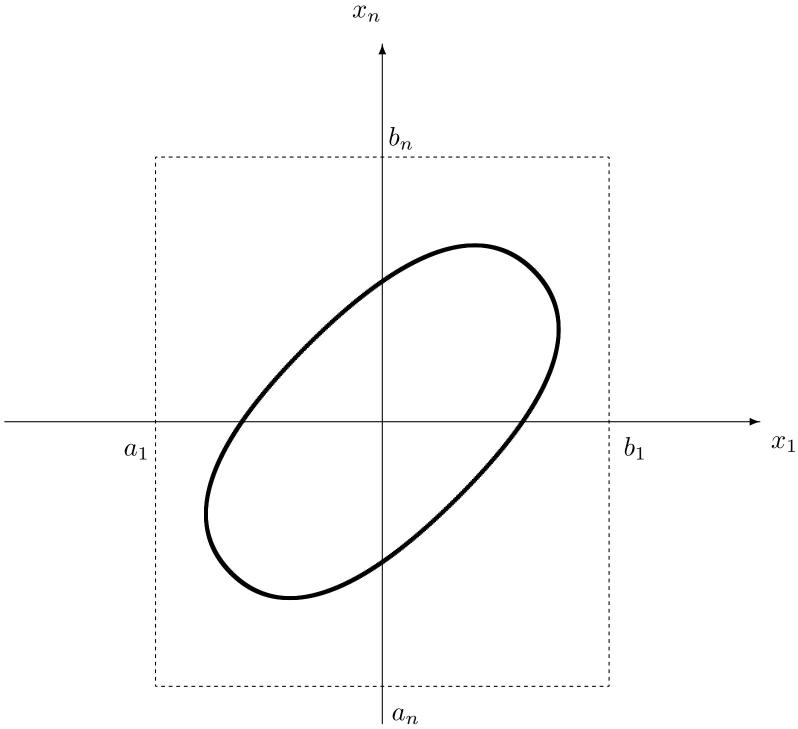
$$D(w, w) \leq \|w\|_{1,\Omega}^2 \leq (C + 1)D(w, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

となり，セミノルム $D(\cdot, \cdot)^{1/2}$ と Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ のノルム $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ が同等となる：

補題 3.2 (Poincaré)

$$\int_\Omega |w(x)|^2\,dx \le C\cdot D(w,w),\quad \forall w\in H^1_0(\Omega)$$

となるような正の定数 C が，Ω の直径（最小の (a_j,b_j)）のみに依存して存在する。



証明. $C^1_0(\Omega)$ の関数は $H^1_0(\Omega)$ で稠密なので，

$$w\in C^1_0(\Omega)$$

と仮定する。このとき，

$$w(x_1,x') = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}(t,x')\,dt$$

だから，Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}|w(x_1,x')|^2 &\le \int_{a_1}^{x_1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}(t,x')\right|^2 dt\cdot(x_1-a_1)\\ &\le \int_{a_1}^{b_1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}(t,x')\right|^2 dt\cdot(b_1-a_1).\end{aligned}$$

したがって，両辺 $x=(x_1,x')$ に対して積分していくと，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w(x)|^2\,dx &\le \int_{a_1}^{b_1} dx_1\cdot\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}(t,x')\right|^2 dt\right) dx'\cdot(b_1-a_1)\\ &= (b_1-a_1)^2\int_\Omega\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx.\quad\square\end{aligned}$$

系 3.1 $H^1_0(\Omega)$ は $C^1_0(\Omega)$ のノルム $D(\cdot,\cdot)^{1/2}$ における閉包である。

4 関数解析からの準備

この節では，後の楕円型境界値問題を考える際に非常に重要となるの関数解析の基本的な事項、概念、定理について説明する。関数解析は、線形代数及び微積分の無限次元版である。より具体的に、それらの対照表を作れば、次のようになる：

線形代数	微分方程式	関数解析
有限次元ベクトル	関数	無限次元ベクトル
行列	積分核	線形作用素
連立一次方程式	微分方程式	線形方程式
単位行列	Dirac 超関数	恒等作用素
逆行列	Green 関数	逆作用素

4.1 完全連続（コンパクト）作用素

まず，この後でも非常に重要な役割をもつ完全連続（コンパクト）作用素を定義する。

定義 4.1 X，Y を Hilbert 空間とし，X から Y への線形作用素を T とする。このとき，X の任意の有界列 $\{x_n\}$ に対して，点列 $\{Tx_n\}$ が Y のある元に収束するような部分列をもつとき，T が**完全連続**（または**コンパクト**）であるという。

定理 4.1 完全連続作用素 T は有界作用素である。

証明. 背理法により示す。T が有界でないとすると，$\|x_n\| \leq 1$ かつ $\|Tx_n\| \to \infty$ となる点列 $\{x_n\}$ が存在する。これは, T の完全連続性に矛盾する。よって，T は有界。 □

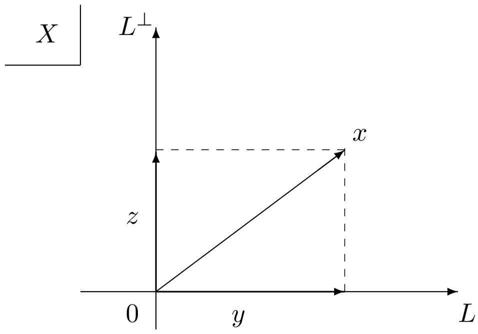
4.2 F.Riesz の定理と Lax–Milgram の定理

直交性に関して，Hilbert 空間 X の中に閉部分空間 L が与えられたとき，L と L に直交する閉部分空間に X が分解される重要な定理がある。この定理を後の F.Riesz の定理の証明の際に用いられる。

定理 4.2 (射影定理) L を Hilbert 空間 X の閉部分空間とする。このとき，任意の $x \in X$ は,

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^{\perp}$$

と一意的に直交分解できる。



証明.

$$\delta = \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|, \quad \forall x \notin L$$

とおくと，

$$\|x - \xi_n\| \longrightarrow \delta, \quad \xi_n \in L \tag{4.1}$$

となる点列 $\{\xi_n\}$ が存在する。中線定理より，

$$\|(x - \xi_n) + (x - \xi_m)\|^2 + \|(x - \xi_n) - (x - \xi_m)\|^2 = 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2. \tag{4.2}$$

$\dfrac{1}{2}(\xi_n + \xi_m) \in L$ だから，δ の定義より，

$$\delta \le \left\| x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2} \right\|. \tag{4.3}$$

よって，(4.2)，(4.3) より，

$$\begin{aligned} 0 \le \|\xi_n - \xi_m\|^2 &= 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2 - 4\left\| x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2} \right\|^2 \\ &\le 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2 - 4\delta^2 (\equiv \alpha_{n,m}). \end{aligned}$$

(4.1) を考慮すると，$n, m \to \infty$ のとき，$\alpha_{n,m} \to 0$. ゆえに，

$$\|\xi_n - \xi_m\| \longrightarrow 0$$

となり，$\{\xi_n\}$ はある $y \in X$ に収束する。今，L は閉だから，$y \in L$.

$$\|x - \xi_n\| \longrightarrow \|x - y\|$$

だから，(4.1) より，

$$\delta = \|x - y\|.$$

ここで，$z = x - y$ とおき，$z \in L^{\perp}$ を示す。$\xi \in L$ に対して，

$$\varphi(t) = \|z - \gamma t \xi\|^2, \quad t \in \mathbf{R}$$

とおく。ただし，$\gamma = (z, \xi)$ である。$y + \gamma t \xi \in L$ だから，δ の定義より，

$$\delta^2 = \varphi(0) \le \varphi(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

一方，

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|z\|^2 - \bar{\gamma}(z, \xi)t - \gamma(\xi, z)t + |\gamma|^2\|\xi\|^2 t^2 \\ &= \|z\|^2 - 2|\gamma|^2 t + |\gamma|^2\|\xi\|^2 t^2. \end{aligned}$$

もし，$\gamma \neq 0$ ならば，t が十分小さいとき，

$$\varphi(t) < \varphi(0) = \delta^2$$

となり，矛盾である。よって，$\gamma = 0$. 即ち，

$$(z, \xi) = (x - y, \xi) = 0, \quad \xi \in L$$

となり，

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^{\perp}$$

と直交分解できることが示せた。

直交分解の一意性に関しては，

$$x = y + z = y' + z', \quad y, y' \in L, \quad z, z' \in L^{\perp}$$

と分解されているとすると，

$$y - y' = z' - z.$$

$z' - z \in L^{\perp}$ より，

$$\|y - y'\|^2 = (z' - z, y - y') = 0.$$

よって，$y = y'$. これより，$z = z'$. したがって，直交分解は一意的であることが示せた。 □

次の定理は，関数解析学で最も基本的な F.Riesz の定理である：

定理 4.3 (F.Riesz の定理) X を Hilbert 空間とし，f を X 上の有界線形汎関数とする。このとき，任意の $x \in X$ に対して，

$$f(x) = (x, y) \tag{4.4}$$

となるような $y \in X$ が唯一つ存在する。さらに，

$$\|f\| = \|y\|. \tag{4.5}$$

証明. (4.4) に関して：$f = 0$ のときは，$y = 0$ ととればよい。そこで $f \neq 0$ のときを考える。

$$N = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

とすれば，N は X の閉部分空間である。実際，$x_n \in N$，$x_n \to x$ とすれば，f の連続性より，

$$f(x_n) \longrightarrow f(x).$$

$x_n \in N$ より，$f(x_n) = 0$ だから $f(x) = 0$ となり，$x \in N$ となる。よって，$N \neq X$ だから，定理 4.2 より，

$$X = N \oplus N^{\perp}$$

と直交分解できる。$N^{\perp}$ の元 $y_0 \neq 0$ をとると，任意の $x \in X$ に対して，

$$f(y_0)x - f(x)y_0 \in N$$

だから，

$$\begin{aligned} (f(y_0)x - f(x)y_0, y_0) &= 0 \\ f(y_0)(x, y_0) - f(x)\|y_0\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

両辺を $\|y_0\|^2$ で割ると，

$$f(x) = \left(x, \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0 \right).$$

よって，

$$\frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0 = y$$

とおけば，

$$f(x) = (x, y), \quad \forall x \in X.$$

一意性に関しては，$f(x) = (x, y) = (x, y')$ とすると，

$$(x, y - y') = 0.$$

ここで，$x = y - y'$ とおくと，$y = y'$ となり一意性が示せる。
(4.5) に関して：$\|x\| = 1$ に対して，Schwarz の不等式より，

$$\|f(x)\| = \|(x, y)\| \le \|x\| \, \|y\| = \|y\|.$$

よって，

$$\|f\| \le \|y\|. \tag{4.6}$$

また，$f(x) = (x, y)$ において，$x = y/\|y\|$ ととれば，

$$\|y\| = \frac{f(y)}{\|y\|} = f(x) \le \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \le \|f\|. \tag{4.7}$$

したがって，(4.6)，(4.7) より，

$$\|f\| = \|y\|.$$

以上より，定理 4.3 が証明できた。 □

次の Lax–Milgram 定理は，F.Riesz の定理の拡張であり，偏微分方程式の解の存在定理を証明する際に、基本的な役割を果たす。本講義ノートでは，楕円型境界値問題の場合に適用する：

定理 4.4 (Lax-Milgram) *X を Hilbert 空間とする。また，$B(\cdot, \cdot)$ を $X \times X$ から $\mathbf{C}$ への双 1 次形式 (sesquilinear) とし，*

$$|B(x, y)| \le c_1 \|x\| \, \|y\|, \quad \forall x, y \in X \tag{4.8}$$

$$|B(x, x)| \ge c_2 \|x\|^2, \quad \forall x \in X \tag{4.9}$$

を満たすような定数 $c_1 > 0$，$c_2 > 0$ が存在するとする。このとき，任意の $f \in X^*$ に対して，

$$B(x, \widetilde{y}) = f(x), \quad \forall x \in X$$

となる $\widetilde{y} \in X$ が唯一つ存在する。

証明. 今，$y \in X$ を固定すると，

$$X \ni x \longmapsto F_y(x) = B(x, y) \in \mathbf{C}$$

で，(4.8) より，

$$|F_y(x)| = |B(x, y)| \le c_1 \|x\| \, \|y\|.$$

ここで，$x \to 0$ とすると $F_y \to 0$ だから，$F_y(x)$ は連続汎関数である。したがって，F. Riesz の定理（定理 4.3）より，

$$B(x, y) = F_y(x) = (x, z)$$

となるような $z \in H$ が唯一つ存在する。よって，$z = T(y)$ とおくと，

$$B(x, y) = (x, T(y)).$$

となるような $T(y) \in X$ が存在する。このとき，X から X への作用素 T は線形で，(4.8) において $x = T(y)$ とすると，

$$\|T(y)\| \le c_1 \|y\|.$$

また，(4.9) より，

$$c_2\|y\|^2 \le |B(y,y)| = |(y, T(y))| \le \|y\|\,\|T(y)\|.$$

したがって，

$$c_2\|y\| \le \|T(y)\| \le c_1\|y\|. \tag{4.10}$$

このことから T は単射で，$T(X)$ は X の閉部分集合であることがわかる。実際，$T(X)$ が X の閉部分集合であることは，$\{Ty_n\} \subset X$，$Ty_n \to z$ とするとき，

$$z = Tx \in T(X)$$

となる $x \in X$ が存在することを示せばよい。(4.10) の左の不等式より，

$$c_2\|y_n - y_m\| \le \|T(y_n - y_m)\| \longrightarrow 0$$

だから，

$$y_n \longrightarrow y.$$

よって，(4.10) の右の不等式より，T は連続だから，

$$Ty_n \longrightarrow Ty$$

となり，$Ty = z$ とおけば $T(X)$ が X の閉部分集合である。

主張 4.1 $T(X) = X$.

証明. $T(X) \ne X$ とする。$T(X)$ は閉部分集合だから $X = T(X) \oplus T(X)^\perp$ なので，$z \in T(X)^\perp$ となるような $z \ne 0$ が存在する。このとき，

$$(z, T(y)) = 0, \quad \forall y \in X.$$

ここで，$y = z$ とすると，

$$|(z, T(z))| = |B(z,z)| \ge c_2\|z\|^2 > 0$$

となり矛盾。 □

この主張より，T は全単射だから，逆写像が存在して，

$$f(x) = (x, y_f) = B(x, T^{-1}(y_f)), \quad y_f \in X$$

となり，$\widetilde{y} = T^{-1}(y_f)$ ととればよい。

以上より，定理 4.4 が証明できた。 □

4.3 Rellich の定理

次に，完全連続性（コンパクト性）に関する定理をあげる。この定理は，楕円型境界値問題の固有値分布を調べるときなどに用いられる。

定理 4.5 (Rellich) Ω を有界領域とする。任意の有界列 $f_j \in H_0^1(\Omega)$ に対して，適当な部分列 $\{f_{j_p}(x)\}$ が存在して，それが $L^2(\Omega)$ の収束列になっている。即ち，埋め込み写像

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

が完全連続である。

完全連続性（コンパクト性）に関する Rellich の定理は、Bolzano–Weierstrass の定理、Ascoli–Arzelà の定理と次のように密接に関係している：

分野	項目	コンパクト性に関する定理
実数論	数列	Bolzano–Weierstrass の定理
微分積分学	連続関数列	Ascoli–Arzelà の定理
超関数論	超関数列	Rellich の定理

さて、Rellich の定理（定理 4.5）を証明するための準備として, 次のポテンシャル論における補題をあげる：

補題 4.1

$$v(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \quad u \in C(\Omega)$$

とおくと,

$$v \in C^2(\Omega), \quad \Delta v = u.$$

ただし，$\omega_n = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ は n 次元単位球の表面積とする。

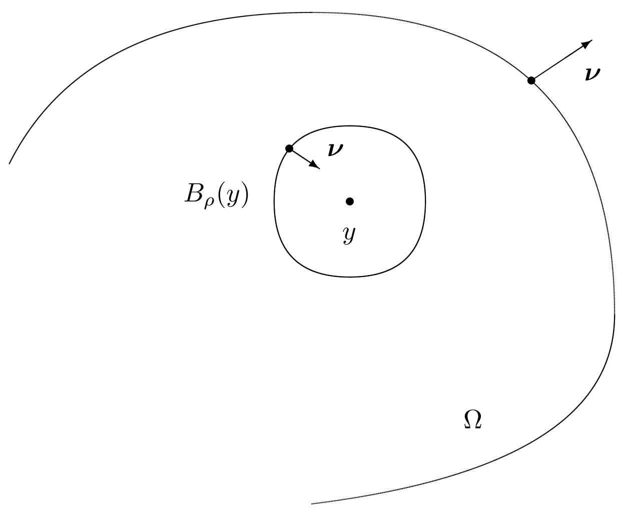
補題 4.1 の証明. u，$v \in C^2(\overline{\Omega})$ とする。Ω の点 y を固定して，Laplace 方程式の基本解（Newton 核）:

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n} & n > 2, \\ \\ \frac{1}{2\pi}\log|x-y| & n = 2 \end{cases}$$

を用いる。簡単な計算より,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y) = \frac{1}{\omega_n}(x_i-y_i)|x-y|^{-n},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Gamma(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\left\{|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right\}|x-y|^{-n-2}.$$

明らかに，$x \neq y$ に対して Γ は調和である。一方，$x = y$ での特異性は，Green の公式の (7.3) で v の代わりに Γ を使うことを妨げている。これを克服する 1 つの方法は，Ω を $\Omega - \overline{B_\rho}$ に置き換える。ただし，ρ は十分小とし，$B_\rho = B_\rho(y)$ とする。



このとき，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega-B_\rho}\Gamma(x-y)\Delta u(x)\,dx &= \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)-u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x-y)\right)d\sigma(x)\\ &\quad+\int_{\partial B_\rho}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)-u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x-y)\right)d\sigma(x)\end{aligned}$$

とできる。さて，

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho}\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)\,d\sigma(x) &= \Gamma(\rho)\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)\,d\sigma(x)\\ &\le \Gamma(\rho)\omega_n\rho^{n-1}\sup_{B_\rho}|Du|\\ &= \frac{\rho}{2-n}\sup_{B_\rho}|Du|\\ &\longrightarrow 0\quad(\rho\downarrow 0)\end{aligned}$$

であり，

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\quad\text{on }B_\rho$$

に注意して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x-y) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n\rho}\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)^{1-n/2}\\ &= \frac{-1}{\omega_n\rho}\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)^{-n/2}\\ &= \frac{-1}{\omega_n\rho^{n-1}}\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho}u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x-y)d\,\sigma(x) &= -\Gamma'(\rho)\int_{\partial B_\rho}u(x)\,d\sigma(x)\\ &= \frac{-1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,d\sigma(x)\\ &\longrightarrow -u(y)\quad(\rho\to 0).\end{aligned}$$

これは，u の連続性より，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\omega_n\rho}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,d\sigma(x)-u(y)\right| &= \frac{1}{\omega_n\rho}\left|\int_{\partial B_\rho}(u(x)-u(y))\,d\sigma(x)\right|\\ &\le \frac{1}{\omega_\rho}\int_{\partial B_\rho}|u(x)-u(y)|\,d\sigma(x)\\ &\le \frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\sup_{|x-y|=\rho}|u(x)-u(y)|\int_{\partial B_\rho}d\sigma(x)\\ &\longrightarrow 0\quad(\rho\downarrow 0)\end{aligned}$$

となることからわかる。よって，(4.11) で $\rho\to 0$ とすると，Green の表現公式：

(4.11) $$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x-y)-\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)\right)d\sigma(x)+\int_\Omega\Gamma(x-y)\Delta u(x)\,dx,\quad y\in\Omega$$

を得る。積分可能な関数 f に対して，$\displaystyle\int_\Omega \Gamma(x-y)f(x)\,dx$ を密度 f をもつ Newton ポテンシャルとよぶ。u が $\mathbf{R}^n$ でコンパクトな台をもつ関数ならば，(4.11) は非常に役に立つ表現式：

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x)\,dx$$

となる。 □

定理 4.5 の証明. $u \in C_0^1(\Omega)$ とする。

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\sum_i (x_i-y_i)^2\right)^\alpha\right\} = \alpha\left(\sum_i (x_i-y_i)^2\right)^{\alpha-1}\cdot 2(x_i-y_i),$$
$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\left(\sum_i (x_i-y_i)^2\right)^\alpha\right\} = \alpha\left(\sum_i (x_i-y_i)^2\right)^{\alpha-1}\cdot 2(y_i-x_i),$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy\right)\\ &= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)u(y)\,dy\\ &= \frac{-1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)u(y)\,dy.\end{aligned}$$

よって，部分積分すると，$u \in C_0^1(\Omega)$ だから，補題 4.1 より，

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy.$$

さらに，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial {x_j}^2}(x) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy\\ &= \frac{1}{\omega_n}\int_\Omega \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy.\end{aligned}$$

したがって，$u \in C_0^1(\Omega)$ に対する次の表現式を得る：

$$u(x) = \Delta v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\right)\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy.$$

この式は極限移行して，$u \in H_0^1(\Omega)$ に対しても成立する。

ところで，積分核は，

$$\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\right| \le \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$$

を満たす。したがって，積分作用素

$$K_j f(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_\Omega \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}f(y)\,dy$$

を定義すると、

$$K_j : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続である。

以上より，埋め込み写像

$$H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は、

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} K_j \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right)$$

と表示されるので、完全連続である。 □

4.4 Hilbert 空間の弱コンパクト性

定義 4.2 X を Hilbert 空間とする。

$$\|\varphi_j - \varphi\| \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は φ に**強収束する**という。また，すべての $\psi \in X$ に対して，

$$(\varphi_j, \psi) \longrightarrow (\varphi, \psi) \quad (j \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は φ に**弱収束する**という。

定理 4.6 (弱コンパクト性定理) (i) $\{x_n\}$ を Hilbert 空間 X の点列とし，$\{\|x_n\|\}$ が有界列であるとする。このとき，$\{x_n\}$ の適当な部分列が存在して $\{x_{n'}\}$ は弱収束する。

