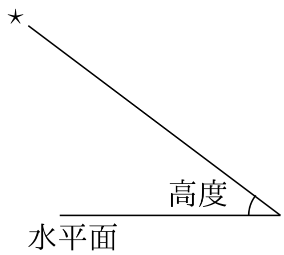
微積分学講義ノート（第 1 回）

2014 年 4 月 14 日

1

古代ギリシアの話から始めよう. 古代ギリシアでは幾何学がとても盛んで, 三角形や四角形, 円といった図形の性質を考察していた. その際, 点と点は直線で結べるとか, ある直線にはその直線上にない点を通る平行線が 1 本だけ引けるなどの公理を設定し, それに則って議論が進められていく. たとえば当時の数学者でピタゴラスは有名だ. ピタゴラスの定理は, ピタゴラスが初めて公理の上で証明をしたので, その名が付いている（実はこの定理自体は, 遥か昔, 紀元前 2000 年頃メソポタミアで既に知られており, 測量に使われていた）.

紀元前 5 世紀の初頭には, 古代ギリシアでは地球が丸いということが知られていた. 紀元前 8 世紀半ば 〜 紀元前 6 世紀半ば, 彼らはニース, マルセイユ, ナポリ, イスタンブール, ヤルタ[1] など地中海世界のあちこちに植民市を築いた. その中で, 当時は方角の目印として, 北極星が重要で, これだけ行動範囲が広がると自然に北極星の高度が場所によって異なることに気が付いた.

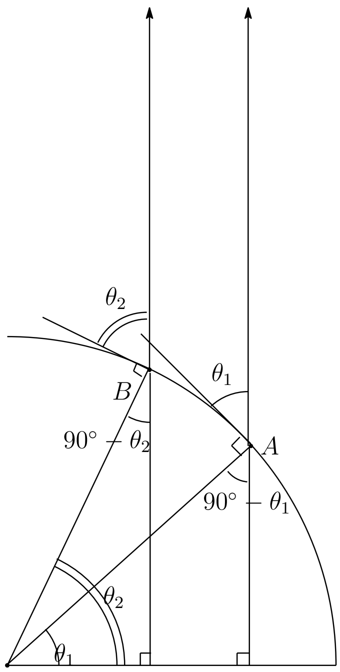


詳しく言うと,

- 東西方向の移動では高度に変化はない
- 南北方向の移動では北に行くほど高度が大きくなっている
- 北方向の移動距離に比例して高度が大きくなっている

ということがわかった. その延長線上に, 以下で見るように地球の半径を求めたのが紀元前 3 世紀のエラトステネス（アルキメデスの友人として有名）である.

[1]クリミア半島に位置し戦後のヨーロッパ秩序についてチャーチルやスターリンらが話し合ったヤルタ会談で有名.



図のように, 点 A, B での北極星の高度をそれぞれ θ_1, θ_2 とする. 水平面とはその点での接平面である. 異なる地点での北極星を見あげた視線は北極星で交わるのであるが, 北極星は大変遠方にあるので, これらの視線は平行であるとしてよい. 高度の差 $\theta_2 - \theta_1$ が中心角の差に現れる. 北方向の移動距離（円弧の長さ） d_{BA} は $\theta_2 - \theta_1$ に比例するので,

$$\frac{d_{BA}}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{2\pi R}{360^\circ}$$

により, 実際に地球の半径 R が求められる. 驚くべきことに, エラトステネスによる測定結果は, 現在知られている値との誤差が 1 % 以内である.

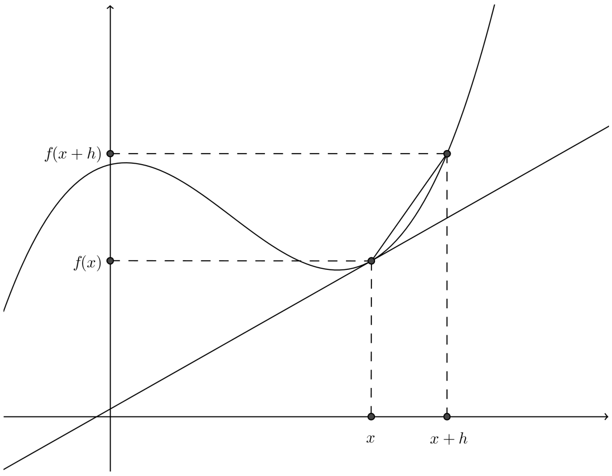
2

近代の話に移ろう. ニュートンを取り上げる. 力学の法則や万有引力の発見でよく知られているが, 微積分学の発展にも大きく貢献した人物である. 古代では静的なものを相手にしていたのに対し, 近代になると動的なものを扱うようになり, 微積分学が大きく発展する.

高校では, 極限を勉強した後で微分を学んだ. 区間の平均変化率の極限をとって, $(x, f(x))$ における微分係数を

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と定義した. h を 0 に近づけると, 接線と曲線 $y = f(x)$ は近づいていく. その近づく先が極限値である（しかし, 一般には接線と曲線は一致しない）.



これは, ニュートンよりだいぶ後の 19 世紀以降の考え方で, ニュートンの考え方とは違う. ニュートンは, h が十分に小さければ, 接線と曲線 $y = f(x)$ は一致すると考えた. 十分に小さいとは, どのくらいかというと, $h^2 = 0$ となるくらい小さければよい. ここで, $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ ではないかと思うかもしれないが, こういう h がいっぱいあるように見える世