(ii) Hilbert 空間 X の点列 $\{x_n\}$ が $x_0 \in X$ に弱収束し，かつ

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$$

を満たすとすると，$\{x_n\}$ は x_0 に強収束する。

証明. (ii)

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\|^2 &= (x_n - x_0, x_n - x_0) \\ &= \|x_n\|^2 - (x_n, x_0) - (x_0, x_n) + \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると，

$$\|x_n - x_0\|^2 \longrightarrow \|x_0\|^2 - 2(x_0, x_0) + \|x_0\|^2 = 0.$$

(i) L を Hilbert 空間 X の閉部分空間とする。任意の $z \in X$ に対して，$P(L)z = y$ とおけば，$x_n \in L$ に対して，

$$(x_n, z) = (P(L)x_n, z) = (x_n, P(L)z) = (x_n, y)$$

となるから，X を可分な Hilbert 空間として考えてよい。また，$\|x_n\| \le 1$ としても一般性を失わない。

さて，$\{y_m\}$ を X の稠密な部分集合とする。

$$|(x_n, y_m)| \le \|x_n\| \, \|y_m\| \le \|y_m\|$$

より，各 y_m に対して $\{(x_n, y_m)\}_{n=1,2,\ldots}$ は有界列である。以下，対角線論法により，適当な部分列 $\{x_{n'}\}$ を選んで，すべての y_m に対して有限な $\lim_{n\to\infty} (x_{n'}, y_m)$ が存在するようにする。Bolzano–Weierstrass の定理より，有界列 $\{(x_n, y_1)\}_{n=1,2,\ldots}$ から収束する部分列

$$(x_{11}, y_1),\ (x_{21}, y_1),\ (x_{31}, y_1),\ \ldots$$

を選ぶ。同じく有界列

$$(x_{11}, y_2),\ (x_{21}, y_2),\ (x_{31}, y_2),\ \ldots$$

から収束する部分列

$$(x_{12}, y_2),\ (x_{22}, y_2),\ (x_{32}, y_2),\ \ldots$$

を選ぶ。

以下同様にして，有界列

$$(x_{1,h-1}, y_h),\ (x_{2,h-1}, y_h),\ (x_{3,h-1}, y_h),\ \ldots$$

から収束する部分列

$$(x_{1,h}, y_h),\ (x_{2,h}, y_h),\ (x_{3,h}, y_h),\ \ldots$$

を選ぶ。

そして，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n'}\}$ を

$$x_{n'} = x_{n,n}$$

と対角線的に選ぶとき，すべての m に対して，

$$(x_{1'}, y_m),\ (x_{2'}, y_m),\ (x_{3'}, y_m),\ \ldots$$

は収束列である。

ところで，$\{y_n\}$ は X においてノルムの意味で稠密だから，任意の $y \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|y - y_{m_0}\| < \varepsilon$$

となる y_{m_0} が存在する。ゆえに，

$$\begin{aligned}
& |(x_{n'}, y) - (x_{k'}, y)| \\
= \;& |(x_{n'}, y) - (x_{n'}, y_{m_0}) + (x_{n'}, y_{m_0}) - (x_{k'}, y_{m_0}) + (x_{k'}, y_{m_0}) - (x_{k'}, y)| \\
\leq \;& \|x_{n'}\|\,\|y - y_{m_0}\| + |(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})| + \|x_{k'}\|\,\|y_{m_0} - y\| \\
\leq \;& 2\varepsilon + |(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})|.
\end{aligned}$$

右辺第 2 項は $n', k' \to \infty$ のとき 0 に収束するので，$\{(x_{n'}, y)\}$ は収束する。ここで，

$$f(y) = \lim_{n' \to \infty} (y, x_{n'}), \quad \forall y \in X$$

とおけば，$f(y)$ は X 上の有界線形汎関数になる。よって，F. Riesz の定理（定理 4.3）より，

$$f(y) = (y, x_0), \quad \forall y \in X$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

ゆえに，$\{x_{n'}\}$ は x_0 に弱収束する。 □

4.5 Hilbert–Schmidt の理論

X を Hilbert 空間とし，X から X への線形作用素 T は完全連続な自己共役作用素であるとする。このとき，次の方程式 (♯) を考える：

$$(\sharp) \qquad (I - \lambda T)u = f \quad \text{in } X.$$

まず，固有値を定義する。

$$T\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi \neq 0$$

であるとき，μ を T の固有値，φ を固有値 μ に対する T の固有解という。

命題 4.1 (i) T の固有値はすべて実数である。
(ii) 任意の 0 でない固有値 μ_0 に対応する固有解の集合は有限次元である。
(iii) 相異なる固有値に対応する固有解は直交する。
(iv) 固有値の集合は，0 以外には集積点をもたない。

証明. (i) T は自己共役作用素だから，

$$T\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi \neq 0$$

とすると，

$$\begin{aligned} \mu(\varphi, \varphi) &= (T\varphi, \varphi) \\ &= (\varphi, T\varphi) \\ &= (\varphi, \mu\varphi) \\ &= \overline{\mu}(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

したがって，$\mu = \overline{\mu}$.
(iii)

$$T\varphi_1 = \mu_1\varphi_1, \quad T\varphi_2 = \mu_2\varphi_2, \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

とすると，μ_1, μ_2 は実数だから，

$$\begin{aligned} \mu_1(\varphi_1, \varphi_2) &= (T\varphi_1, \varphi_2) \\ &= (\varphi_1, T\varphi_2) \\ &= \mu_2(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

したがって，$(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.
(ii) 背理法で示す。任意の 0 でない固有値 μ_0 に対応する固有解の集合は無限次元であるとすると，

$$T\varphi_j = \mu_0\varphi_j, \quad (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}.$$

となるような $\{\varphi_j\} \subset X$ が存在する。このとき，$\|\varphi_j\| = 1$ より，

$$\begin{aligned} \|T\varphi_j - T\varphi_k\| &= \|\mu_0\varphi_j - \mu_0\varphi_k\| \\ &= |\mu_0|\,\|\varphi_j - \varphi_k\| \\ &= \sqrt{2}\,|\mu_0| > 0. \end{aligned}$$

これは，T の完全連続性に矛盾。
(iv) 背理法で示す。

$$T\varphi_j = \mu_j\varphi_j, \quad \mu_j \longrightarrow \mu_0 \neq 0$$

と仮定する。ここで，(ii)，(iii) より，

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$$

としてよい。このとき，$\|\varphi_j\| = 1$ より，

$$\begin{aligned} \|T\varphi_j - T\varphi_k\|^2 &= \|\mu_j\varphi_j - \mu_k\varphi_k\|^2 \\ &= |\mu_j|^2 + |\mu_k|^2 \\ &\longrightarrow 2|\mu_0|^2 > 0 \quad (j, k \to \infty). \end{aligned}$$

これは，T の完全連続性に矛盾。 □

さて，T の各固有値 μ_p の固有空間において正規直交基底 $\{\varphi_{j_p}\}$ をとる。次に，固有値の列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}(\mu_j \neq 0)$ を絶対値の大きい順に並べる：

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots \geq |\mu_j| \geq \ldots \longrightarrow 0.$$

ただし，各 μ_j は対応する固有空間の次元だけ重複して並べて，各 μ_j に対応する固有空間の正規直交基底 φ_j を対応させる：

$$T\varphi_j = \mu_j \varphi_j.$$

ここで，相異なる固有値に対応する固有解は直交することに注意する。

$$T \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \mu_2 & & \text{\Huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_j & \\ & \text{\Huge 0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

定理 4.7 (Hilbert–Schmidt の展開定理) 任意の $f \in X$ に対して，

$$Tf = \sum_{j=1}^{\infty} (Tf, \varphi_j)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

特に，$N(T) = \{0\}$ ならば，

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

即ち，正規直交基底 $\{\varphi_j\}$ は完全である。

ここで，この定理の証明のために次の補題をあげる。

補題 4.2 (Hilbert) T を 0 でない完全連続な自己共役作用素であるとすると，T は 0 でない固有値をもつ [1]

証明. まず，

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} |(Tf, f)|$$

を示す。

$$N_T = \sup_{\|f\|=1} |(Tf, f)|$$

とおくと，Schwarz の不等式より，

$$N_T \leq \|T\|$$

となるので，以下では $\|T\| \leq N_T$ を示す。

任意の $\lambda \in \mathbf{R}$，任意の $f, g \in X$ に対して，

$$\begin{aligned} (T(\lambda f + g), \lambda f + g) &\leq N_T \|\lambda f + g\|^2, \\ -(T(\lambda f - g), \lambda f - g) &\leq N_T \|\lambda f - g\|^2. \end{aligned}$$

辺々加えると，中線定理より，

$$2\lambda \{(Tf, g) + (Tg, f)\} \leq 2N_T \left(\lambda^2 \|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

そこで，$g = Tf$ とおくと，$T = T^*$ だから，

$$4\lambda \|Tf\|^2 \leq 2N_T \left(\lambda^2 \|f\|^2 + \|Tf\|^2\right).$$

[1] 0 以外に固有値をもたなければ，作用素として 0 である。

$\lambda > 0$ とすれば，

$$\|Tf\|^2 \leq \frac{1}{2} N_T \left(\lambda \|f\|^2 + \frac{1}{\lambda} \|Tf\|^2 \right).$$

よって，

$$\lambda = \frac{\|Tf\|}{\|f\|}, \quad f \neq 0$$

ととれば，

$$\|Tf\|^2 \leq N_T \|Tf\| \, \|f\|, \quad f \neq 0.$$

よって，

$$\|Tf\| \leq N_T \|f\|$$

だから，

$$\|T\| \leq N_T.$$

さて，$T \neq 0$ だから，

$$\mu = \sup_{\|f\|=1} |(Tf, f)| = \|T\| > 0.$$

このとき，

(a) $\|f_j\| = 1, \quad (Tf_j, f_j) \to \mu \quad (j \to \infty)$

または，

(b) $\|f_j\| = 1, \quad (Tf_j, f_j) \to -\mu \quad (j \to \infty)$

となる $\{f_j\}$ を選ぶことができる。

(a) のとき，

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tf_j - \mu f_j\|^2 \quad &= \quad \|Tf\|^2 - 2\mu(Tf_j, f_j) + \mu^2 \\ &\leq \quad \|T\|^2 - 2\mu(Tf_j, f_j) + \mu^2 \\ &= \quad 2\mu^2 - 2\mu(Tf_j, f_j) \\ &\longrightarrow \quad 0 \quad (j \to \infty). \end{aligned}$$

よって，

$$Tf_j - \mu f_j \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty).$$

一方，T は完全連続だから $\{Tf_j\}$ は収束列としてよい。よって，

$$\mu f_j = Tf_j - (Tf_j - \mu f_j)$$

は収束列だから，$\mu > 0$ より $\{f_j\}$ 自身が収束列である。$f_j \to f_0$ とすると，T の連続性と $\|f_j\| = 1$ に注意して，

$$Tf_j \longrightarrow Tf_0, \quad \|f_0\| = 1.$$

以上より，

$$Tf_j - \mu f_j \longrightarrow Tf_0 - \mu f_0 = 0,$$

即ち，

$$Tf_0 = \mu f_0, \quad \|f_0\| = 1$$

だから，$\mu = \|T\|$ は T の固有値である。

(b) の場合は，同様にして $-\mu = -\|T\|$ が T の固有値となる。 □

定理 4.7 の証明. まず，

$$Sf = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_j (f, \varphi_i)\varphi_i, \quad f \in X$$

とおくと，S は完全連続な自己共役作用素であることを示す。

$\{\varphi_j\}$ は正規直交基底だから，

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 |(f, \varphi_i)|^2 \\ &\leq \left(\sup_i |\mu_i|\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2 \\ &\leq \left(\sup_i |\mu_i|\right)^2 \|f\|^2 \quad (\text{Bessel の不等式}). \end{aligned}$$

よって，S は有界作用素である。ところで，任意の $N \in \mathbf{N}$ に対して，

$$S_N f = \sum_{i=1}^{N} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i, \quad f \in \mathcal{H}$$

は Hilbert 空間の弱コンパクト性から完全連続である。さらに，

$$\begin{aligned} \|S_N f - Sf\|^2 &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu_i^2 |(f, \varphi_i)|^2 \\ &\leq \left(\sup_{i \geq N+1} |\mu_i|\right)^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |(f \varphi_i)|^2 \\ &\leq \left(\sup_{i \geq N+1} |\mu_i|\right)^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

だから，

$$\|S_N - S\| \leq \sup_{i \geq N+1} |\mu_i|.$$

したがって，$\mu_i \to 0$ だから，

$$S_N \longrightarrow S.$$

以上より，S は完全連続である。

次に，$R = T - S$ は完全連続な自己共役作用素で，0 以外の固有値をもたないことを示す。これには，背理法で示す。

$$R\psi = \mu\psi, \quad \mu \neq 0$$

とする。ところで，

$$R\varphi_j = T\varphi_j - S\varphi_j = \mu_j \varphi_j - \mu_j \varphi_j = 0.$$

即ち，

$$R\varphi_j = 0 \cdot \varphi_j \quad j = 1, 2, \ldots$$

だから，$\{\varphi_j\}$ は R の固有値 0 に対する固有解である。よって，

$$(\psi, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

だから，

$$T\psi = S\psi + R\psi = R\psi = \mu\psi.$$

したがって，μ は T の固有値 $\{\mu_j\}$ のどれかと一致する。そこで，$\mu = \mu_i$ とすると，

$$(\psi, \varphi_j) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots$$

より，

$$\psi = 0.$$

これは矛盾。

以上より，R は 0 以外の固有値をもたない。ここで，補題 4.2 より $R = 0$，即ち，

$$Tf = Sf = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i, \quad f \in X.$$

さらに，$N(T) = \{0\}$ ならば，

$$\begin{aligned} T\left(f - \sum_{i=1}^{\infty}(f, \varphi_i)\varphi_i\right) &= Tf - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}(f, \varphi_i)\varphi_i. \quad \square$$

注意 4.1 $T = T^*$ だから，

$$X = N(T) \oplus \overline{R(T)}.$$

したがって，定理 4.7 の主張するところは，

> 固有値 0 に対応する固有空間 $N(T)$ と 0 以外の固有値 $\{\mu_j\}$ に対応する固有解 $\{\varphi_j\}$ を合わせれば *Hilbert* 空間 X 全体を張る。

さて，方程式

$$(\sharp) \qquad (I - \lambda T)u = f \quad \text{in } X.$$

に戻る。この方程式の解に関しては，次の定理がある：

定理 4.8 T を完全連続な自己共役作用素，$\{\mu_i\}$ を T の 0 でない固有値の全体，$\{\varphi_i\}$ を T の対応する固有解の全体とし，

$$T\varphi_i = \mu_i \varphi_i$$

とする。

(i) もし，$\lambda \notin \left\{\dfrac{1}{\mu_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ ならば，方程式 ($\sharp$) は一意な解

$$u = f + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{1 - \lambda\mu_i}(f, \varphi_i)\varphi_i$$

をもつ。さらに，$N(T) = \{0\}$ ならば，

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda\mu_i}(f, \varphi_i)\varphi_i.$$

(ii) もし，$\lambda = \dfrac{1}{\mu_k}$ ならば，方程式 ($\sharp$) が少なくとも 1 つの解をもつための必要十分条件は，f が固有値 μ_k に対応する T の任意の固有解と直交することである。

4.6　固有関数の完全性

まず，Hilbert–Schmidt の理論を用いて三角関数の完全性を示す。

例 4.1 Hilbert 空間 $L^2(0,1)$ において，正規直交系

$$\left\{\sqrt{2}\sin n\pi t\right\}_{n=1}^{\infty}$$

は完全である。

証明.
Step 1. まず，次の Dirichlet 固有値問題を考える：

$$(*_1)\qquad \begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)=0 & 0<t<1, \\ x(0)=x(1)=0. \end{cases}$$

上の問題を積分方程式に変換すると，

$$(*_2)\qquad x(s)=\lambda\int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt, \quad 0\le s\le 1.$$

ただし，

$$K(s,t)=\begin{cases} s(1-t) & 0\le s\le t\le 1, \\ t(1-s) & 0\le t\le s\le 1 \end{cases}$$

とする。
Step 2. 積分方程式 $(*_2)$ を Hilbert 空間 $X=L^2(0,1)$ で考える。
そこで，

$$Tx(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt, \quad x\in L^2(0,1)$$

と定義すると，T は X における完全連続な自己共役作用素である。
Step 3. 作用素 T の固有値，固有関数を求める。
$(*_2)$ より，

$$\begin{aligned}
x(s) &= \lambda\int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt \\
&= \lambda\int_0^s t(1-s)x(t)\,dt+\lambda\int_s^1(1-t)x(t)\,dt \\
&= \lambda(1-s)\int_0^s tx(t)\,dt+\lambda s\int_s^1(1-t)x(t)\,dt \\
&= \lambda(1-s)\int_0^s tx(t)\,dt+\lambda s\int_0^1(1-t)x(t)\,dt-\lambda s\int_0^s(1-t)x(t)\,dt \\
&= \lambda\int_0^s(t-s)x(t)\,dt+\lambda s\int_0^1(1-t)x(t)\,dt.
\end{aligned}$$

したがって，

$$(*_3)\qquad x(s)=\lambda\int_0^s tx(t)\,dt-\lambda s\int_0^s x(t)\,dt+\lambda s\int_0^1(1-t)x(t)\,dt.$$

よって，右辺は $x\in L^2(0,1)\subset L^1(0,1)$ より，x は $[0,1]$ で絶対連続。よって，再び $(*_3)$ より，$x\in C^1[0,1]$.
この議論を繰り返すと，

$$x\in C^\infty[0,1].$$

以上より，積分方程式 $(*_2)$ を Hilbert 空間 $L^2(0,1)$ で考えても，解 $x(t)$ は通常の解（古典解）として求まる（解の正則性定理)。
一方，$(*_1)$ の固有値，固有関数は，

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

ところで，

$$(*_1) \quad \begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0 & 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff (*_2) \quad x(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt, \quad 0 \le s \le 1$$
$$\iff x = \lambda T x \quad \text{in } L^2(0,1).$$

Step 4. 0 は T の固有値ではない。
$Tx = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt \\ &= \int_0^s t(1-s)x(t)\,dt + \int_s^1 s(1-t)x(t)\,dt \\ &= (1-s)\int_0^s tx(t)\,dt + s\int_s^1 (1-t)x(t)\,dt. \end{aligned}$$

両辺 s で微分すると，

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^s tx(t)\,dt + (1-s)sx(s) + \int_s^1 (1-t)x(t)\,dt - s(1-s)x(s) \\ &= -\int_0^s tx(t)\,dt + \int_s^1 (1-t)x(t)\,dt. \end{aligned}$$

さらに，両辺 s で微分すると，

$$0 = -sx(x) - (1-s)x(s) = -x(s).$$

したがって，

$$Tx = 0 \Longrightarrow x = 0$$

となり，定理 4.7 から $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi t\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(0,1)$ で完全である。 □

同様にして，

例 4.2 Hilbert 空間 $L^2(-1,1)$ において，正規直交系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\pi t, \sin\pi t, \ldots, \cos n\pi t, \sin n\pi t, \ldots\right\}$$

は完全である。

証明には，次の境界値問題を考えればよい：

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0 & -1 < t < 1, \\ x(-1) = x(1), \quad x'(-1) = x'(1). \end{cases}$$

注意 4.2 境界値問題の解の関数解析的な性質を調べるのに，同等な積分方程式を考えて，これに Hilbert 空間の理論を適用して（例えば，固有値，固有関数の完全性など），種々の性質を導く論法は有効であり，しばしば使われる。

次に，2 次元円板に対して変数分離により固有値，固有関数を求めてみる。

例 4.3 2 次元の円板 $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$ に対して，Laplace 方程式

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を考える。2 次元 Laplace 作用素の極座標表示は

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

となるので，Laplace 作用素の固有値問題 $\Delta u = -\lambda u$ は，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\lambda u \tag{4.12}$$

となる。さらに，ここでは Dirichlet 境界条件

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

で考える。

さて，解 $u(r, \theta)$ を

$$u(r, \theta) = U(r)V(\theta) \tag{4.13}$$

と変数分離した形の解で求める。(4.13) を (4.12) へ代入して整理すると，

$$\frac{r^2 U''(r) + rU'(r) + r^2\lambda U(r)}{U(r)} = -\frac{V''(\theta)}{V(\theta)} = \mu$$

となる。μ は r にも θ にも依存しないので定数である。これより，2 つの境界値問題

$$\begin{cases} V''(\theta) = -\mu V(\theta), \\ V(0) = V(2\pi) \end{cases} \tag{4.14}$$

および，

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U(r) = 0 \tag{4.15}$$

$$U(a) = 0 \tag{4.16}$$

が得られる。(4.14) の固有値と固有関数は，

$$\begin{aligned} &\mu = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ &V(\theta) = \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

となる。これらの μ の値に対して後の方の境界値問題 (4.15)–(4.16) を解く。(4.15) において，$\sqrt{\lambda}r = s$ と変数変換すると，

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + \left(1 - \frac{\mu}{s^2}\right)J(s) = 0 \tag{4.17}$$

となる。ただし，$U(r) = J(\sqrt{\lambda}r)$. これを Bessel の微分方程式という。$\mu = n^2$ に対して (4.17) の 1 次独立な 2 つの解のうち原点で滑らかなものは，

$$J_n(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{s}{2}\right)^{2k} \tag{4.18}$$

という級数で表される。即ち，n 次の Bessel 関数となる。$J_n(s)$ は正の実軸上に無限大に発散する零点の無限列をもつので，これを各 n に対して，

$$\nu_{n,m}, \quad m=1,2,\ldots$$

とおく。このとき，$U(r)$ に対する境界条件 $U(a)=0$ は，$J_n(\sqrt{\lambda}a)=0$ となり，

$$\lambda=\nu_{n,m}^2/a^2, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad m=1,2,\ldots$$

と同値である。つまり，固有値 λ は種々の次数の Bessel 関数の零点を小さいほうから順に並べたものである。対応する固有関数は，

$$\begin{cases} J_n(\nu_{n,m}r/a)\cos n\theta, & n=0,1,2,\ldots, \quad m=1,2,\ldots \\ J_n(\nu_{n,m}r/a)\sin n\theta, & n=1,2,\ldots, \quad m=1,2,\ldots \end{cases} \tag{4.19}$$

である。

4.7 Riesz–Schauder の理論

Riesz–Schauder の理論は，一般の Banach 空間で成り立つが，ここでは Hilbert 空間に限定して話を進める。

まず，閉作用素を定義する。

定義 4.3 X，Y を Hilbert 空間とし，T を X から Y への線形作用素とする。また，T の定義域を $D(T)$ とする。T が**閉作用素**であるとは，T のグラフ

$$G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in D(T)\}$$

が積空間 $X\times Y$ で閉部分空間であるときをいう。言い換えると，任意の $x_n\in D(T)$ に対して，

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow x \quad \text{in } X, \\ Tx_n &\longrightarrow y \quad \text{in } Y \end{aligned}$$

を満たすならば，

$$x\in D(T), \quad Tx=y$$

となることである。特に，有界作用素は閉作用素である。

次に，Fredholm 作用素を定義する。

定義 4.4 X，Y を Hilbert 空間とし，T を X から Y への閉作用素とする。次の 3 条件を満たすとき，T を **Fredholm 作用素** という：

(i) $\dim N(T)<\infty$.
(ii) $R(T)$ は Y の閉部分空間。
(iii) $\operatorname{codim} R(T)<\infty$.

ここで，

$$\begin{aligned} N(T)&=\{x\in D(T)\mid Tx=0\}, \\ R(T)&=\{Tx\mid x\in D(T)\}. \end{aligned}$$

また，Fredholm 作用素 T に対して，

$$\operatorname{ind} T=\dim N(T)-\operatorname{codim} R(T)$$

を T の**指数** *(index)* という。

定理 4.9 (Riesz–Schauder) X を Hilbert 空間とし，T が X から X への完全連続作用素であるとする。このとき，

$$\mathrm{ind}(I-T)=0.$$

この定理を証明するために, 以下の準備をする：

補題 4.3

$$R(I-T)=X \Longrightarrow N(I-T)=\{0\}.$$

補題 4.3 の証明. $S=I-T$ とおき，

$$M_n=\{f\in X \mid S^n f=0\},\quad n=0,1,2,\ldots$$

と定義する。ただし，$S^0=I$ である。明らかに，

$$M_0=\{0\}\subset M_1\subset M_2\subset\ldots\subset M_n\subset M_{n+1}\subset\ldots.$$

このとき，

主張 4.2

$$M_n=M_{n+1}$$

となるような $n\in\mathbf{N}$ が存在する。

証明. 背理法により示す。

$$M_n\neq M_{n+1},\quad \forall n\in\mathbf{N}$$

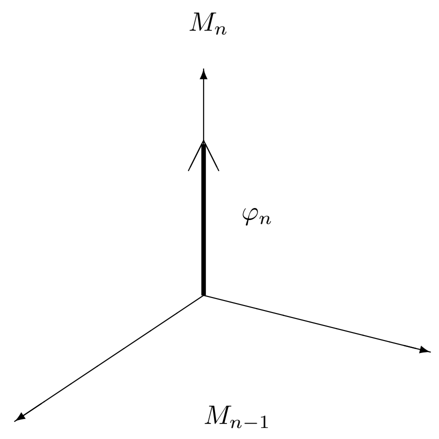
と仮定する。ところで，$S=I-T$ は連続だから，

$$f_j\longrightarrow f\Longrightarrow S^n f_j\longrightarrow S^n f=0.$$

よって，M_n は X の閉部分空間となる。したがって，定理 4.2 より，$X=M_n\oplus M_{n-1}$ となり，

$$\begin{cases}\varphi_n\perp M_{n-1},\\ \|\varphi_n\|=1.\end{cases}$$

となるような $\varphi_n\in M_n$ が存在する。



このとき，$n > m$ とすると，

$$\begin{aligned} T\varphi_n - T\varphi_m &= (I-S)\varphi_n - (I-S)\varphi_m \\ &= \varphi_n - (S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m). \end{aligned}$$

ところで，

$$\begin{aligned} S^{n-1}(S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m) &= S^n\varphi_n + S^{n-1}\varphi_m - S^n\varphi_m \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから，

$$S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m \in M_{n-1}.$$

よって，

$$\|T\varphi_n - T\varphi_m\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + \|S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m\|^2 \geq 1.$$

これは，$\{T\varphi_n\}$ のいかなる部分列も収束しないことを意味している。

以上より，

$$\begin{cases} \|\varphi_n\| = 1, \\ \|T\varphi_n - T\varphi_m\| \geq 1, \quad n > m \end{cases}$$

となり，T の完全連続性に矛盾する。 □

さらに，

主張 4.3

$$M_{n+1} = M_{n+2} = M_{n+3} = \ldots.$$

証明. 実際，

$$M_{n+1} \subsetneqq M_{n+2}$$

ならば，

$$\begin{cases} S^{n+1}f \neq 0, \\ S^{n+2}f = 0, \end{cases}$$

となるような $f \in X$ が存在する。これは，

$$Sf \in M_{n+1}, \quad Sf \notin M_n$$

を意味していて，主張 1 に反する。 □

さて，$N(S) = \{0\}$ でないと仮定すると，

$$u_1 \neq 0, \quad Su_1 = 0.$$

となるような $u_1 \in X$ が存在する。このとき，$R(S) = X$ だから，

$$u_1 = Su_2.$$

となるような $u_2 \in X$ が存在する。以下，この操作を続けると，

$$u_n = Su_{n+1}.$$

となるような $u_n \in X$ が存在する。これより，

$$\begin{aligned} &u_1 \notin M_0, \quad u_1 \in M_1. \\ &u_2 \notin M_1, \quad u_2 \in M_2. \\ &\quad\vdots \\ &u_n \notin M_{n-1}, \quad u_n \in M_n. \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

これは，主張 2 に反する。

以上より，

$$R(S) = X \Longrightarrow N(S) = \{0\}.$$

これで，補題 4.3 が証明できた。 □

補題 4.4

$$N(I-T) = \{0\} \Longrightarrow R(I-T) = X.$$

補題 4.4 の証明. 次の 2 つの主張により補題 4.4 を証明する。補題 4.3 の証明と同様に，$S = I - T$ とおく。

まず，

主張 4.4 $R(S)$ は閉部分空間である。

証明.

$$Su_n \longrightarrow f \quad \text{in } X \tag{4.20}$$

とすると，$\{u_n\}$ は X の有界列である。実際，$\{u_n\}$ が有界列でなければ，

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

とおき，(4.20) に注意すると，

$$\begin{cases} \|v_n\| = 1, \\ Sv_n = \frac{Su_n}{\|u_n\|} \longrightarrow 0. \end{cases}$$

ところで，T は完全連続だから，$\{Tv_{n_k}\}$ が Cauchy 列となるような部分列 $\{v_{n_k}\}$ が存在する。よって，

$$v_{n_k} = Sv_{n_k} + Tv_{n_k}$$

も Cauchy 列となる。

$$v_{n_k} \longrightarrow v \quad \text{in } X$$

とすると，

$$\|v\| = \lim_{n_k} \|v_{n_k}\| = 1.$$

一方，

$$Sv = \lim_{n_k} Sv_{n_k} = 0$$

だから，$N(S) = \{0\}$ より，

$$v = 0$$

となり，これは矛盾。

したがって，$\{u_n\}$ は有界列だから，$\{Tu_{n_k}\}$ が Cauchy 列となるような $\{u_{n_k}\}$ が存在する。よって，

$$u_{n_k} = Su_{n_k} + Tu_{n_k}$$

も Cauchy 列となる。そこで，

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{in } X$$

とすると，

$$Su = \lim_{n_k} Su_{n_k} = f.$$

即ち，

$$f \in R(S). \quad \square$$

次に，

主張 4.5 $\overline{R(S)} = X$.

証明.

$$\begin{aligned} N(S) = \{0\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{R(S^*)} = X \quad (X = N(S) \oplus \overline{R(S^*)}) \\ &\Longrightarrow \quad R(S^*) = X \quad (T^* \text{は完全連続だから,主張 3 より}) \\ &\Longrightarrow \quad N(S^*) = \{0\} \quad (T^* \text{は完全連続だから,補題 4.3 より}) \\ &\Longrightarrow \quad \overline{R(S)} = X \quad (X = N(S^*) \oplus \overline{R(S)}). \end{aligned}$$

したがって，

$$N(S) = \{0\} \Longrightarrow \overline{R(S)} = X. \quad \square$$

以上，主張 3，主張 4 より，

$$N(S) = \{0\} \Longrightarrow R(S) = X.$$

これで，補題 4.4 が証明できた。 $\square$

定義 4.5 X から Y への線形作用素 T の定義域 $D(T)$ が X で稠密であるとする。このとき，

$$g(Tx) = f(x), \quad x \in D(T) \tag{4.21}$$

となる $f \in X^*$ が存在するような $g \in Y^*$ の全体を定義域 $D(T^*)$ とし，

$$T^* g = f$$

と Y^* から X^* への線形作用素 T^* を定める。この作用素 T^* を T の**共役作用素** *(conjugate operator)* という。

ここで，g に対して，(4.21) をみたす f は一意に定まることを示す。

$D(T)$ は X で稠密だから，任意の $x \in X$ に対して，$x_n \to x$ となるような $x_n \in D(T)$ が存在する。f，f' の連続性より，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(x).$$

x は X の任意の点だから，$f = f'$ となり一意に定まることが示せた。

注意 4.3 定義域 $D(T)$ が稠密ならば，上の定義より T の共役作用素

$$T^* : Y \longrightarrow X$$

が存在して，

$$Y = R(T) \oplus N(T^*).$$

よって，

$$\text{codim } R(T) = \dim N(T^*)$$

だから，

$$\text{ind } T = \dim N(T) - \dim N(T^*).$$

さらに，$T^{**} = T$ より，

$$\begin{aligned} \text{ind } T^* &= \dim N(T^*) - \dim N(T) \\ &= -\text{ind } T. \end{aligned}$$

以上の準備の下で，Riesz–Schauder の定理を証明する。

定理 4.9 の証明.

Step 1. $\dim N(I-T) < \infty$ を背理法により示す。

$\dim N(I-T) = \infty$ とすると，$N(I-T)$ の基底として無限個の基底が得られる。これらに Gram–Schmidt の直交化法を行うと，

$$(x_n, x_m) = \delta_{nm}$$

となるような $\{x_n\} \subset N(I-T)$ が存在する。よって，

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - x_m\| \geq \sqrt{2}.$$

これは，T の完全連続性に矛盾する。

Step 2. $R(I-T)$ は閉部分空間であることを示す。

$S = I - T$ とおいて，

$$S_1 = S|_{N(S)^\perp}$$

を考える。このとき，$x \in N(S)^\perp$，$S_1 x = 0$ とすると，

$$Sx = 0, \quad x \in N(S).$$

よって，

$$x \in N(S) \cap N(S)^\perp = \{0\}$$

となり，

$$N(S_1) = \{0\}, \tag{4.22}$$

さらに，

$$D(S) = N(S) \oplus (N(S)^\perp \cap D(S))$$

だから，

$$R(S) = S(D(S)) = S(N(S)^\perp \cap D(S)) = R(S_1). \tag{4.23}$$

したがって，(4.22)，(4.23)，主張 3 より，

$$R(S_1) = R(S) = R(I-T)$$

は閉部分空間である。

Step 3. 注意 4.3 より，

$$\dim N(I-T^*) = \dim N(I-T)$$

を示せばよい。$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ を $N(I-T)$ の正規直交基底，$\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ を $N(I-T^*)$ の正規直交基底とする。

(a) $m > n$ ならば，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S} &= I - \left(T - \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \varphi_i)\psi_i \right) \\
&= S + \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \varphi_i)\psi_i
\end{aligned}
$$

とおく。ここで，

$$
T - \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \varphi_i)\psi_i
$$

は完全連続であることに注意する。

さて，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S} f = 0 \quad &\Longrightarrow \quad Sf + \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\psi_i = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} Sf = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\psi_i = 0 \end{cases} \qquad (Sf \perp \psi_i \text{より}) \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} Sf = 0 \\ (f, \varphi_i) = 0, \quad 1 \le i \le n \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} f \in N(S) \\ (f, \varphi_i) = 0, \quad 1 \le i \le n \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad f = 0.
\end{aligned}
$$

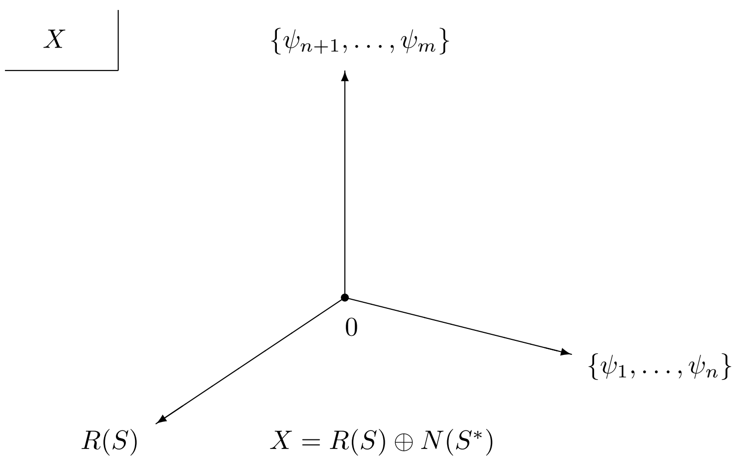
したがって，補題 4.4 が適用できて，

$$
R(\widetilde{S}) = X.
$$

これは，

$$
\{\psi_{n+1}, \ldots, \psi_m\} \perp R(\widetilde{S})
$$

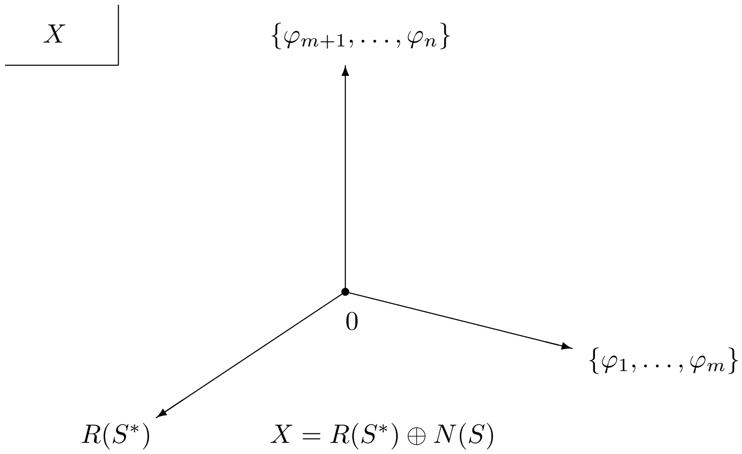
に矛盾する。



(b) $m < n$ ならば，

$$
\widetilde{U} = I - \left(T^* - \sum_{j=1}^{m} (\cdot, \psi_j)\varphi_j \right)
$$

を考えれば，同様にして、矛盾が導かれる。



以上，(a)，(b) より，

$$m = n.$$

これで，定理 4.9 が証明できた。 □

この定理より，次の定理が導かれる。この定理は，後に楕円型境界値問題の解の存在を示すのに非常に重要である。

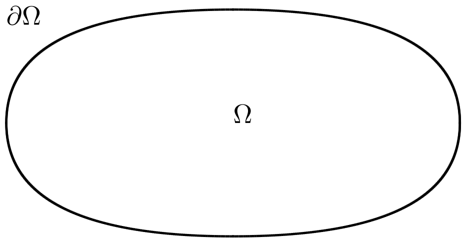
定理 4.10 (Fredholm の交代定理) X を Hilbert 空間とし，T を X から X への完全連続作用素とする。このとき，$I - T$ が単射または全射ならば，$I - T$ は全単射である。

第 II 部
Laplace 作用素に対する楕円型境界値問題

5　変分法

5.1　Dirichlet の原理

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域（連結開集合）で，境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする。



このとき，次の Dirichlet 問題を考える：

$$(D_1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dirichlet の原理では，(D_1) の解 u は $\partial\Omega$ で g に等しく，エネルギー積分

$$D(v,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx$$

を最小にする v から得られると主張している。即ち，

$$D(u,u) = \inf_{v|_{\partial\Omega}=g} D(v,v).$$

5.2　Dirichlet 境界値問題の定式化

$\gamma_0(f) = g$ となる $f \in H^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。このとき，問題 (D_1) は次のように定式化される：

問題 1. $f \in H^1(\Omega)$ に対して，

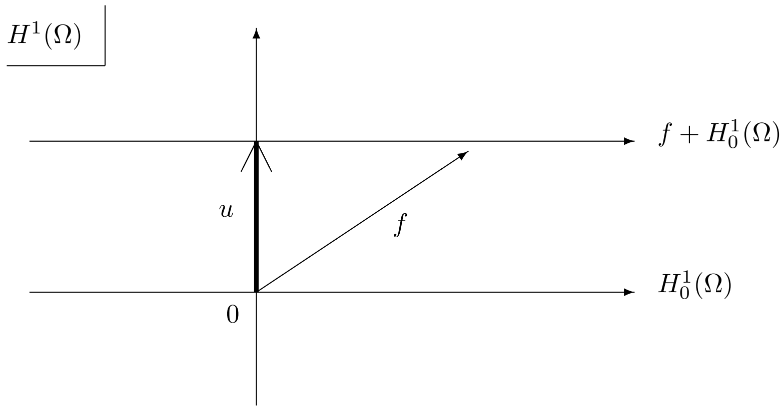
$$(D_2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u \in f + H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

となるような $u \in H^1(\Omega)$ を見つけよ。

主なアイデアは，

$$D(u,u) = \inf_{v \in f + H_0^1(\Omega)} D(v,v)$$

となるような解 u をみつけることである。



5.3 Dirichlet 問題 (D_2) の解法

命題 5.1 $u \in H^1(\Omega)$ に対して，次の 2 条件は同値である。

(i) $\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$
(ii) $D(u, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$

証明. 部分積分を使うと，

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x) \overline{\Delta \varphi(x)}\, dx = -D(u, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

したがって，極限移行すると，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \Longleftrightarrow D(u, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad \square$$

次の命題は，先ほどの証明のアイデアが正しいことを認めている：

命題 5.2 $u \in f + H_0^1(\Omega)$ に対して，次の 2 条件は同値である。

(i) $\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$
(ii) $D(u, u) \leq D(v, v), \quad \forall v \in f + H_0^1(\Omega).$

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 仮定 $u \in f + H_0^1(\Omega)$ より，

$$v = u + \varphi, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

だから，命題 5.1 より，

$$\begin{aligned} D(v, v) &= D(u + \varphi, u + \varphi) \\ &= D(u, u) + D(u, \varphi) + D(\varphi, u) + D(\varphi, \varphi) \\ &= D(u, u) + D(\varphi, \varphi) \\ &\geq D(u, u). \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 特に，

$$v = u + t\varphi, \quad \forall t \in \mathbf{C}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

とすると，

$$\begin{aligned} D(u,u) &\le D(v,v) \\ &= D(u+t\varphi, u+t\varphi) \\ &= D(u,u) + (tD(\varphi,u) + \bar{t}D(u,\varphi)) + |t|^2 D(\varphi,\varphi). \end{aligned}$$

そこで，

$$t = ae^{-i\theta}, \quad \theta = \arg D(\varphi,u), \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

とおくと，

$$D(\varphi,\varphi)a^2 + 2|D(\varphi,u)|a \ge 0, \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

となることがわかる。これは，

$$D(\varphi,u) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

を示している。よって，命題 5.1 より，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad \square$$

定理 5.1 Dirichlet 問題 (D_2) は，与えられた任意の $f \in H^1(\Omega)$ に対して，解 $u \in H^1(\Omega)$ をもつ。

証明.

$$d = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} D(f+\varphi, f+\varphi)$$

とする。このとき，

$$D(f+\varphi_j, f+\varphi_j) \downarrow d \quad (f \to \infty)$$

となるような $H_0^1(\Omega)$ の列 $\{\varphi_j\}$ をみつけることができる。

ところで，次の式に注意する。

$$\begin{aligned} & D(a+b, a+b) + D(a-b, a-b) \\ = \; & D(a,a) + D(a,b) + D(b,a) + D(b,b) \\ & + D(a,a) - D(a,b) - D(b,a) + D(b,b) \\ = \; & 2(D(a,a) + D(b,b)), \quad a, b \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

よって，この式を

$$a = f + \varphi_j, \quad b = f + \varphi_k$$

として適用すると，$(\varphi_j + \varphi_k)/2 \in H_0^1(\Omega)$ だから，

$$\begin{aligned} & 2(D(f+\varphi_j, f+\varphi_j) + D(f+\varphi_k, f+\varphi_k)) \\ = \; & D(2f+\varphi_j+\varphi_k, 2f+\varphi_j+\varphi_k) + (\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) \\ \ge \; & 4d + D(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k). \end{aligned}$$

したがって，$j, k \to \infty$ とすると，

$$D(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) \longrightarrow 0.$$

言い換えると，$\{\varphi_j\}$ はセミノルム $D(\cdot,\cdot)^{1/2}$ に関して Cauchy 列である。Poincaré の補題（補題 3.2）より，セミノルム $D(w,w)^{1/2}$ と $H^1(\Omega)$ のノルム $\|w\|_{1,\Omega}$ が同等であるから，$\{\varphi_j\}$ は $H_0^1(\Omega)$ で Cauchy 列であることがわかる。したがって，

$$\varphi_j \longrightarrow \psi \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

となるような $\psi \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。今，

$$u = f + \psi \in f + H_0^1(\Omega)$$

とする。このとき，

$$\begin{aligned} D(u,u) &= \lim_{j\to\infty} D(f+\varphi_j, f+\varphi_j) \\ &= d \\ &= \inf_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} D(f+\varphi, f+\varphi). \end{aligned}$$

これは，

$$D(u,u) \le D(v,v), \quad \forall v \in f + H_0^1(\Omega)$$

を示している。よって，命題 5.2 より，この u が Dirichlet 問題 (D_2) の求める解である。 □

6 変分法の直接法

ここでは，前節とは別の方法で解の存在・一意性を示していく。前節の方法は Laplace 作用素の場合には有効であるが，一般の楕円型作用素の場合には対応できない。しかし，この変分法の直接法は一般の場合にも対応できる。

6.1 Dirichlet 問題の定式化

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域で，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする。このとき，次の Dirichlet 問題を考える：

$$(D_1) \qquad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで，

$$F = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

となる $\overline{\Omega}$ 上で定義された関数 F が存在すると仮定する。もし，$u = w - F$ とすると，

$$\begin{cases} \Delta u = -\Delta F & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

だから，

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，

$$f = \Delta F$$

とする。

しかし，以下のことに注意する。

$$\begin{aligned} & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ \Longleftrightarrow\ & (-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \\ \Longleftrightarrow\ & \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \\ \Longleftrightarrow\ & \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

よって，Dirichlet 問題 (D_1) は次のように定式化できる。

問題 2. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となる $u \in H_0^1(\Omega)$ を見つけよ。ここで，

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx, \\ (f, v) &= \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx \end{aligned}$$

である。

6.2 一意可解性定理（定理 6.1）

主な結果は次の通り：

定理 6.1 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となるような $u \in H_0^1(\Omega)$ が唯一つ存在する。

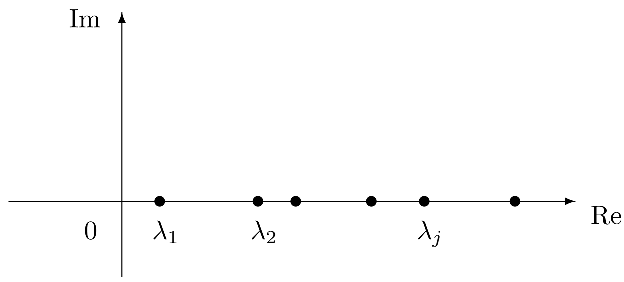
この定理の応用として，次の系がある：

系 6.1 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, u_j\}_{j=1}^{\infty}$ を持つ。さらに，関数列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $L^2(\Omega)$ の完全系となる。ただし，

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots, \quad u_1 > 0.$$



6.3 定理 6.1 の証明

証明のアイデアは次のようにして解 u をみつけることである。

$$\begin{aligned} & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ \Longleftrightarrow \quad & (-\Delta + I)u = f + u \quad \text{in } \Omega \\ \Longleftrightarrow \quad & u = (-\Delta + I)^{-1}(f + u) \quad \text{in } \Omega \\ \Longleftrightarrow \quad & (I - (-\Delta + I)^{-1})u = (-\Delta + I)^{-1} f \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

言い換えると，$L^2(\Omega)$ の作用素として $(-\Delta + I)^{-1}$ を構成して，その関数解析的な性質を調べていく。$(-\Delta + I)^{-1}$ の存在性は次に基づいている。

命題 6.1

$$D_1(u,v) = D(u,v) + (u,v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

とすると，

$$D_1(v, Af) = (v, f), \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となるような有界で可逆な作用素

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

が存在する。

注意 6.1

$$\begin{aligned} D_1(u,v) &= D(u,v)+(u,v) \\ &= (f,v)+(u,v) \\ &= ((-\varDelta+I)u,v) \\ &= (u,(-\varDelta+I)v) \end{aligned}$$

だから，

$$(-\varDelta+I)Af=f, \quad \forall f\in L^2(\Omega)$$

となり，形式的に

$$A=(-\varDelta+I)^{-1}$$

である。

命題 6.1 の証明. $f\in L^2(\Omega)$ ならば，

$$\Phi f(v)=(v,f), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

とする。そのとき，Schwarz の不等式から，

$$\begin{aligned} |\Phi f(v)|=|(v,f)| &\le \|v\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|v\|_{1,\Omega}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

これより，

$$\Phi f\in (H_0^1(\Omega))^*$$

であり，$f\to 0$ とすると $\Phi f\to 0$ だから，

$$\Phi : L^2(\Omega)\longrightarrow (H_0^1(\Omega))^*$$

が有界（連続）であることを示している。

さらに，Φ は単射である。実際，

$$\Phi f=0, \quad f\in L^2(\Omega)$$

とすると，

$$(v,f)=0, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

だから，

$$\int_\Omega v(x)\overline{f(x)}\,dx=0, \quad \forall v\in C_0^1(\Omega).$$

よって，Du Bois Raymond の補題（補題 2.1）を適用すると，

$$f=0 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

これで，Φ の単射性が示せた。

次に，以下のことに注意する。

$$\begin{aligned} &D_1(u,u)=D(u,u)+\|u\|_{L^2(\Omega)}^2=\|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall u\in H_0^1(\Omega), \\ &|D_1(u,v)|\le C\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

そうして，

$$X=H_0^1(\Omega), \quad B(\cdot,\cdot)=D_1(\cdot,\cdot)$$

として Lax–Milgram の定理（定理 4.4）を適用すると，

$$\phi(v) = D_1(v, T\phi), \quad \forall \phi \in (H_0^1(\Omega))^*, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となるような可逆な作用素

$$T : (H_0^1(\Omega))^* \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

が存在する。ここで，$A = T \circ \Phi$ とする。

以上まとめると，

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

は有界で可逆で，

$$D_1(v, Af) = \Phi f(v) = (v, f), \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

これで，命題 6.1 が証明できた。 □

ここから定理 6.1 の証明に入る。

定理 6.1 の証明.

Step 1. 線形作用素

$$G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

を

$$G : L^2(\Omega) \xrightarrow{A} H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\iota} L^2(\Omega)$$

として導入する。ここで，$\iota : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は埋めこみである。

注意 6.2

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Rellich の定理（定理 4.5）より，埋め込み ι が完全連続であるから，作用素 $G = \iota \circ A$ が $L^2(\Omega)$ で完全連続である。

次のことに注意する。

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega), \quad D(v,u) = (v,f), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \Longleftrightarrow \quad & u \in H_0^1(\Omega), \quad D_1(v,u) = (v, f+u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \Longleftrightarrow \quad & u = G(f+u) \\ \Longleftrightarrow \quad & (I-G)u = Gf. \end{aligned}$$

したがって，$L^2(\Omega)$ において作用素 $I - G$ について考える。

Step 2. まず, 次のことを得る。

主張 6.1 作用素 $I - G$ は単射である。

証明. $(I-G)u = Gf$ だから，

$$\begin{aligned} u \in L^2(\Omega), (I-G)u = 0 \quad & \Longrightarrow \quad Gf = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad f = 0 \\ & \Longrightarrow \quad D(v,u) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ & \Longrightarrow \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

しかし，Weyl の補題（補題 7.1）より，

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

さらに，

$$u = Gu \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$$

だから，

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

したがって，Green の公式を適用すると，

$$0 = (-\Delta u, u) = D(u, u) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

これは，

$$u(x) \equiv \text{constant} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を意味している。 □

Step 3. $I - G$ の全射性は，Fredholm の交代定理（定理 4.10）を

$$X = L^2(\Omega), \quad T = G$$

として適用すると，

$$I - G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は全単射である。

これで定理 6.1 が証明できた。 □

次に，系 6.1 の証明をする。

系 6.1 の証明.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は次と同値なことに注意する。

$$\begin{aligned} & (I - G)u = G(\lambda u) \quad (f = \lambda u) \\ \Longleftrightarrow \quad & u = (\lambda + 1)Gu \\ \Longleftrightarrow \quad & Gu = \frac{1}{\lambda + 1} u. \end{aligned}$$

したがって，作用素

$$G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続だから Hilbert–Schmidt の理論を適用すればよい。

これで系 6.1 が証明できた。 □

6.4 Neumann 問題の定式化

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域で，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする。このとき，次の Neumann 問題を考える：

(N)
$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，$\boldsymbol{\nu}$ を境界 $\partial\Omega$ に対する外向き法線ベクトルとする。ここで，

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

をみたす $\overline{\Omega}$ 上で定義された関数 F が存在すると仮定する。もし，$u = w - F$ とすると，

$$\begin{cases} \Delta u = -\Delta F & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

だから，

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，

$$f = \Delta F$$

とする。

しかし，以下のことに注意する。

$$\begin{aligned}
& -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\
\iff\ & (-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \\
\iff\ & \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_{\Omega} f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx, \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \\
\iff\ & \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_{\Omega} f(x)\overline{v(x)}\, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega)
\end{aligned}$$

よって，問題 (N) は次のように定式化できる：

問題 3. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

となる $u \in H^1(\Omega)$ を見つけよ。ここで，

$$\begin{aligned}
D(u, v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx, \\
(f, v) &= \int_{\Omega} f(x)\overline{v(x)}\, dx
\end{aligned}$$

である。

6.5 一意可解性定理（定理 6.2）

主な結果は次の通り：

定理 6.2 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

となるような $u \in H^1(\Omega)$ が唯一つ存在する。

発見的考察であるが，この定理 6.2 を認めると，Neumann 境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

が導かれる。

まず，$v \in C_0^\infty(\Omega)$ を任意にとる。このとき，Green の公式 (7.2) より，

$$\begin{aligned}
(f, v) &= D(u, v) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\, d\sigma(x) - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}(x)\overline{v(x)}\, dx \\
&= (-\Delta u, v).
\end{aligned}$$

よって，

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

次に，$v \in H^1(\Omega)$ を任意にとる。ここで，$C^1(\overline{\Omega})$ の関数は $H^1(\Omega)$ で稠密なので，$v \in C^1(\overline{\Omega})$ と仮定してもよい。このとき，

$$\begin{aligned}
(f, v) &= D(u, v) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\, d\sigma(x) - (\Delta u, v) \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\, d\sigma(x) + (f, v).
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\, d\sigma(x) = 0, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

となり，

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

これで，Neumann 境界条件が導かれた。

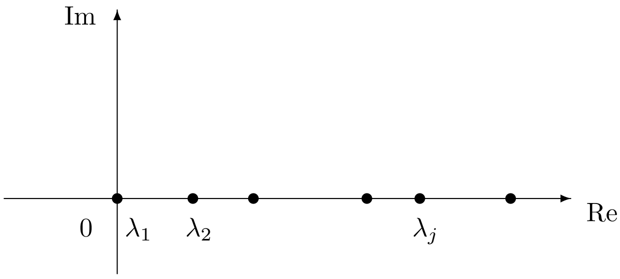
定理 6.1 と同様に，この定理 6.2 の応用として，次の系がある：

系 6.2 Neumann 問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, u_j\}_{j=1}^\infty$ を持つ。さらに、関数列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ は $L^2(\Omega)$ の完全系となる。ただし，

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \quad u_1 = 1.$$



6.6 定理 6.2 の証明

定理 6.2 の証明. 証明には，考える基礎空間を定理 6.1 での $H_0^1(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ に置き換えれば，定理 6.1 の証明とほぼ同様に議論が進む。ただし，Rellich の定理（定理 4.5）の適用の部分に関して若干補足する。

まず，次の定理をあげる：

定理 6.3 $f \in H^1(\Omega)$ のある連続な線形拡張作用素 $\Psi : F(x) = \Psi f(x) \in H^1(\mathbf{R}^n)$ が存在する。即ち，

$$\|F\|_{1,\mathbf{R}^n} \le C\|f\|_{1,\Omega} \tag{6.1}$$

となる定数 $C > 0$ が存在する。特に, Ω が有界領域の場合は，$F(x)$ は $\overline{\Omega}$ を内部に含む任意の有界な開集合 Ω_1 にその台をもつと仮定できる。即ち，$F \in H_0^1(\Omega_1)$.

この定理と Rellich の定理（定理 4.5）を組み合わせると次の定理が導かれる。

定理 6.4 Ω を有界領域とする。任意の有界列 $f_j \in H^1(\Omega)$ に対して，適当な部分列 $\{f_{j_p}(x)\}$ が存在して，$L^2(\Omega)$ の収束列になっている。即ち，埋め込み写像

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

が完全連続である。

証明. Ω は有界だから，前定理の Ω_1 をとり Ψ を定義する。即ち，

$$F_j(x) = \Psi f_j(x) \in H_0^1(\Omega_1).$$

(6.1) より，$\{F_j(x)\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。よって，Rellich の定理より，適当な部分列 $\{F_{j_p}(x)\}$ を選べば $L^2(\Omega_1)$ の Cauchy 列になる。したがって，Ω に制限すると，$\{f_{j_p}(x)\}$ は $L^2(\Omega)$ の Cauchy 列である。
□

以上により，定理 6.2 が証明できた。 □

6.7 熱方程式の初期値・境界値問題への応用

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする。このとき，次の初期値・境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = u_0 \quad (\text{初期条件}), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{境界条件}). \end{cases} \tag{H}$$

ここで，$u_0(\cdot)$ は初期温度分布，$u(t, \cdot)$ は時刻 t における温度分布を表している。

この問題を

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

と変数分離した形の解を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

だから，

$$T'(t)X(x) = T(t)\Delta X(x).$$

よって，

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}$$

となり，左辺は t のみに依存し，右辺は x のみに依存するから，両辺は t にも x にも依存しない定数で，これを $-\lambda$ とする。よって，

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\varDelta X(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

したがって，

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$(D_3) \qquad \begin{cases} \varDelta X + \lambda X = 0 & \text{in } \Omega, \\ X = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで，$\lambda > 0$ であることを示す。$X|_{\partial\Omega}$ に注意して部分積分を行うと，

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega X(x)^2\,dx &= -\int_\Omega \varDelta X(x)\cdot X(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x_i}\right)^2 dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

よって，

$$\lambda \geq 0.$$

しかし，$\lambda = 0$ とすると X は定数となり，$X|_{\partial\Omega} = 0$ だから，

$$X(x) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

となり，u が自明解となり不適。よって，$\lambda > 0$ であることが示せた。したがって，

$$u(t,x) = Ae^{-\lambda t}X(x).$$

ただし，A，$\lambda(>0)$ は任意定数である。系 6.1 より，Dirichlet 問題

$$(D_4) \qquad \begin{cases} \varDelta X_j + \lambda_j X_j = 0 & \text{in } \Omega, \\ X_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, X_j\}_{j=1}^\infty$ を持つ。このとき，

$$u_j(t,x) = A_j e^{-\lambda_j t}X_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots$$

は，

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \varDelta\right) u_j = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \\ u_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたしている。したがって，重ね合わせの原理より，

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^\infty A_j e^{-\lambda_j t} X_j(x)$$

を得る。

初期条件 $u|_{t=0} = u_0$ より，

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^\infty A_j X_j(x).$$

ここで問題となるのは，

“ 問題 (D_4) の固有関数 X_j の和として u_0 が展開できるか？”
ということであるが，実際に可能であるならば,

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x)$$

となる。

以上まとめると，問題 (H) の解 $u(x,t)$ は次のようになる：

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x).$$

6.8　熱方程式 (H) のスペクトル解析

X を Hilbert 空間とし，T を X から X への非負の自己共役作用素とする。簡単のため，次を仮定する。

(I) T の固有値は離散的であって，$+\infty$ に発散する。

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_j \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

と番号付けする。

(II) T の固有ベクトルからなる X の完全正規直交系 $\{\varphi_n\}$ が存在する：

$$T\varphi_n = \mu_n \varphi_n.$$

例 6.1 $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への作用素 $\varDelta_D$ を

$$\begin{aligned} D(\varDelta_D) &= \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \right\} \\ &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

と定義して，

$$\varDelta_D u = \varDelta u, \quad \forall u \in D(\varDelta_D)$$

とする。このとき，$-\varDelta_D$ は系 6.1 より，上の T の条件 (I)，(II) をみたす。

例 6.2 $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への作用素 $\varDelta_N$ を

$$D(\varDelta_N) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \right\}$$

と定義して，

$$\varDelta_N u = \varDelta u, \quad \forall u \in D(\varDelta_N)$$

とする。このとき，$-\varDelta_N$ は系 6.2 より，上の T の条件 (I)，(II) をみたす。

さて，T が (I)，(II) をみたすとき，Hilbert–Schmidt の理論が適用できて，

$$\begin{aligned} T\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} (T\varphi, \varphi_n)\varphi_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, T\varphi_n)\varphi_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n (\varphi, \varphi_n)\varphi_n. \end{aligned}$$

$\{\mu_n\}$ の相異なるものだけを取り出して，

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_j < \ldots$$

と並べ，P_j を $N(\lambda_j I - T)$ への直交射影とする。このとき，

$$\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{s_1}$$

とすると，

$$T\varphi_1 = \mu_1\varphi_1, \quad \ldots, \quad T\varphi_{s_1} = \mu_{s_1}\varphi_{s_1}.$$

このことから $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s_1}\}$ が $N(\lambda_1 I - T)$ を張ることがわかる。

$$P_1\varphi = (\varphi, \varphi_1)\varphi_1 + \ldots + (\varphi, \varphi_{s_1})\varphi_{s_1}$$

だから，

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 \varphi &= \lambda_1(\varphi, \varphi_1)\varphi_1 + \ldots + \lambda_1(\varphi, \varphi_{s_1})\varphi_{s_1} \\ &= \sum_{j=1}^{s_1} \mu_j(\varphi, \varphi_j)\varphi_j. \end{aligned}$$

よって，P_2 以降に関しても同じ議論をしていくと，(6.2) より，

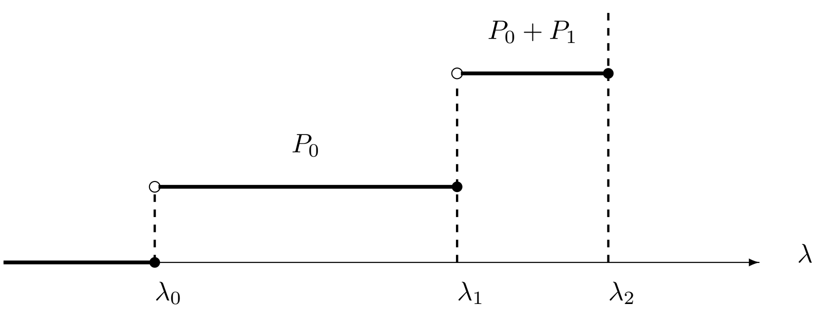
$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$$

とかける。さらに，

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} P_j, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

とおくと，

(a) E_λ は λ について左連続。
(b) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\mu,\lambda\}}$.
(c) $E_{-\infty} = 0$，$E_{+\infty} = I$.



ここで，$\{\varphi_n\}$ が X の完全正規直交系であることから，

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_j\varphi.$$

よって，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} P_j = I$ となり，$E_{+\infty} = I$ であることが分かる。

注意 6.3 条件 (a)〜(c) をみたす直交射影の族 $\{E_\lambda\}$ を**単位の分解**（*resolution of the identity*）という。

　このとき，

$$\begin{aligned} T &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_j P_j + \ldots \\ &= \int_0^\infty \lambda dE(\lambda) \end{aligned}$$

とかける。そこで，

$$\begin{aligned} e^{-tT} &= \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE(\lambda) \\ &= P_0 + e^{-\lambda_1 t} P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j t} P_j + \ldots \end{aligned}$$

とおくと，

主張 6.2

(6.2) $$\|e^{-tT}\| \leq 1, \quad t > 0.$$

証明.

$$\begin{aligned} \|e^{-tT}\varphi\|^2 &= \|(P_0 + e^{-\lambda_1 t} P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j t} P_j + \ldots)\varphi\|^2 \\ &= \|P_0\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^\infty e^{-2\lambda_j t}\|P_j\varphi\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \|P_j\varphi\|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 \quad (\text{Parseval の等式}). \quad \square \end{aligned}$$

主張 6.3

(6.3) $$\text{初期状態}: e^{-tT} \longrightarrow I \quad (t \downarrow 0),$$

(6.4) $$\text{平衡状態}: e^{-tT} \longrightarrow P_0 \quad (t \uparrow \infty).$$

証明.

$$\begin{aligned} \|(e^{-tT} - I)\varphi\|^2 &= \|e^{-tT}\varphi - \varphi\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^\infty (e^{-\lambda_j t} - 1) P_j \varphi \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^\infty (e^{-\lambda_j t} - 1)^2 \|P_j\varphi\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \|P_j\varphi\|^2. \end{aligned}$$

ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\sum_{j=N}^\infty \|P_j\varphi\|^2 < \varphi^2$$

となる $N = N(\varepsilon)$ が存在することに注意すると，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty (e^{-\lambda_j t} - 1)^2 \|P_j\varphi\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{N-1} (e^{-\lambda_j t} - 1)^2 \|P_j\varphi\|^2 + \sum_{j=N}^\infty \|P_j\varphi\|^2 \\ &\leq (1 - e^{-\lambda_{N-1} t})^2 \sum_{j=1}^{N-1} \|P_j\varphi\|^2 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

よって，

$$\limsup_{t\downarrow 0}\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j t}-1)^2\|P_j\varphi\|^2\le\varepsilon^2.$$

即ち，$t\downarrow 0$ のとき，

$$\|(e^{-tT}-I)\varphi\|\longrightarrow 0$$

となり (6.3) が示せた。

また，

$$\begin{aligned}\|(e^{-tT}-P_0)\varphi\|^2 &= \|e^{-tT}\varphi-P_0\varphi\|^2\\ &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j t}P_j\varphi\right\|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}e^{-2\lambda_j t}\|P_j\varphi\|^2\\ &\le e^{-2\lambda_1 t}\sum_{j=1}^{\infty}\|P_j\varphi\|^2.\end{aligned}$$

したがって，$t\uparrow +\infty$ とすると，

$$\|(e^{-tT}-P_0)\varphi\|\longrightarrow 0$$

となり (6.4) が示せた。 □

定義 6.1 $\{T_t\}_{t\ge 0}$ を X から X への有界線形作用素とする。次の 3 つの条件をみたすとき $\{T_t\}_{t\ge 0}$ を $(C)_0$ 級の**縮小半群**（*contraction semigroup*）という：

(i) $T_{t+s}=T_tT_s,\quad t,s\ge 0.$
(ii) $\lim_{t\downarrow 0}\|T_tx-x\|=0,\quad x\in E.$
(iii) $\|T_t\|\le 1,\quad t\ge 0.$

ここで，今議論してきた e^{-tT} が縮小半群になっていることを示す。

(ii) は (6.3) から，(iii) は (6.2) から従うので，(i) のみを示せば十分である。

$$\begin{aligned}& e^{-tT}e^{-sT}\\ =\ & (P_0+e^{-\lambda_1 t}P_1+\ldots+e^{-\lambda_j t}P_j+\ldots)(P_0+e^{-\lambda_1 s}P_1+\ldots+e^{-\lambda_j s}P_j+\ldots)\\ =\ & (P_0+e^{-\lambda_1(t+s)}P_1+\ldots+e^{-\lambda_j(t+s)}P_j+\ldots)\\ =\ & e^{-(t+s)T}.\end{aligned}$$

ゆえに，e^{-tT} は縮小半群である。

最後に，Dirichlet 境界条件の解と Neumann 境界条件の解において $t\to\infty$ としたときの漸近挙動について考える。

まず，Dirichlet 境界条件

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u=0,\\ u|_{t=0}=u_0,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

の場合を考える。例 6.1 より，T を $-\Delta_D$ と対応させて，

$$e^{-tT}\longleftrightarrow e^{t\Delta_D}$$

とかく。すると，解は

$$u(t,x) = e^{t\Delta_D} u_0(x)$$

とかける。ここで $t \to \infty$ とすると，0 は固有値でないから $P_0 = 0$ で，

$$u(t,x) \longrightarrow 0.$$

Neumann 境界条件

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \end{cases}$$

の場合を考える。例 6.2 より，T を $-\Delta_N$ と対応させて，

$$e^{-tT} \longleftrightarrow e^{t\Delta_N}$$

とかく。すると，解は

$$u(t,x) = e^{t\Delta_N} u_0(x)$$

とかける。ところで、固有値 0 に対応する $L^2(\Omega)$ で正規化された固有関数 $\varphi_0(x)$ は，

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}.$$

したがって、

$$P_0(u_0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x)\,dx.$$

となり，$P_0(u_0)$ は初期温度分布 $u_0(x)$ の平均となる。

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega u(t,x)\,dx\right) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,dx \\ &= \int_\Omega \Delta u(t,x)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\,d\sigma(x) \quad (\text{Green の公式}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり，$\displaystyle\int_\Omega u(t,x)\,dx$ は t によらない定数であることに注意する。

以上より，

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega u_0(x)\,dx \qquad (t \downarrow 0),$$

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx \longrightarrow P_0(u_0) \qquad (t \to \infty)$$

だから，

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx \longrightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x)\,dx \quad (t \to \infty)$$

となり，$u(\cdot,t)$ は初期温度分布 $u_0(\cdot)$ の平均に近づく。

7 Weyl の補題

Weyl の補題は，超関数の意味で調和 $\Delta u = 0$ ならば，実は $u \in C^\infty(\Omega)$ であることを主張している。Weyl の補題の証明には調和関数の理論が必要であり，まずは, 調和関数を考えた後に Weyl の補題を証明していく。

7.1 調和関数

定理 7.1 (発散定理) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域（連結開集合）とし，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ を境界 $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトルとする。このとき，

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n f_i \nu_i \, d\sigma, \quad f_i \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{7.1}$$

ただし，$d\sigma$ は境界 $\partial\Omega$ の面積要素である。

注意 7.1 $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ とすると，(7.1) は次のように書き換えることができる：

$$\int_\Omega \operatorname{div} f\, dx = \int_{\partial\Omega} (f, \nu)\, d\sigma. \tag{(7.1)'}$$

定理 7.2 (Green の公式) $u,\, v \in C^2(\overline{\Omega})$ に対して，

$$\int_\Omega (v\Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, d\sigma. \tag{7.2}$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} u \right) d\sigma. \tag{7.3}$$

証明.

$$f = v \operatorname{grad} u = \left(v\frac{\partial u}{\partial x_1}, v\frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, v\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

として定理 7.1 を適用すると (7.2) が導かれる。次に，(7.2) において u と v を交換し，(7.2) からこの式を引くと (7.3) が得られる。 □

定義 7.1 Ω で定義された関数 u が 2 回連続微分可能で，Ω で Laplace 方程式

$$\Delta u = 0$$

を満たすとき，**調和**（*harmonic*）であるという。

系 7.1 u が Ω で調和であるとき，任意の Ω の部分領域 Ω' で

$$\int_{\partial\Omega'} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\, d\sigma(x) = 0$$

である。

証明. (7.2) において，$v = 1$ とすればよい。 □

定理 7.3 (球面平均の定理) u が Ω で調和であるとする。$x \in \Omega$ とし，$\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ となるように十分小さな $r > 0$ をとる。このとき，

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + rz)\, d\sigma(z). \end{aligned}$$

ここで，$\omega_n = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ は n 次元単位球の表面積である。

証明. 2 番目の式に関して：

$$y = x + rz, \quad z \in S_1(0)$$

と変数変換すると，

$$d\sigma(y) = r^{n-1}\, d\sigma(z)$$

だから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+rz) r^{n-1}\, d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+rz)\, d\sigma(z).\end{aligned}$$

1 番目の式に関して：

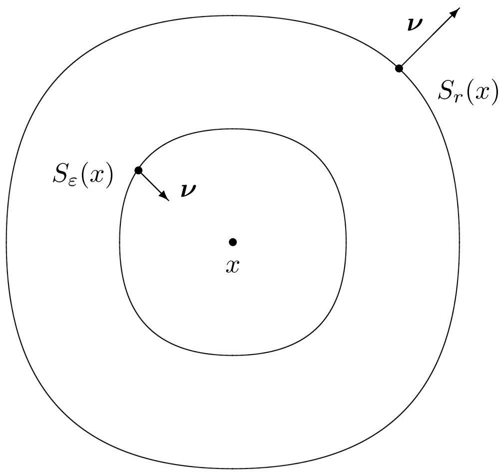
$$v(y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & (n \geq 3), \\ -\log|x-y| & (n = 2), \end{cases}$$

とする。

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} \frac{1}{r}\sum_{j=1}^n (y_j - x_j)\dfrac{\partial}{\partial y_j} & \text{on } S_r(x), \\ \\ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)\dfrac{\partial}{\partial y_j} & \text{on } S_\varepsilon(x), \end{cases}$$

に注意すると，

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} (2-n)\frac{1}{r^{n-1}} & \text{on } S_r(x), \\ \\ -(2-n)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} & \text{on } S_\varepsilon(x). \end{cases}$$



さらに，

$$\Delta u = 0 \quad \text{for } y \neq x$$

は容易に分かる。そして，Green の公式の (7.3) を適用すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_r(x)} \left(v(y)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) u(y) \right) d\sigma(y) + \int_{S_\varepsilon(x)} \left(v(z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z) - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z) u(z) \right) d\sigma(z) \\ &= \int_{S_r(x)} \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)\, d\sigma(y) - \int_{S_r(x)} (2-n)\frac{1}{r^{n-1}} u(y)\, d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z)\, d\sigma(z) + \int_{S_\varepsilon(x)} (2-n)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} u(z)\, d\sigma(z). \end{aligned}$$

しかし，系 7.1 より，

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)\, d\sigma(y) = 0, \quad \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z)\, d\sigma(z) = 0.$$

したがって，

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z).$$

主張 7.1 $\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z) \longrightarrow \omega_n u(x).$$

実際，u の連続性から，

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z) - u(x) \right| &= \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \left| \int_{S_\varepsilon(x)} (u(z) - u(x))\, d\sigma(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} |u(z) - u(x)|\, d\sigma(z) \\ &\leq \sup_{|z-x| \leq \varepsilon} |u(z) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0). \end{aligned}$$

したがって，まとめると，

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y). \quad \square$$

系 7.2 u が Ω で調和であるとする。このとき，

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz)\, dz.$$

注意 7.2 n 次元単位球の体積は，

$$\int_{B_1(0)} dy = \int_0^1 \int_{S_1(0)} r^{n-1}\, d\sigma(y)\, dr = \omega_n \int_0^1 r^{n-1}\, dr = \frac{\omega_n}{n}.$$

系 7.2 の証明. 2 番目の式に関して：

$$y = x + rz, \quad z \in B_1(0)$$

と変数変換すると，

$$dy = r^n\, dz$$

だから，

$$\begin{aligned} \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy &= \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz) r^n\, dz \\ &= \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz). \end{aligned}$$

1 番目の式に関して：定理 7.3 より，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + \rho r y)\, d\sigma(y), \quad 0 < \rho < 1.$$

したがって，$\rho^{n-1} d\rho$ に関して 0 から 1 まで両辺積分すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} u(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 \int_{S_1(0)} u(x + \rho r y) \rho^{n-1}\, d\rho\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{S_1(0)} u(x + ty) \left(\frac{t}{r}\right)^{n-1} \frac{dt}{r}\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{S_1(0)} u(x + ty) t^{n-1}\, dt\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy. \quad \square \end{aligned}$$

定理 7.4 (球面平均の定理の逆) $u \in C(\Omega)$ が球面平均の性質：

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y), \quad \forall \overline{B_r(x)} \subset \Omega \tag{7.4}$$

を満たすとする。このとき，

$$\begin{cases} u \in C^\infty(\Omega), \\ \varDelta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

証明. まず，$u \in C^\infty(\Omega)$ を示す。

(a) $\varphi \geq 0 \quad \text{on } B_1(0)$.
(b) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$.
(c) $\varphi(x) = \psi(|x|), \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

を満たすような $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ をとり，

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$
$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\},$$

とする。

主張 7.2 任意の $x \in \Omega_\varepsilon$ に対して，

$$u(x) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy. \tag{7.5}$$

証明.

$$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon(x - \cdot) \subset \Omega, \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy &= \int_{|z| \leq \varepsilon} \varphi_\varepsilon(z) u(x-z)\, dz \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|z| \leq \varepsilon} \varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) u(x-z)\, dz \\ &= \int_{|w| \leq 1} \varphi(w) u(x - \varepsilon w)\, dw \\ &= \int_0^1 \int_{S_1(0)} \varphi(rs) u(x - \varepsilon rs) r^{n-1}\, d\sigma(s)\, dr \\ &= \int_0^1 \int_{S_1(0)} \psi(r) u(x - \varepsilon rs) r^{n-1}\, d\sigma(s)\, dr \\ &= \int_0^1 \psi(r) r^{n-1}\, dr \left(\int_{S_1(0)} u(x - \varepsilon rs)\, d\sigma(s) \right). \end{aligned}$$

しかし，(7.4) より，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x - \varepsilon rs)\, d\sigma(s).$$

よって，

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy &= \int_0^1 \psi(r) r^{n-1}\, dr (\omega_n u(x)) \\ &= u(x) \left(\int_0^1 \int_{S_1(0)} \psi(r) r^{n-1}\, d\sigma(s)\, dr \right) \\ &= u(x) \int_{B_1(0)} \varphi(y)\, dy \\ &= u(x). \quad \square \end{aligned}$$

したがって，(7.5) は

$$u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

を意味している。

$$\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon$$

だから，

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

次に，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を示す。

$$\Omega = B_r(x), \quad v = 1$$

として Green の 公式の (7.2) を適用すると，

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy &= \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)\,d\sigma(y) \\
&= \int_{S_r(x)} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - x_i}{r} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\,d\sigma(y) \\
&= \int_{S_1(0)} \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(x+rz) r^{n-1}\,d\sigma(z) \\
&= \int_{S_1(0)} \left[\frac{d}{d\rho}(u(x+\rho z))\right]_{\rho=r} d\sigma(z) \cdot r^{n-1} \\
&= r^{n-1} \frac{d}{d\rho} \left(\int_{S_1(0)} u(x+\rho z)\,d\sigma(z) \right)\Bigg|_{\rho=r}.
\end{aligned}$$

しかし，(7.4) より，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+\rho z)\,d\sigma(z).$$

よって，

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy = r^{n-1} \frac{d}{d\rho}(\omega_n u(x)) = 0.$$

$\Delta u \in C(\Omega)$ で，$B_r(x)$ は任意だから，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

これで，定理 7.4 が証明できた。 □

系 7.3 u が Ω で調和であるとすると，

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

証明. 定理 7.3，7.4 の結果より明らか。 □

系 7.4 $\{u_k\}$ を Ω のコンパクト部分集合上で u に一様収束するような Ω の調和関数の列とする。このとき，u は Ω で調和である。

証明. $u_k \in C^2(\Omega)$ でその収束が一様だから，$u \in C(\Omega)$ である。

一方，定理 7.4 から，

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u_k(x+ry)\,d\sigma(y).$$

両辺の極限をとると，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+ry)\,d\sigma(y).$$

したがって，定理 7.4 を適用して，

$$\begin{cases} u \in C^\infty(\Omega), \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad \square \end{cases}$$

定理 7.5 (最大値の原理) Ω を連結な領域とする。u を Ω 上で調和で実数値関数とし，さらに，

$$\sup_\Omega u = A < \infty$$

を満たすとする。このとき，次のいずれかが成り立つ：

(a) $u(x) < A, \quad \forall x \in \Omega.$
(b) $u(x) = A, \quad \forall x \in \Omega.$

証明.

$$G = \{x \in \Omega \mid u(x) = A\}$$

とする。$u \in C(\Omega)$ だから G は Ω での閉集合である。

x_0 を G の任意の点とすると，系 7.2 より，十分小な $r > 0$ に対して，

$$\sup_\Omega u = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)} u(x_0+ry)\,dy \le \sup_\Omega u.$$

これは，x_0 の周りの小さい球内のすべての y に対して $u(y) = A$ であることを意味している。
ここで，

$$\varphi(y) = u(x_0) - u(x_0+ry), \quad \forall u \in B_1(0)$$

とする。このとき，

$$\begin{aligned} \frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)} \varphi(y)\,dy &= u(x_0) - \frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)} u(x_0+ry)\,dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，

$$\varphi(y) = 0 \quad \text{on } B_1(0)$$

だから，

$$u(x_0+ry) = u(x_0), \quad \forall y \in B_1(0).$$

よって，$x_0 + B(0,r) \subset G$ だから，G は開集合である。

したがって，Ω は連結だから，

(a) $G = \emptyset.$
(b) $G = \Omega.$

のいずれかである。 $\square$

7.2 Weyl の補題

調和関数の理論の基に，次の Weyl の補題を証明する。

補題 7.1 (Weyl) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$，Ω で $\Delta u = 0$ とすると，$u \in C^\infty(\Omega)$ である。

証明. 定理 7.4 より,

$$\begin{aligned}&u\in C(\Omega)\\&u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)}u(x+ry)\,d\sigma(y),\quad \omega_n=\frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\end{aligned}$$

を示せばよい。

Step 1.

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,dx=1,\\ \varphi(x)\geq 0,\quad x\in\mathbf{R}^n,\\ \varphi(x)=\varphi(-x),\quad x\in\mathbf{R}^n\end{cases}$$

を満たすような $\varphi\in C_0^\infty(B_1(0))$ をとる。

$$\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad \forall\varepsilon>0$$

とする。このとき,

$$u*\varphi_\varepsilon\in C^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

ただし,

$$\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega\mid \mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$$

とする。今, 任意に $\psi\in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ をとる。このとき,

$$\psi*\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$$

で, Ω で $\Delta u=0$ だから,

$$\begin{aligned}\langle\Delta(u*\varphi_\varepsilon),\psi\rangle &= \langle u*\varphi_\varepsilon,\Delta\psi\rangle\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n}u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\right)\Delta\psi(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}u(y)\left(\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\,dx\right)dy\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}u(y)\left(\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(y-x)\Delta\psi(x)\,dx\right)dy\\ &= \langle u,\Delta(\varphi_\varepsilon*\psi)\rangle\\ &= \langle\Delta u,\varphi_\varepsilon*\psi\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって,

$$\langle\Delta(u*\varphi_\varepsilon),\psi\rangle=0,\quad \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

これは,

$$\Delta(u*\varphi_\varepsilon)=0\quad \text{in }\Omega_\varepsilon$$

であることを意味している。よって, 系 7.2 を適用して,

$$u*\varphi_\varepsilon(x)=\frac{n}{r^n\omega_n}\int_{B_r(x)}(u*\varphi_\varepsilon)(y)\,dy.$$

Step 2. ここでは, 次の 2 つの主張をあげる。

主張 7.3 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ とすると, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき,

$$u*\varphi_\varepsilon\longrightarrow u\quad \text{in }L^1_{loc}(\Omega).$$

証明. Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対して,

$$\begin{aligned}\int_K |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|\,dx &= \int_K \left|\int_{|y|\le\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)(u(x-y)-u(x))\,dy\right| dx \\ &= \int_K \left|\int_{|z|\le 1} \varphi(z)(u(x-\varepsilon z)-u(x))\,dz\right| dx \\ &\le \int_K \int_{|z|\le 1} \varphi(z)|u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dz\,dx\end{aligned}$$

だから，Fubini の定理より,

$$\int_K |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|\,dx \le \int_{|z|\le 1}\left(\int_K |u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dx\right)\varphi(z)\,dz.$$

もし,

$$u^0(x) = \begin{cases} u(z) & (z \in K_1 = K + \{|y| \le 1\}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると,

$$u^0 \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

さらに,

$$\begin{aligned}\int_K |u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dx &\le \int_K |u^0(x-\varepsilon z) - u\ 0(x)|\,dx \\ &\le 2\|u^0\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}, \quad 0<\varepsilon<1, \quad |z|\le 1,\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_K |u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dx \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_K |u^0(x-\varepsilon z)-u^0(x)|\,dx = 0.$$

よって，Lebesgue の優収束定理を適用して,

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_K |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|\,dx &\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|z|\le 1}\left(\int_K |u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dx\right)\varphi(z)\,dz \\ &= \int_{|z|\le 1}\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_K |u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dx\right)\varphi(z)\,dz \\ &= 0.\end{aligned}$$

これは，$\varepsilon\downarrow 0$ のとき,

$$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega)$$

を意味している。 □

主張 7.4 $L^1(\Omega)$ で $f_j \to f$ とすると,

$$f_{j(k)}(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

となるような部分列 $\{f_{j(k)}\}$ をみつけることができる。

証明. $\{f_j\}$ は $L^1(\Omega)$ の Cauchy 列だから,

$$\begin{aligned}&\|f_{j(1)} - f_{j(2)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{2}, \\ &\|f_{j(2)} - f_{j(3)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{2^2}, \\ &\quad\vdots \\ &\|f_{j(k)} - f_{j(k+1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{2^k},\end{aligned}$$

となるような部分列 $\{f_{j(k)}\}$ をみつけることができる。このとき，

$$g_k(x) = |f_{j(1)}(x)| + |f_{j(2)}(x) - f_{j(1)}(x)| + \ldots + |f_{j(k)}(x) - f_{j(k-1)}(x)|$$

とおくと，

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq \ldots$$

だから，任意の $x \in \Omega$ に対して，極限

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

が存在する。したがって，単調収束定理を適用すると，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k(x)\,dx \\
&\leq \|f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \|f_{j(2)} - f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \ldots \\
&\leq \|f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \\
&= \|f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + 1.
\end{aligned}$$

これは，

$$g \in L^1(\Omega)$$

であること，

$$\begin{cases} \mu(\Omega_0) = 0, \\ 0 \leq g(x) < \infty, \quad \forall x \in \Omega\backslash\Omega_0 \end{cases}$$

となるような Ω の可測な部分集合 Ω_0 が存在することを示している。

しかし，

$$|f_{j(k)}(x)| \leq g_k(x) \leq g(x), \quad \forall x \in \Omega$$

であり，$\ell > k$ に対して，

$$\begin{aligned}
|f_{j(k)}(x) - f_{j(\ell)}(x)| &\leq |f_{j(k)}(x) - f_{j(k+1)}(x)| + \ldots + |f_{j(\ell-1)}(x) - f_{j(\ell)}(x)| \\
&\leq g_\ell(x) - g_k(x)
\end{aligned}$$

である。よって，任意の $x \in \Omega\backslash\Omega_0$ に対して，有限な極限

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} f_{j(k)}(x)$$

が存在して，

$$|F(x)| = \lim_{k\to\infty}|f_{j(k)}(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in \Omega\backslash\Omega_0.$$

これは，

$$|f_{j(k)}(x) - F(x)| \leq 2g(x), \quad \forall x \in \Omega\backslash\Omega_0$$

を意味している。

よって，Lebesgue の優収束定理を適用して，

$$f_{j(k)} \longrightarrow F \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

しかし，$L^1(\Omega)$ で $f_j \to f$ だから，

$$\begin{cases} \mu(\Omega_1) = 0, \\ f(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega\backslash\Omega_1 \end{cases}$$

となるような Ω の可測な部分集合 Ω_1 をみつけることができる。したがって,

$$\Omega' = \Omega_0 \cup \Omega_1$$

とおくと，$\mu(\Omega') = 0$ で,

$$f_{j(k)}(x) \longrightarrow f(x), \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega'. \quad \square$$

Step 3. 主張 1 より，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき,

$$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega).$$

Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対し，十分小な $r > 0$ に対して,

$$\bigcup_{x \in K} \overline{B_r(x)}$$

はコンパクトであることに注意する。よって，任意の $x \in K$ に対して,

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} (u * \varphi_\varepsilon)(y)\, dy \longrightarrow \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy.$$

しかし，主張 2 より,

$$u * \varphi_{\varepsilon_j}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{a.e. } x \in K$$

となるような列 $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j \downarrow 0$ をみつけることができる。したがって，u を測度 0 の集合上の関数と見ると，$u \in C(\Omega)$ で,

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy.$$

これから,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + rz)\, d\sigma(z)$$

であることがわかる。

これで，補題 7.1 が証明できた。 $\square$

第 III 部
一般楕円型境界値問題

ここからは，第 II 部で考えた Laplace 作用素を一般の楕円型微分作用素に発展させて考えていく。

8 一般楕円型微分方程式の解の存在定理

この節では，一般の 2 階楕円型微分作用素 A に対する境界値問題を考える。

領域 Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域で，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする。このとき，次の Dirichlet 境界値問題を考える：

$$(D_5) \qquad \begin{cases} Au + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

2 階偏微分作用素

$$(8.1) \qquad Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

が**楕円型**であるとは，$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \neq 0, \quad x \in \Omega,\ \xi \neq 0$$

が成り立つときをいう。特に，$a_{ij}(x)$ が実数値関数のときは，

$$(8.2) \qquad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in \Omega,\ i,j = 1,2,\ldots,n,$$

$$(8.3) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \neq 0$$

が成り立つことを Ω での楕円型の条件とする。

さらに，係数に関しては，$a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$，$b_i(x), c(x) \in C(\overline{\Omega})$ で，ともに有界な関数とする。

注意 8.1 (8.3) より，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \quad (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \{\eta \in \mathbf{R}^n \mid |\eta| = 1\}.$$

$\overline{\Omega} \times \{\eta \in \mathbf{R}^n \mid |\eta| = 1\}$ はコンパクトなので，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, |\xi| = 1$$

となる最小値 c_0 が存在する。よって，

$$\frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j}{|\xi|^2} \geq c_0, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \neq 0$$

より，

$$(8.4) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbf{R}^n$$

が成り立っている。

$u,\, v \in H_0^1(\Omega)$ に対して，

$$\mathcal{A}_0[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)}\, dx$$

とおく。$u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$ ならば，

$$(Au + \lambda u, v) = -\mathcal{A}_0[u,v] + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + \lambda u, v \right) \tag{8.5}$$

が成り立つことに注意する。

定理 8.1 $\lambda \in \mathbf{C}$ とする。ある定数 $C(\lambda) > 0$ が存在して，

$$|(Au + \lambda u, u)| \ge C(\lambda) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 , \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{8.6}$$

が成り立つならば，任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，(D_5) は解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を持つ。また，(D_5) の解は $H_0^1(\Omega)$ の中では唯一つである。

この定理は，次にあげる指数に関する安定性の定理より，完全連続な自己共役作用素の場合に帰着できる。

定理 8.2 T を X から Y への Fredholm 作用素で，K を X から Y への完全連続作用素とするならば，$T + K$ は X から Y への Fredholm 作用素であり，

$$\mathrm{ind}\,(T+K) = \mathrm{ind}\, T.$$

が成り立つ。

定理 8.1 の証明.

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ &:= A_0 u + Bu. \end{aligned}$$

ここで，

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$Bu = \left(b_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

ところで、A_0 は自己共役作用素，B は高々 1 階の偏微分作用素だから，Rellich の定理（定理 4.5）より，

$$B : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続である。したがって、定理 8.2 を適用して，

$$\mathrm{ind}\, A = \mathrm{ind}(A_0 + B) = \mathrm{ind}\, A_0$$

となるので，第 II 部の Laplace 作用素 $\varDelta$ の場合に帰着できる。よって，(8.6) を満たす定数 $C(\lambda) > 0$ が存在すれば，Fredholm の交代定理（定理 4.10）を適用できて，定理 8.1 が示される。　□

さて，ここからは (8.6) を満たす λ の範囲を考える。即ち，$\lambda=\mu+i\nu$ とおき，$\mu\to\infty$ のとき，(8.6) をみたすような ν について考える。よって，以下 $\mu>0$ とする。

まず，(8.4) より，

$$\mathcal{A}_0[u,u]\geq C_1\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2dx,\quad C_1>0$$

が成り立つ。

また，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n\left(b_i\frac{\partial u}{\partial x_i},u\right)\right| &\leq C_2\left(\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)},\quad C_2>0\\ &\leq C_2C_1^{-1/2}\left(\mathcal{A}_0[u,u]\right)^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \varepsilon\mathcal{A}_0[u,u]+\frac{C_3}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

となる。ただし，最後の不等式に関しては，任意の $\varepsilon>0$，$a,\,b>0$ に対して，

$$2ab\leq\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$$

となることから従う。

ここで，$\lambda=\mu+i\nu$ とおくと，(8.5) より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(Au+\lambda u,u)&=-\mathcal{A}_0[u,u]+\mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+K_1,\\ \mathrm{Im}\,(Au+\lambda u,u)&=\nu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+K_2.\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}K_1&=\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu,u\right),\\ K_2&=\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu,u\right)\end{aligned}$$

とおいた。このとき，

$$\begin{aligned}|K_1| &\leq \varepsilon\mathcal{A}_0[u,u]+\frac{C_3}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+C_4\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \varepsilon\mathcal{A}_0[u,u]+\frac{C_5}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

となり，同様にして，

$$|K_2|\leq\varepsilon\mathcal{A}_0[u,u]+\frac{C_6}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

ここで，$z=\alpha+i\beta$ に対して，

$$|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\geq t|\alpha|+(1-t)|\beta|,\quad 0\leq t\leq 1$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}|(Au+\lambda u,u)| &\geq t\left|\nu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+K_2\right|+(1-t)\left|-\mathcal{A}_0[u,u]+\mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+K_1\right|\\ &\geq t\left(|\nu|\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-|K_2|\right)+(1-t)\left(\mathcal{A}_0[u,u]-\mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-|K_1|\right)\\ &\geq t\left(|\nu|\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-\varepsilon\mathcal{A}_0[u,u]-\frac{C_6}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad+(1-t)\left(\mathcal{A}_0[u,u]-\mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-\varepsilon\mathcal{A}_0[u,u]-\frac{C_5}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\geq (1-t-\varepsilon)\mathcal{A}_0[u,u]+\left\{t\left(|\nu|-\frac{C_6}{\varepsilon}\right)-(1-t)\left(\mu+\frac{C_5}{\varepsilon}\right)\right\}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

よって，

$$1 - t - \varepsilon > 0 \tag{8.7}$$

$$t\left(|\nu| - \frac{C_6}{\varepsilon}\right) - (1-t)\left(\mu + \frac{C_5}{\varepsilon}\right) > 0 \tag{8.8}$$

が成り立てばよい。

(8.7) より，$\varepsilon < 1 - t$ となるので，$\varepsilon = (1-t)/2$ とおく。(8.8) の左辺を $g(t)$ とおき，$g(t)$ を最大とする t_0 を求め，$g(t_0) > 0$ となるような μ, ν の条件を求めれば，これが最もよい $C(\lambda) > 0$ となる。

$$g(t) = t\left(\mu + |\nu|\right) - \frac{C_6 t}{1-t} - \mu - C_5$$

より，

$$g'(t) = \mu + |\nu| - \frac{C_6}{(1-t)^2}.$$

よって，$g'(t) = 0$ となる t の値を t_0 とすると，

$$t_0 = 1 - \sqrt{\frac{C_6}{\mu + |\nu|}}$$

のとき $g(t)$ は最大となる。このとき，

$$g(t_0) = |\nu| - 2\sqrt{C_6\left(\mu + |\nu|\right)} + C_6 - C_5$$

より，$g(t_0) > 0$ とすると，

$$|\nu| - 2\sqrt{C_6\left(\mu + |\nu|\right)} + C_6 - C_5 > 0.$$

したがって，

$$\left(|\nu| + C_7\right)^2 > C_8\left(\mu + |\nu|\right)$$

が求める条件である。

以上をまとめると，次の定理を得る：

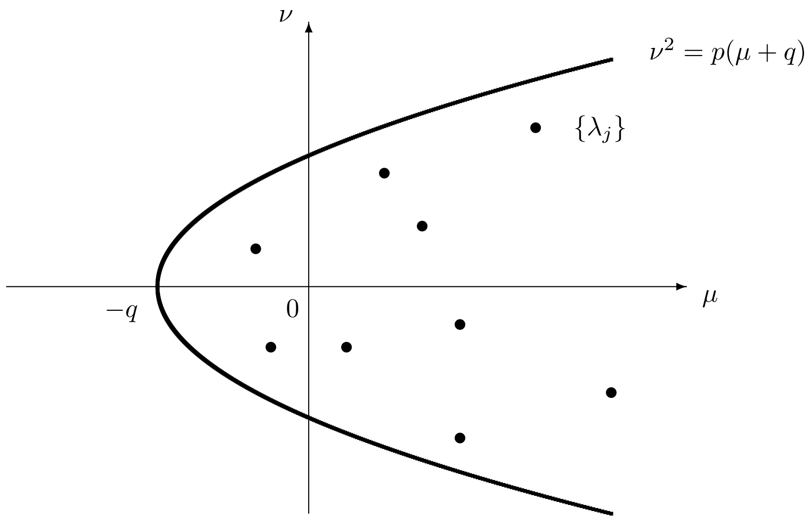
定理 8.3 2 階楕円型作用素 A に対して，ある定数 $p > 0$ と定数 q がとれて，$\lambda = \mu + i\nu$ が,

$$\nu^2 > p(\mu + q)$$

をみたしているならば，(8.6) が成り立つ。よって，(D_5) は任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ の中に解をもち，かつ一意である。

系 8.1 この定理 8.3 より，次の $-A$ に対する Dirichlet 問題の固有値分布は次の通り：

$$\begin{cases} Au + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$


ν
$\nu^2 = p(\mu + q)$
$\{\lambda_j\}$
$-q$
0
μ

9 強楕円型方程式の解の大域的正則性定理

ここでは，$2m$ 階の楕円型方程式：

$$Au = f \quad \text{in } \Omega$$

の解の正則性を考える。ただし，楕円型作用素 A は

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \left(a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u \right).$$

とし，係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ は Ω で有界可測で，$|\alpha| = |\beta| = m$ のとき Ω で一様連続と仮定する。

Laplace 作用素 Δ の場合は Weyl の補題で解の正則性は証明できたが，一般の楕円型微分作用素 A の場合には Weyl の補題は用いることができない。そこで，差分法の理論を用いて解の正則性を考えていく。

9.1 差分法

差分法に入る前に，関数空間などの準備をする。

まず，$u \in C^m(\Omega)$ に対して，

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha} u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

と定義する。また，$\|u\|_{m,\Omega}$，$\|v\|_{m,\Omega}$ が共に有限ならば，

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} u \cdot \overline{D^{\alpha} v} \, dx$$

が存在する。

同様に，$u \in C^m(\Omega)$ に対して，

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| = m} |D^{\alpha} u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

と定義する。

また，$C^{m*}(\Omega)$ を，$\|u\|_{m,\Omega}$ が有限となる関数 u の全体になる $C^m(\Omega)$ の部分集合とし，$H^m(\Omega)$ をノルム $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ による $C^{m*}(\Omega)$ の完備化したものとする。さらに，$W^m(\Omega)$ を m 階までの導超関数をもち，それらがすべて $L^2(\Omega)$ に属するような $L^2(\Omega)$ 関数の全体とする。即ち，

$$W^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid D^{\alpha} u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m \right\}.$$

また，$u, v \in W^m(\Omega)$ に対して，

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} u \cdot \overline{D^{\alpha} v} \, dx$$

と定義する。

次の 2 つの定義により領域 Ω の準備をする。

定義 9.1 任意の $x \in \Omega$ に対して，$U(x) \cap O_i \neq \emptyset$ をみたす O_i が有限個となるような x の近傍 $U(x)$ が存在するとき，**局所有限** *(locally finite)* という。

定義 9.2 Ω が**線分条件** *(segment property)* をもつとは，境界 $\partial\Omega$ の局所有限な開被覆 $\{O_i\}$ とそれに対応するベクトル $\{y_i\}$ があって，$x + ty_i \in \Omega$ がすべての $0 < t < 1$, $x \in \overline{\Omega} \cap O_i$ について成立することである。

Ω が線分条件をもつとき，定理 3.1 を発展させた次の定理を得る：

定理 9.1 Ω が線分条件をもつならば，

$$H^m(\Omega) = W^m(\Omega).$$

注意 9.1 $H^m(\Omega)$ に関するある性質を示すのに，同じ性質を $W^m(\Omega)$ に関して示すことがよくあるのでこの定理は重要である。

さらに，次の定理により，領域 Ω で考える話を局所的な話に帰着できる。

定理 9.2 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 F がコンパクトであるとし，$F \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} O_i$ であって，すべての O_i は開集合であるとする。このとき，$\xi_i \in C_0^\infty(O_i)$ であって，

$$\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(x) = 1, \quad x \in F$$

となる関数 $\{\xi_i\}$ が存在する。

証明. まず，コンパクト集合の族 $\{C_i\}$ を $C_i \subset O_i$ で，しかも $F \subset \bigcup C_i$ となるように選ぶ。例えば、次のように選ぶとよい：$x \in O_i$ に対して，半径が $2r_x > 0$ の球 $S(x, 2r_x)$ を

$$S(x, 2r_x) \subset O_i$$

となるようにとる。

F はコンパクトであって，$\{S(x, r_x) \mid x \in F\}$ で覆われているから，これらの球の有限個で覆われる。例えば，$\{S(x_k, r_{x_k}) \mid k = 1, 2, \ldots, m\}$ で覆われる。

$$C_i = \bigcup_{x_k \in O_i} \overline{S(x_k, r_{x_k})}$$

とおくと，C_i は望んでいた性質をもつ。

さて，コンパクト集合の族 $\{C_{i*}\}$ を

$$C_i \subset \operatorname{int} C_{i*} \subset C_{i*} \subset O_i$$

となるようにとる。ただし，$\operatorname{int} A$ は集合 A の内点の全体である。ψ_{i*} を C_{i*} 上で 1，その他で 0 である関数とし，$\varepsilon > 0$ を $\operatorname{dist}(C_i, \partial C_{i*})$, $\operatorname{dist}(C_{i*}, \partial O_i)$ より小にとる。

また，軟化作用素 J_ε を用いて，

$$\psi_i(x) = J_\varepsilon \psi_{i*}(x)$$

とおく。このとき，$\psi_i \in C_0^\infty(O_i)$ で，

$$\psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in C_i.$$

最後に，

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \psi_1, \\
&\xi_i = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{i-1})\psi_i \quad (i > 1)
\end{aligned}$$

とおくと，$\xi \in C_0^\infty(O_i)$ であって，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i &= 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_\nu), \\
&\equiv 1 \quad (\textstyle\bigcup C_i \text{において})
\end{aligned}$$

となる。 □

関数 ξ_i の集合を F の開被覆 $\{O_i\}$ に従属した 1 **の分解** (partition of unity) という。
さて，ここから差分法を考える。まず，差分作用素を定義する。

定義 9.3 e_i を単位ベクトル $(\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni})$ とし，$h \in \mathbf{R}$ とするならば，差分作用素 δ_h^i を任意の関数 u に対して，

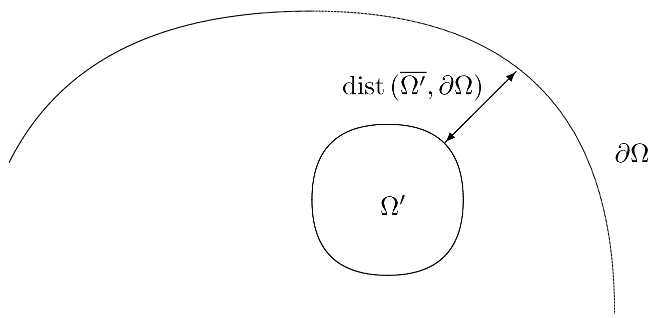
$$\delta_h^i u = \frac{1}{h}(u(x+he_i) - u(x))$$

により定義する。

以下，ここで定義した差分作用素に関する定理を 2 つあげる：

定理 9.3 $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 1$ とする。$\overline{\Omega'} \subset \Omega$ で $0 < h < \operatorname{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$ とする。このとき，

$$\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega}.$$



証明. 任意の $f \in C^1(a, b+h)$ について，

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(\xi)\, d\xi.$$

Schwarz の不等式より，

$$|f(x+h) - f(x)|^2 \leq h \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^2\, dx &\leq h \int_a^b \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq h \left\{ \int_a^{a+h} \int_a^{\xi} + \int_{a+h}^{b} \int_{\xi-h}^{\xi} + \int_b^{b+h} \int_{\xi-h}^{b} \right\} |f'(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq h^2 \int_a^{b+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|^2 dx \leq \int_a^{b+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi. \tag{9.1}$$

さて，$u \in C^m(\Omega)$ ならば，多重積分を累次積分にして，(9.1) を適用すると，$|\alpha| \leq m-1$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |D^\alpha \delta_h^i u_k|^2\, dx &= \int_{\Omega'} |\delta_h^i D^\alpha u_k|^2\, dx \\
&\leq \int_{\Omega} |D_i D^\alpha u_k|^2\, dx.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\|\delta_h^i u_k\|_{m-1,\Omega'} \le \|u_k\|_{m,\Omega}.$$

よって，$H^m(\Omega)$ において，$u_k \to u$ とすると，

$$\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \le \|u\|_{m,\Omega}.$$

ここで，左辺の正当性は，

$$\begin{aligned}\left|\|\delta_h^i u_k\|_{m-1,\Omega'} - \|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'}\right| &\le \|\delta_h^i u_k - \delta_h^i u\|_{m,\Omega} \\ &\le \frac{1}{h^2}\{\|u_k(\cdot+h) - u(\cdot+h)\|_{m,\Omega} + \|u_k(\cdot) - u(\cdot)\|_{m,\Omega}\} \\ &= \frac{1}{h^2}\|u_k(\cdot) - u(\cdot)\|_{m,\Omega} \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

より確かめられる。 □

定理 9.4 (差分法の基本定理) Ω は線分条件をみたすとする。$u \in H^m(\Omega)$ で，任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して，

$$\|\delta_h^i u\|_{m,\Omega'} \le C, \quad 0 < |h| < \mathrm{dist}\,(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$$

となる Ω'，h によらない定数 $C > 0$ が存在するとする。このとき，

$$u \in H^{m+1}(\Omega), \quad \|D_i u\|_{m,\Omega} \le C \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

証明. $m = 0$ のときについて示す。弱コンパクト性定理（定理 4.6）より，$h_k \to 0$ となる実数列 $\{h_k\}$ と，$u_i \in L^2(\Omega')$ が存在して，$L^2(\Omega')$ において $k \to \infty$ とするとき，

$$\delta_{h_k}^i u \longrightarrow u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

仮定より明らかに，

$$\|u_i\|_{0,\Omega'} \le C. \tag{9.2}$$

また，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} u_i \varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \delta_{h_k}^i u \varphi\, dx \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} u \delta_{-h_k}^i \varphi\, dx \\ &= -\int_{\Omega'} u D_i \varphi\, dx.\end{aligned}$$

これが，任意の $\Omega' \Subset \Omega$ で成立するから，u_i は Ω において一意的に定まり，u の導超関数に等しい。ゆえに，

$$u \in W^1_{loc}(\Omega) = H^1_{loc}(\Omega).$$

さらに，(9.2) より，

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |u_i(x)|^2\, dx \le C, \quad \Omega_k = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > 1/k\}$$

である。

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |u_i(x)|^2\, dx = \int_\Omega |u_i(x)|^2\, dx$$

より，

$$\int_\Omega |u_i(x)|^2\, dx \le C.$$

したがって，

$$u \in W^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

あとは同じ議論を繰り返せばよい。 □

9.2　Gårding の不等式（定理 9.5）

Gårding の不等式は，解の存在，一意性，さらに正則性を示すのに重要な不等式である。

まず，1 つの補間定理を証明しておく：

補題 9.1 n と m にのみ依存して定まる定数 γ_0 が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ と $\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$ に対して次の式が成り立つ。

$$|\varphi|_{j,\mathbf{R}^n}^2 \leq {\gamma_0}^m(\varepsilon^{m-j}|\varphi|_{m,\mathbf{R}^n}^2 + \varepsilon^{-j}|\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2), \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{9.3}$$

証明. φ の Fourier 変換 $\widehat{\varphi}$ を

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx$$

とする。部分積分により，$\varphi \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned}\widehat{D_k\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} D_k\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)i\xi_k e^{-ix\cdot\xi}\,dx \\ &= i\xi_k\widehat{\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

したがって，$\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$，$|\alpha| = j \leq m$ ならば，

$$\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{\varphi}(\xi).$$

Parseval の等式より，

$$\begin{aligned}|D^\alpha\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2 &= \int_{\mathbf{R}^n}\xi^{2\alpha}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \int_{|\xi|^2\leq\varepsilon^{-1}}\xi^{2\alpha}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{|\xi|^2>\varepsilon^{-1}}\xi^{2\alpha}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leq \varepsilon^{-j}\int_{\mathbf{R}^n}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,dx + \varepsilon^{m-j}\int_{|\xi|^2>\varepsilon^{-1}}|\xi|^{2m}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

Parseval の等式をもう 1 度適用すると，

$$|D^\alpha\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2 \leq \varepsilon^{-j}|\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2 + \gamma\varepsilon^{m-j}|\varphi|_{m,\mathbf{R}^n}^2.$$

よって，(9.3) が従う。　□

系 9.1 定数 $\gamma_0 = \gamma_0(n, m) > 0$ が存在して，任意の $0 < \varepsilon \leq 1$，$\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\|\varphi\|_{m-1,\mathbf{R}^n}^2 \leq \gamma_0(\varepsilon|\varphi|_{m,\mathbf{R}^n} + \varepsilon^{1-m}|\varphi|_{0,\mathbf{R}^n})$$

が成り立つ。

さて，Gårding の不等式について述べる。2 次形式

$$B(\varphi,\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx$$

を扱う。B の主要部 (principal part) に対して，

$$B'(\varphi,\varphi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx$$

とする。

定義 9.4 正の定数 E_0 をすべての実数ベクトル ξ と任意の $x \in \Omega$ について，

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \geq E_0|\xi|^{2m} \tag{9.4}$$

が成り立つように定めることができるとき，2 次形式 $B(\varphi,\varphi)$ は Ω において**一様に強楕円型**であるという。(9.4) が成り立つような E_0 を B の**楕円性定数** *(ellipticity constant)* という。

定理 9.5 (Gårding の不等式) *Ω を任意の開集合とする。$B(\varphi,\varphi)$ を Ω において一様に強楕円型の 2 次形式とし，E_0 を B の楕円性定数とする。*

(i) $|\alpha| = |\beta| = m$ のとき，$a_{\alpha\beta}(x)$ は Ω で一様連続，
(ii) $|\alpha| + |\beta| \leq 2m$ のとき，$a_{\alpha\beta}(x)$ は有界可測

と仮定する。このとき，定数 $\gamma_0 > 0$，$\lambda_0 \geq 0$ を

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) \geq \gamma_0 E_0 \|\varphi\|^2_{m,\Omega} - \lambda_0 \|\varphi\|^2_{0,\Omega}$$

がすべての $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ について成り立つようにとれる。ただし，γ_0 は n と m のみに依存し，λ_0 は n, m, E_0，$|\alpha| = |\beta| = m$ のときの $a_{\alpha\beta}(x)$ の連続度と $\sup_{x\in\Omega} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2m} |a_{\alpha\beta}(x)|$ にのみに依存して定まる。ここで，f の連続度とは，

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{Q} \\ \|x-y\|\leq\delta}} |f(x) - f(y)| = \omega(\delta).$$

この証明はいくつかの補題を通してなされる。その補題における B は，少なくとも定理 9.5 の条件をみたしていると仮定する。以下，n, m にのみ依存して定まる正の定数を一般に γ で表し，n, m, E_0, $|\alpha| = |\beta| = m$ に対する $a_{\alpha\beta}(x)$ の連続度と $|\alpha| + |\beta| \leq 2m$ に対する $|a_{\alpha\beta}(x)|$ の上限にのみ依存する正の定数を一般に K で表すことにする。

補題 9.2 $B = B'$ とし，B は定数係数をもつとする。そのとき，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0 |\varphi|^2_{m,\Omega}.$$

証明. $\Omega = \mathbf{R}^n$ としてもよいのは明らか。Parseval の等式より，$|\alpha| = |\beta| = m$ のとき，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha\varphi \overline{D^\beta\varphi}\, dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{D^\alpha\varphi}\overline{\widehat{D^\beta\varphi}}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) &= \mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \int_{\mathbf{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} |\widehat{\varphi(\xi)}|^2\, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}\, d\xi. \end{aligned}$$

ここで，B の楕円型性より，

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \geq \gamma E_0 \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha}$$

であるから，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0 \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha}\, d\xi.$$

ゆえに，Parseval の等式より，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0 |\varphi|^2_{m,\Omega}. \quad \square$$

補題 9.3 B' は定数係数をもつとする。そのとき，任意の $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ について，

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{0,\Omega}^2.$$

証明.

$$B(\varphi, \varphi) = B'(\varphi, \varphi) + \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2m-1} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi \overline{D^\beta \varphi}\, dx.$$

Schwarz の不等式より，$|\alpha| + |\beta| \leq 2m-1$ について，

$$\left| \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi \overline{D^\beta \varphi}\, dx \right| \leq K |\varphi|_{|\alpha|,\Omega} |\varphi|_{|\beta|,\Omega}.$$

よって，

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) &\geq \operatorname{Re} B'(\varphi, \varphi) - K\|\varphi\|_{m-1}|\varphi|_m - K\|\varphi\|_{m-1}^2 \\ &\geq \gamma E_0 |\varphi|_m^2 - K\|\varphi\|_{m-1}|\varphi|_m - K\|\varphi\|_{m-1}^2. \end{aligned}$$

最後の不等式は補題 9.2 からの結果である。

さて，任意の $\varepsilon > 0$，a, $b > 0$ に対して，

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

が成り立つことを (9.5) に適用すると，

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq (\gamma E_0 - K\varepsilon)|\varphi|_m^2 - K\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\|\varphi\|_{m-1}^2.$$

そこで，$\varepsilon = \dfrac{\gamma E_0}{2K}$ ととると，

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \frac{1}{2}\gamma E_0 |\varphi|_m^2 - K\|\varphi\|_{m-1}^2.$$

$\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$ と考えられるから，系 9.1 より，$0 < \eta \leq 1$ について，

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \frac{1}{2}\gamma E_0 |\varphi|_m^2 - K(\eta\|\varphi\|_m^2 + \eta^{1-m}\|\varphi\|_0^2).$$

もし，$\eta = \dfrac{\gamma E_0}{4K}$ ととると，

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \frac{1}{4}\gamma E_0 \|\varphi\|_m^2 - K\|\varphi\|_0^2. \quad \Box$$

これにより，B の主要部が定数係数をもつ場合の Gårding の不等式が証明できた。

次に，一般の場合について証明する。

補題 9.4 $B = B'$ を仮定する。このとき，定数 ρ を

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2$$

が $\operatorname{supp} \varphi$ の直径が ρ より小なる任意の $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ について成り立つように定めることができる。ただし，ρ は n, m, E_0, $a_{\alpha\beta}(x)$ の連続度のみに依存する。

証明. 係数は一様連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ について，$|x - y| < \rho$ のとき，

$$|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(y)| < \varepsilon, \quad x, y \in \Omega$$

となるように ρ を定めることができる。

もし，$\varphi \in C_0^m(\Omega)$ で，supp φ の直径が ρ より小であるとすると，$x^0 \in \mathrm{supp}\ \varphi$ とし，

$$B_0(\varphi,\varphi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x^0)\int_{\mathrm{supp}\ \varphi} D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx$$

とおく。そのとき，Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) &= \mathrm{Re}\,B_0(\varphi,\varphi)+\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_{\mathrm{supp}\ \varphi}\left(a_{\alpha\beta}(x)-a_{\alpha\beta}(x^0)\right)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx\\ &\geq \mathrm{Re}\,B_0(\varphi,\varphi)-\varepsilon\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}|D^\alpha\varphi|_{0,\Omega}|D^\beta\varphi|_{0,\Omega}\\ &\geq \mathrm{Re}\,B_0(\varphi,\varphi)-\gamma_1\varepsilon\|\varphi\|_{m,\Omega}^2.\end{aligned}$$

B_0 は定数係数をもつので，補題 9.3 が適用できて，(9.5) より，

$$\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) \geq (\gamma E_0-\gamma_1\varepsilon)\|\varphi\|_{m,\Omega}^2-K\|\varphi\|_{0,\Omega}^2.$$

ここで，$\varepsilon = \dfrac{\gamma E_0}{2\gamma_1}$ とおくと，

$$\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) \geq \frac{1}{2}\gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2-K\|\varphi\|_{0,\Omega}^2. \tag{9.5}$$

supp φ の直径が ρ より小であるから，Poincaré の不等式より，

$$\|\varphi\|_0 \leq \gamma\rho^m\|\varphi\|_m$$

であり，(9.5) は，

$$\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) \geq \left(\frac{1}{2}\gamma E_0-K\gamma^2\rho^{2m}\right)\|\varphi\|_{m,\Omega}^2$$

となる。ρ を十分小にとると，

$$\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2. \quad \square$$

系 9.2 補題 9.4 は仮定 $B=B'$ を省いても正しい。

証明. $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ であり，supp φ の直径は ρ より小であると仮定する。ただし，ρ は補題 9.4 で B' に対して定められた定数である。そのとき，この補題 9.4 より，$F=\mathrm{supp}\ \varphi$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) &= \mathrm{Re}\,B'(\varphi,\varphi)+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2m-1}\int_F a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx\\ &\geq \gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2-K\|\varphi\|_{m,F}\|\varphi\|_{m-1,F}\end{aligned}$$

任意の $\varepsilon>0$，$a,\ b>0$ について，

$$2ab \leq \varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$$

という不等式を用いると，(9.6) は，

$$\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2-K\varepsilon\|\varphi\|_{m,\Omega}^2-\frac{K}{\varepsilon}\|\varphi\|_{m-1,F}^2. \tag{9.6}$$

となる。Poincaré の不等式より，

$$\|\varphi\|_{m-1,F} \leq \gamma\rho\|\varphi\|_{m,F} = \gamma\rho\|\varphi\|_{m,\Omega}$$

だから, (9.6) は，

$$\mathrm{Re}\,B(\varphi,\varphi) \geq \left(\gamma E_0-K\varepsilon-\frac{K\rho^2}{\varepsilon}\right)\|\varphi\|_{m,\Omega}^2.$$

今，簡単のために, $\varepsilon = \dfrac{\gamma E_0}{2K}$ とおくと，$\rho \leq \dfrac{\varepsilon\gamma E_0}{4K}$ ととればよい。 $\square$

次の補題は，定理 9.2 に少し修正を加えた 1 の分解である。

補題 9.5 F を $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな部分集合とし，$F \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} O_i$ とする。ただし，O_i は開集合とする。このとき，$0 \leq \zeta_i \leq 1$ であり，

$$\sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(x)^2 \equiv 1, \quad x \in F$$

となる $\zeta_i \in C_0^\infty(O_i)$ が存在する。

証明. O_i', O_i'' を

$$O_i' \Subset O_i'' \Subset O_i \quad (i = 1, \ldots, \nu)$$

であり，

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} O_i''$$

となるように選ぶ。

また，$\zeta_i' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$ を次のようにとる。すべての i について $0 \leq \zeta_i' \leq 1$ で，$\bigcup_{i=1}^{\nu} O_i''$ 上において $\zeta_0'(x) \equiv 1$，$\mathrm{supp}\, \zeta_0' \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} O_i'$ であり，$1 \leq i \leq \nu$ について，O_i' 上で $\zeta_i'(x) \equiv 1$，$\mathrm{supp}\, \zeta_i' \subset O_i$ となるようにとる。そのとき，$1 \leq i \leq \nu$ について，

$$\zeta_i(x) = \zeta_i'(x) \left\{ \sum_{j=1}^{\nu} \zeta_j'(x)^2 + (1 - \zeta_0'(x))^2 \right\}^{-1/2}$$

とおく。

$\{\ \}$ の中は決して 0 にはならないので，$\zeta_i \in C_0^\infty(O_i)$. そして，$x \in F$ に対して $1 - \zeta_0'(x) = 0$ だから，

$$\sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(x)^2 = 1, \quad x \in F. \quad \square$$

次に，補題 9.5 を少し修正した次の補題をあげる：

補題 9.6 $d > 0$ とし，任意の整数の n 組 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して，

$$Q_\alpha = \{x \mid d(\alpha_k - 1) < x_k < d(\alpha_k + 1),\ k = 1, \ldots, n\}$$

とおく。そのとき，$0 \leq \zeta \leq 1$ であり，さらに，

$$\sum_\alpha \zeta(x - \alpha d)^2 \equiv 1$$

となるような $\zeta \in C_0^\infty(Q_0)$ が存在する。即ち，$\zeta_\alpha(x) \equiv \zeta(x - \alpha d)$ と定めると，$\zeta_\alpha \in C_0^\infty(Q_0)$ で，

$$\sum_\alpha \zeta_\alpha(x)^2 = 1$$

が成り立つ。

証明. $\zeta' \in C_0^\infty(Q_0)$ を $x \in \frac{3}{4} Q_0$ について $\zeta'(x) \equiv 1$ となるようにとる。そのとき，

$$\zeta(x) = \zeta'(x) \left(\sum_\alpha \zeta'(x - \alpha d)^2 \right)^{-1/2}$$

とおく。補題 9.5 の証明と同様に，$\zeta(x-\alpha d)$ はこの補題の要求している条件をみたしている。 □

定理 9.5 の証明. 補題 9.6 を適用する。立方体 Q_α の一辺を $2d$ にとり，d は Q_α の直径が補題 9.4 における ρ よりも小にとる。よって，$\sqrt{n}d<\rho$. 立方体 Q_α とそれに対応する ζ_α にある順序で番号をつけて，$Q_1, Q_2, \ldots; \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ とする。ζ_i は ζ_1 を平行移動したものであるから，

$$|D^\alpha \zeta_i| \le K, \quad |\alpha| \le m. \tag{9.7}$$

さて，$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ とする。そのとき，(9.6) より，

$$\operatorname{Re} B(\varphi,\varphi) \ge \operatorname{Re} B'(\varphi,\varphi) - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \tag{9.8}$$

ところで，

$$\begin{aligned} B'(\varphi,\varphi) &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty \zeta_i(x)^2 a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha\varphi \overline{D^\beta\varphi}\, dx \\ &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha(\zeta_i\varphi)\overline{D^\beta(\zeta_i\varphi)}\, dx + R(\varphi,\varphi). \end{aligned}$$

ただし，Leibnitz の公式により，

$$R(\varphi,\varphi) = -\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{i=1}^\infty \sum_{\substack{\gamma\le\alpha \\ \gamma\ne\alpha}} \sum_{\substack{\delta\le\beta \\ \delta\ne\beta}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) \binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{\delta} D^{\alpha-\gamma}\zeta_i D^\gamma\varphi \cdot D^{\beta-\gamma}\zeta_i \overline{D^\delta\varphi}\, dx.$$

したがって，(9.7) より，

$$|R(\varphi,\varphi)| \le K \sum_{|\gamma|+|\delta|\le 2m-1} \sum_{i=1}^\infty \int_{Q_i} |D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\, dx. \tag{9.9}$$

さて，立方体 Q_i は重なっているが，任意に 1 点を定めておけばその点は高々 2^n 個の立方体に含まれるので，

$$\sum_{i=1}^\infty \int_{Q_i} |D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\, dx = 2^n \int_\Omega |D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\, dx$$

であり，(9.9) より，

$$|R(\varphi,\varphi)| \le K \sum_{|\gamma|+|\delta|\le 2m-1} \int_\Omega |D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\, dx.$$

Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned} |R(\varphi,\varphi)| &\le K \sum_{|\gamma|+|\delta|\le 2m-1} \|D^\gamma\varphi\|_{0,\Omega}\|D^\delta\varphi\|_{0,\Omega} \\ &\le K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \end{aligned}$$

したがって，(9.9) より，

$$\operatorname{Re} B(\varphi,\varphi) \ge \sum_{i=1}^\infty \operatorname{Re} B'(\zeta_i\varphi,\zeta_i\varphi) - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \tag{9.10}$$

よって，$\operatorname{supp}(\zeta_i\varphi)$ の直径は Q_i の直径をこえないから，$\operatorname{supp}(\zeta_i\varphi)$ の直径は ρ より小さい。補題 9.4 により，

$$\operatorname{Re} B'(\zeta_i\varphi,\zeta_i\varphi) \ge \gamma E_0\|\zeta_i\varphi\|_{m,\Omega}^2$$

である。

ゆえに，(9.10) より，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0 \sum_{i=1}^{\infty} \|\zeta_i\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \tag{9.11}$$

(9.9) から (9.10) を導いたのと同様にして，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \|\zeta_i\varphi\|_{m,\Omega}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega |D^\alpha(\zeta_i\varphi)|^2\,dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega {\zeta_i}^2|D^\alpha\varphi|^2\,dx + R_1(\varphi,\varphi) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha\varphi|^2\,dx + R_1(\varphi,\varphi) \\
&= \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 + R_1(\varphi,\varphi).
\end{aligned}$$

ただし，$R_1(\varphi,\varphi)$ は (9.10) と類似な

$$|R_1(\varphi,\varphi)| \leq K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}$$

という評価式をもつ 2 次形式である。この結論と (9.11) より，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}.$$

あとは補題 9.3 の証明と同様にして，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi,\varphi)| \geq \gamma_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - \lambda_0\|\varphi\|_{0,\Omega}^2. \quad \square$$

9.3 解の内部正則性定理（定理 9.6）

補題 9.7 $x^0 \in \partial\Omega$ とする。座標軸を回転して，x^0 のある近傍 U を，

$$U = \{y \mid f(y') - h_0 < y_n < f(y') + h_0,\ |y'| < r_0\}$$

とあらわし，

$$U \cap \partial\Omega = \{y \mid y_n = f(y'),\ |y'| < r_0\}$$

と仮定する。ただし，$y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$，$r_0$ は正の定数，f は $|y'| < r_0$ での y' の連続関数，$x^0 = (0, 0, \ldots, f(0))$ とする。さらに，$u \in H_0^1(\Omega)$ で，u は $U \cap \overline{\Omega}$ で定義され，連続であるとする。このとき，$u(x^0) = 0$ である。

証明. $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ とし，$|y'| < r_0$ となるような y' を固定する。$0 < h < h_0$ について，$\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ に注意すると，

$$\varphi_k(y', f(y') - h) = \int_{f(y')}^{f(y')-h} D_n\varphi_n\,dy_n.$$

よって，Schwarz の不等式より，

$$|\varphi_k(y', f(y') - h)|^2 \leq h\int_{f(y')-h}^{f(y')} |D_n\varphi_n|^2\,dy_n.$$

これを y' について積分すると，$r < r_0$ のとき，

$$\int_{|y'|<r} |\varphi_k(y', f(y') - h)|^2\,dy' \leq h\int_{G_h} |D_n\varphi_n|^2\,dy.$$

ただし，$G_h = \{y \mid f(y') - h < y_n < f(y'),\ |y'| < r_0\}$ とする。したがって，$0 < \eta < h_0$ とすると，

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \int_{|y'|<r} |\varphi_k(y', f(y') - h)|^2\, dy'\, dh &\le \int_0^\eta h \int_{G_h} |D_n \varphi_n|^2\, dy\, dh \\ &\le \frac{1}{2}\eta^2 \int_{G_\eta} |D_n \varphi_n|^2\, dy.\end{aligned}$$

$H_0^1(\Omega)$ で $\varphi_k \to u$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta \int_{|y'|<r} |u(y', f(y') - h)|^2\, dy'\, dh &\le \frac{1}{2}\eta \int_{G_\eta} |D_n u|^2\, dy \\ &\le \frac{1}{2}\eta \|u\|_1^2.\end{aligned}$$

u の連続性より，$\eta \to 0$ とすると，

$$\int_{|y'|<r} |u(y', f(y') - h)|^2\, dy' = 0.$$

よって，$|y'| < r$ のとき，

$$u(y', f(y') - h) = 0. \quad \square$$

注意 9.2 この補題から，$u \in H_0^m(\Omega)$ で，$x^0 \in \partial\Omega$ が定理の条件をみたし，$D^\alpha u$ $(|\alpha| \le m-1)$ が x^0 の近傍において $\overline{\Omega}$ で連続ならば，$D^\alpha u$ は x^0 で 0 になることがわかる。

さて，双 1 次形式

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} D^\beta \psi\right)$$

を Dirichlet 双 1 次形式とよぶ。

以下，任意の $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，u が

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)$$

をみたし，ある j $(1 \le j \le m)$ について，

$$|B(\varphi, u)| \le C\|\varphi\|_{m-j,\Omega}$$

であることを仮定する。ただし，$C > 0$ を m, n, Ω, u に依存する定数とする。そして，$u \in H_0^m(\Omega)$ ならば，この不等式により $u \in H^{m+j}(\Omega)$ が導かれることを示していく。

ここで，次の記号を導入する: $G = G_R$ で球 $\{x \mid |x| < R\}$ をあらわし，$R' < R$，$R'' = \dfrac{1}{2}(R + R')$ とし，$G' = G_{R'}$，$G'' = G_{R''}$ と書く。

定理 9.6 $G = G_R$ とし，次を仮定する：

(i) 双 *1* 次形式

$$B(u, v) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \left(D^\alpha u, a_{\alpha\beta} D^\beta v\right)_{0,G}$$

で $a_{\alpha\beta}(x)$ は G で有界 $(|a_{\alpha\beta}(x)| \le M)$ かつ可測で，$|\alpha| = m$ について $a_{\alpha\beta}(x)$ は一様 Lipschitz 条件，即ち，

$$|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(y)| \le K|x - y|, \quad x, y \in G$$

をみたすとする。さらに，$\xi \in \mathbf{R}$，$x \in G$ に対して，

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \ge E|\xi|^{2m}$$

とする。

(ii) $u \in H^m(G)$ であり，任意の $\zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < R\})$ に対して，$\zeta u \in H_0^m(G)$.（これは G が半球のときのみ必要であって，G が球のときは自動的に満たされている。）

(iii) 定数 $C > 0$ が存在して，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$|B(\varphi, u)| \leq C\|\varphi\|_{m-1}.$$

このとき，$D_i u \in H^m(G')$ であり，m, n, E, M, K, R, R' に依存する定数 γ を，

$$\|D_i u\|_{m,G'} \leq \gamma(C + \|u\|_{m,G})$$

であるように定めることができる。ただし，G が球のときは $i = 1, 2, \ldots, n$ で，G が半球のときは $1, 2, \ldots, n-1$ である。

証明. まず，仮定 (iii) が成り立つとき，$|\alpha| < m$ について $a_{\alpha\beta}(x)$ を 0 としてよいことを示す。

$$\begin{aligned} |B(\varphi, u)| &= \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G} + \sum_{\substack{|\alpha|<m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right) \right| \\ &\geq \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G} \right| - C_1\|\varphi\|_{m-1,G}\|u\|_{m,G} \end{aligned}$$

より，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ について，仮定 (iii) より，

$$\left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G} \right| \leq (C + C_1\|u\|_{m,G})\|\varphi\|_{m-1,G}$$

となる。ただし，$C_1 > 0$ は m, n, M に依存する定数である。この不等式から，$a_{\alpha\beta}(x) = 0$ $(|\alpha| < m)$ としてもよい。

さて，$\zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| \subset R\})$ を，G' 上で $\zeta(x) \equiv 1$，G'' の外で $\zeta(x) \equiv 0$ である関数とする。ここでは、関数 $\zeta(x)$ を固定しておく。$0 < h < R - R''$ に対して，

$$v_h = \delta_h^i(\zeta u) = \delta_h(\zeta u)$$

とする。また，

$$D^\beta v_h = \delta_h D^\beta(\zeta u).$$

したがって，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ について，

$$B(\varphi, v_h) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}\delta_h D^\beta(\zeta u)\right)_{0,G}. \tag{9.12}$$

ここで，m, n, M, K, E, R, R' に依存して決まる定数を k とする。(9.12) で Leibnitz の公式を使い，定理 9.3 より，$|\gamma| \leq m-1$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\delta_h(D^{\beta-\gamma}\zeta \cdot D^\gamma u)\|_{0,G_R} &\leq \|D^{\beta-\gamma}\zeta \cdot D^\gamma u\|_{1,G_{R+h}} \\ &= \|D^{\beta-\gamma}\zeta \cdot D^\gamma u\|_{1,G_R} \\ &\leq k\|u\|_{m,G}. \end{aligned}$$

したがって，(9.12)，(9.13) より，

$$|B(\varphi, v_h)| \le \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta}\delta_h(\zeta D^\beta u)\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.$$

さて，右辺第 1 項は次のように評価できる：

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta}\delta_h(\zeta D^\beta u)\right) \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h(a_{\alpha\beta}\zeta D^\beta u)\right) - \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h a_{\alpha\beta}\cdot \zeta(x+he_i) D^\beta u(x+he_i)\right) \right| \\
&\le \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h(a_{\alpha\beta}\zeta D^\beta u)\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.
\end{aligned}$$

ここでは，$a_{\alpha\beta}(x)$ に関する Lipschitz 条件を用いた。

ゆえに，

$$\begin{aligned}
|B(\varphi, v_h)| &\le \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h(a_{\alpha\beta}\zeta D^\beta u)\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G} \\
&= \left| - \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(\zeta\delta_{-h} D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} D^\beta u\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.
\end{aligned}$$

Leibnitz の公式より，

$$\begin{aligned}
|B(\varphi, v_h)| &\le \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha (\zeta\delta_{-h}\varphi), a_{\alpha\beta} D^\beta u\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G} \\
&= |B(\zeta\delta_{-h}\varphi, u)| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.
\end{aligned}$$

仮定 (iii) より，

$$|B(\zeta\delta_{-h}\varphi, u)| \le C\|\zeta\delta_{-h}\varphi\|_{m-1,G}.$$

よって，定理 9.3 より，

$$\begin{aligned}
|B(\varphi, v_h)| &\le C\|\zeta\delta_{-h}\varphi\|_{m-1,G} + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G} \\
&= k(C + \|u\|_{m,G})\|\varphi\|_{m,G}.
\end{aligned}$$

この不等式は任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ について成り立つので，$\varphi \in H_0^m(G)$ で成り立つ。

特に，$\varphi = v_h$ について成り立つので，

$$|B(v_h, v_h)| \le k\|v_h\|_{m,G}(C + \|u\|_{m,G}).$$

Gårding の不等式（定理 9.5）より，

$$\begin{aligned}
\|v_h\|_{m,G}^2 &\le {\gamma_0}^{-1}E^{-1}\left(\mathrm{Re}B(v_h, v_h) + \lambda_0\|v_h\|_{0,G}^2\right) \\
&\le {\gamma_0}^{-1}E^{-1}\left\{k\|v_h\|_{m,G}(C + \|u\|_{m,G}) + \lambda_0\|v_h\|_{0,G}^2\right) \\
&\le k\|v_h\|_{m,G}\left(C + \|u\|_{m,G} + \|v_h\|_{0,G}\right) \\
&\le k\|v_h\|_{m,G}\left(C + \|u\|_{m,G} + \|u\|_{1,G}\right).
\end{aligned}$$

ここでは，(9.13) を $\beta=\gamma=0,\ m=1$ として，

$$\|v_h\|_{0,G}=\|\delta_h(\zeta u)\|_{0,G}\le k\|u\|_{1,G}$$

として用いた。$\|v_h\|_{m,G}$ で両辺を割ると，

$$\|\delta_h(\zeta u)\|_{m,G}=\|v_h\|_{m,G}\le k(C+\|u\|_{m,G}).$$

定理 9.4 より，この不等式から $D_i(\zeta u)\in H^m(G')$ であり，

$$\|D_i(\zeta u)\|_{m,G'}\le k(C+\|u\|_{m,G})$$

であることがわかる。

G' 上で $\zeta(x)\equiv 1$ より，

$$\|D_i u\|_{m,G'}\le k(C+\|u\|_{m,G}).\quad\square$$

この定理は，領域 Ω に含まれる任意の球について適用できるので，この定理は内部正則性を意味している。さらに，この定理は法線方向の導関数 $D_n u$ についても正しい。

特に，$m=1$ のときを考える。まず，任意の $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，u が方程式

$$B(\varphi,u)=(\varphi,f)_{0,\Omega}$$

をみたしているならば，Ω の任意の球 S に対して，

$$|B(\varphi,u)_S|\le\|f\|_{0,S}\|\varphi\|_{1-1,S},\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(S)$$

が成り立つ。そして，定理 9.6 を S について適用することができる。これより，$u\in H^2_{loc}(\Omega)$ である。

もし，$G\subset\Omega$ がその境界の平坦な部分が境界 $\partial\Omega$ に含まれるような半球で，そして、座標軸を回転して ∂G の平坦な部分が平面 $x_n=0$ に含まれているとする。このとき，定理 9.6 より，任意の $R'<R$ に対して，

$$D_i u\in H^1(G')\quad(i=1,2,\dots,n-1)$$

が成り立つ。ゆえに，

$$D_iD_j u\in H^0(G')\quad(i=1,\dots,n-1,\ j=1,\dots,n).$$

B は一様に強楕円型であるから，

$$\mathrm{Re}\,a_{nn}(x)\ge E.$$

したがって，$Au=f$ より，

$$D_n{}^2u=a_{nn}(x)^{-1}\left(f-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)D_iD_ju-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)D_iu-c(x)u\right)$$

とできる。右辺のすべての項は $H^0(G')$ に属するから，$D_n{}^2\in H^0(G')$ であり，$u\in H^2(G')$. さらに，定理 9.6 のなかで導関数 D_iD_ju $(i\ne n)$ について得た評価式より，

$$\|D_nu\|_{1,G'}\le\gamma(C+\|u\|_{1,G}).$$

ゆえに，

$$\|u\|_{2,G'}\le\gamma(C+\|u\|_{1,G}).\quad\square$$

9.4 解の大域的正則性定理（定理 9.7）

境界での正則性の問題にはいる前に，次の補題をあげる：

補題 9.8 $G = \{x \mid |x| < R,\, x_n > 0\}$ とする。$u \in H^{m+1}(G)$ で，すべての $\zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < R\})$ に対して $\zeta u \in H_0^m(G)$ であるならば，すべての $\zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < R\})$，$i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，

$$\zeta D_i u \in H_0^m(G).$$

証明. $\zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < R\})$ を固定し，$i \neq n$ とする。G の外で u を 0 と定義すると，$x \in G$ で，

$$\zeta(x)\delta_h^i u(x) = \delta_h^i(\zeta u)(x) - \delta_h^i \zeta(x) \cdot u(x + he_i). \tag{9.13}$$

明らかに，十分小な $|h|$ に対して，

$$\delta_h^i(\zeta u) \in H_0^m(G).$$

また，十分小な $|h|$ に対して，

$$\delta_h^i \zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < R)$$

であるから，十分小な $|h|$ に対して，

$$\delta_h^i \zeta(x) \cdot u(x + he_i) \in H_0^m(G).$$

よって，十分小な $|h|$ に対して，(9.13) より，

$$\zeta \delta_h^i u \in H_0^m(G).$$

適当に $R' < R$ を取れば，$\operatorname{supp} \zeta \cap G \subset G'$ である。定理 9.3 より，十分小な $|h|$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|\delta_h^i(\zeta u)\|_{m,G} &= \|\delta_h^i(\zeta u)\|_{m,G''} \\
&\leq \|\zeta u\|_{m+1,G} \\
&\leq \gamma \|\zeta\|_{m+1,G} \|u\|_{m+1,G}.
\end{aligned}$$

(9.13) より，十分小な $|h|$ に対して，

$$\|\zeta \delta_h^i u\|_{m,G} \leq \gamma_1 \|u\|_{m+1,G}. \tag{9.14}$$

ただし，γ_1 は h に独立である。$H_0^m(G)$ は Hilbert 空間であり，(9.14) より，$\zeta \delta_h^i u$ は $H_0^m(G)$ で一様有界である。よって，弱コンパクト性定理（定理 4.6）より，ある部分列 $\zeta \delta_{h(k)}^i u$ は $H_0^m(G)$ で弱収束する。特に，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_G \zeta \delta_{h(k)}^i u \cdot \varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty} -\int_G u \delta_{-h(k)}^i (\zeta\varphi)\, dx \\
&= -\int_G u D_i(\zeta\varphi)\, dx \\
&= \int_G D_i u \cdot \zeta\varphi\, dx \\
&= \int_G \zeta D_i u \cdot \varphi\, dx.
\end{aligned}$$

よって，$\zeta \delta_{h(k)}^i u$ は $H_0^m(G)$ において $\zeta D_i u$ に弱収束する。ゆえに，

$$\zeta D_i u \in H_0^m(G). \quad \square$$

ここで，もう 1 つ関数空間を定義する。$C_*^k(\Omega)$ を Ω において k 階までのすべての階数の有界且つ連続な導関数をもつ関数の全体の集合とする。

定義 9.5 Dirichlet 双 *1* 次形式

$$B(\varphi,\psi)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\left(D^\alpha\varphi,a_{\alpha\beta}D^\beta\psi\right)_{0,\Omega}$$

が**右 j 級滑らか** *(right j-smooth)* であるとは，係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ が Ω において有界可測で，$|\alpha|+j-m>0$ のとき，$a_{\alpha\beta}(x)\in C_*^{|\alpha|+j-m}(\Omega)$ であることをいう。

補題 9.9 $j\le m$ であって，次の *3* 条件を仮定する。

(i) B は一様に楕円型で，G で右 j 級滑らか。
(ii) $u\in H^m(G)$ で，任意の $\zeta\in C_0^\infty(\{x\mid |x|<R\})$ に対して，$\zeta u\in H_0^m(G)$.
(iii) 定数 $C>0$ を，すべての $\varphi\in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$|B(\varphi,u)|\le C\|\varphi\|_{m-j,G}$$

となるようにとれる。

このとき，任意の $R'<R$ に対して，$u\in H^{m+j}(G')$ であり，定数 $\gamma=\gamma(m,n,B,R,R')$ を

$$\|u\|_{m+j,G'}\le\gamma(C+\|u\|_{m,G})$$

となるようにとれる。

証明. j についての帰納法で示す。

まず，$j=0$ のときは明らか。定理 9.6 の証明のときと同様に，一般性を失うことなく $|\alpha|+j-m\le 0$ について $a_{\alpha\beta}(x)=0$ としてよい。$1\le j\le m$ で，補題 9.9 で j を $j-1$ に置き換えて成り立つと仮定する。さらに，$R'''=\dfrac{1}{2}(R+R'')$，$G'''=G_{R'''}$ とする。

$$|B(\varphi,u)|\le C\|\varphi\|_{m-j,G}\le C\|\varphi\|_{m-(j-1),G}$$

より，帰納法の仮定から，

$$u\in H^{m+j-1}(G''').$$

$j=1$ のときは，定理 9.6 より，

$$D_iu\in H^{m+j-1}(G''')\quad(i=1,2,\ldots,n-1).$$

同じ結果を $j>1$ について確かめるために，$u\in H^{m+1}(G''')$ に注目する。補題 9.8 より，任意の $\zeta\in C_0^\infty(\{x\mid |x|<R''')$ に対して，

$$\zeta D_iu\in H_0^m(G''')\quad(i=1,2,\ldots,n-1).$$

さらに，$\varphi\in C_0^\infty(G''')$ に対して，

$$\begin{aligned}B(\varphi,D_iu)&=\sum_{\substack{m-j\le|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}}\left(D^\alpha\varphi,a_{\alpha\beta}D^\beta D_iu\right)_{0,G'''}\\&=\sum_{\substack{m-j\le|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}}\left(D^\alpha\varphi,D_i(a_{\alpha\beta}D^\beta u)\right)_{0,G'''}-B_i(\varphi,u).\end{aligned}$$

ただし，

$$B_i(\varphi,u)=\sum_{\substack{m-j\le|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}}\left(D^\alpha\varphi,D_ia_{\alpha\beta}\cdot D^\beta u\right)_{0,G'''}$$

とする。部分積分をすると，

$$(D^\alpha\varphi, D_i(a_{\alpha\beta}u))_{0,G'''} = -\left(D^\alpha D_i\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G'''}$$

より，

$$B(\varphi, D_i u) = -B(D_i\varphi, u) - B_i(\varphi, u). \tag{9.15}$$

ここで，B_i の右辺の各項について考える。帰納法の仮定より，$u \in H^{m+j-1}(G''')$ だから，$|\alpha| - m + j - 1$ 回部分積分をして，$|\alpha| - m + j - 1$ 回の φ の微分を $(\cdot,\cdot)_{0,G'''}$ の他方へ移すと，Schwarz の不等式より，

$$\left|\left(D^\alpha\varphi, D_i a_{\alpha\beta}\cdot D^\beta u\right)_{0,G'''}\right| \le \gamma\|\varphi\|_{m-j+1,G'''}\|u\|_{m+j-1,G'''}.$$

ここで，B が右 j 級滑らかだから，$D_i a_{\alpha\beta}(x)$ の $|\alpha| - m + j - 1$ 階までの導関数は有界であるという事実を用いた。

以上より，仮定 (iii) と (9.15) より，

$$\begin{aligned} |B(\varphi, D_i u)| &\le C\|D_i\varphi\|_{m-j,G'''} + \gamma\|\varphi\|_{m-j+1,G'''}\|u\|_{m+j-1,G'''} \\ &\le \gamma(C + \|u\|_{m+j-1,G'''})\|\varphi\|_{m-j+1,G'''}. \end{aligned}$$

ここで，γ は m, n, B, R, R' にのみ依存する定数である。

ゆえに，$D_i u$ は j を $j-1$，G を G''' で置き換えて補題 9.9 の条件をみたしている。帰納法の仮定より，$D_i u \in H^{m+j-1}(G'')$ であり，

$$\begin{aligned} \|D_i u\|_{m+j-1,G''} &\le \gamma(C + \|u\|_{m+j-1,G'''} + \|D_i u\|_{m,G'''}) \\ &\le \gamma(C + \|u\|_{m+j-1,G'''}). \end{aligned}$$

ここで，$j > 1$ より, $m + 1 \le m + j - 1$ であることに注意する。(9.16) は $i = 1, 2, \ldots, n$ で成り立つ。

(9.16) と帰納法の仮定より，

$$\|u\|_{m+j,G''} \le \gamma(C + \|u\|_{m,G}). \quad \square$$

補題 9.9 より，容易に強楕円型方程式に関する大域的正則性の定理を得ることができる。

定理 9.7 次の 3 条件を仮定する：

(i) ある j $(1 \le j \le m)$ に対して，$B(\varphi, \psi)$ は G において右 j 級滑らかで，一様に強楕円型の Dirichlet 双 *1* 次形式。

(ii) $u \in H^m(G)$ で，任意の $\zeta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < R\})$ に対して，$\zeta u \in H_0^m(G)$.

(iii) $f \in L^2(G)$ で，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_{0,G}.$$

このとき，$u \in H^{m+j}(G')$ であり，

$$\|u\|_{m+j,G'} \le \gamma(\|f\|_{0,G} + \|u\|_{m,G}).$$

証明. 補題 9.9 の仮定 (iii) はすぐに導かれる。実際，

$$|B(\varphi, u)| \le |(\varphi, f)_{0,G}| \le \|f\|_{0,G}\|\varphi\|_{0,G} \le \|f\|_{0,G}\|\varphi\|_{m-j,G}$$

だからである。ゆえに，補題 9.9 が適用でき，定理 9.7 が証明できる。　$\square$

A　Lebesgue 積分の絶対連続性

ここでは，Lebesgue 積分の絶対連続性をあげる。まず，定理を 2 つあげる。

定理 A.1 $f(x)$ を $\mathbf{R}^n$ の部分集合 E 上で Lebesgue 積分可能な関数とする。このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\int_E f(x)\,dx - \int_E f_\varepsilon(x)\,dx\right| \le \int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$$

となるようなある有界集合の外では恒等的に 0 となる $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 f_ε が存在する。

証明. 最初の不等式は明らか。もし，$-\infty \le f(x) \le \infty$ ならば，

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおいて，

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad (f_+(x) \ge 0, f_-(x) \ge 0)$$

となるので，$f \ge 0$ としてもよい。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & x \in E\left(\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}, \quad |x| < n\right), \\ 0 & x \in E(f \ge n) \cup E(|x| \ge n) \end{cases}$$

とすると，$\{f_n(x)\}$ は E 上の単関数列で，$f_n \uparrow f$ である。$f_n(x) \le f(x)$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\,dx - \int_E f_n(x)\,dx\right) = 0.$$

よって，

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.1}$$

とする。この n を固定して，$S_n = \{x \mid |x| < n\}$ とおくと，

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \chi_{E_j}, \quad \alpha_j > 0, \quad E_j \subset S_n$$

と表される。ここで，各 E_j に対して，

$$F_j \subset E_j \subset G_j \subset S_n, \quad \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}$$

となるような閉集合 F_j と開集合 G_j が存在する。また，これに対して，

$$g_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in F_j, \\ 0 & x \in {G_j}^c \end{cases}$$

となる $\mathbf{R}^n$ 上で $0 \le g_j(x) \le 1$ なる連続関数 $g_j(x)$ が存在する。このとき，$x \notin G_j - F_j$ ならば $\chi_{E_j} = g_j$ だから，

$$\int_{E_j} |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\,dx \le \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}.$$

よって，$f_\varepsilon(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x)$ とすると，f_ε は $\mathbf{R}^n$ で連続で，$x \notin S_n$ ならば $f_\varepsilon(x) = 0$ で，

$$\int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx \le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_E |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.2}$$

ゆえに，(A.1)，(A.2) より，

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx &\le \int_E |f(x)-f_n(x)|\,dx+\int_E |f_n(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

定理 A.2 (Lebesgue 積分の不変性) $f(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上 Lebesgue 可測関数で，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ をもつならば，任意の $y\in\mathbf{R}^n$ に対して $f(x+y)$，$f(-x)$ も x の関数として Lebesgue 可測で，

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n} f(-x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx.$$

証明. $f\ge 0$ の場合を示せばよい。
$f(x)=\displaystyle\sum_j a_j\chi_{E_j}(x)$：単関数の場合，$f(x+y)=\displaystyle\sum_j a_j\chi_{E_j-y}(x)$ だから，$f(x+y)$ は x の関数で，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,dx &= \sum_j a_j\mu(E_j-y) \\ &= \sum_j a_j\mu(E_j) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

一般の $f(x)$ の場合，$f(x)$ に近づく単関数 $f_n(x)$ の単調増加列をとれば，$f_n(x+y)$ も単関数の単調増加列で，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x+y)=f(x+y).$$

よって，$f(x+y)$ は x の可測関数で，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_n(x+y)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_n(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

$f(-x)$ についても同様の議論で示せる。 $\square$

次の定理は Lebesgue 積分の絶対連続性をいっている：

定理 A.3 (Lebesgue 積分の絶対連続性) $f(x)$ が $\mathbf{R}^n$ 上で Lebesgue 積分可能ならば，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{\mathbf{R}^n} |f(x+y)-f(x)|\,dx=0.$$

証明. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，前の 2 つの定理から，

$$\text{(A.3)}\qquad \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+y)-f_\varepsilon(x+y)|\,dx=\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx<\varepsilon,\quad \forall y\in\mathbf{R}^n$$

となるある有界集合の外で恒等的に 0 となる連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する。$S_n=\{x\mid |x|<n\}$ とすると，f_ε に関係して n を十分大きくとり，$|y|<1$ であれば，

$$\text{(A.4)}\qquad \{x\mid f_\varepsilon(x+y)\neq 0\}\subset S_n$$

とできる。$f_\varepsilon(x)$ は有界閉集合 $\overline{S_n}$ で連続である。したがって，一様連続だから，

$$\lim_{|y|\to 0}\left\{\sup_{x\in S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\right\}=0.$$

よって，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\,dx\le\lim_{|y|\to 0}\left\{\sup_{x\in S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\right\}\mu(S_n)=0. \tag{A.5}$$

ところが，(A.3)，(A.4) より，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx &\le \int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f_\varepsilon(x+y)|\,dx+\int_{\mathbf{R}^n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\,dx\\ &\quad+\int_{\mathbf{R}^n}|f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx\\ &< \varepsilon+\int_{\mathbf{R}^n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\,dx+\varepsilon.\end{aligned}$$

両辺 $\overline{\lim\limits_{|y|\to 0}}$ をとると，(A.5) より，

$$\overline{\lim_{|y|\to 0}}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx<2\varepsilon.$$

ゆえに，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx=0.\quad\square$$

参考文献

[1] S. Agmon: Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[2] G. B. Folland: Introduction to partial differential equations, second edition, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order, 1998 edition, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1998.

[4] K. Taira: Semigroups, boundary value problems and Markov processes, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 2004.

[5] 井川満: 偏微分方程式論入門, 裳華房, 1996.

[6] 伊藤清三: ルベーグ積分入門, 裳華房, 1996.

[7] 黒田成俊: 関数解析, 共立出版, 1980.

[8] 増田久弥: 関数解析, 裳華房, 1994.

[9] 溝畑茂: 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.

あとがき

Robin 問題の場合も Dirichlet 問題、Neumann 問題の場合と同様に解くことができる。また、非線形問題に対応するために、Hilbert 空間 $H^m(\Omega)$ から，Banach 空間 $W^{m,p}(\Omega)$ への発展などがある。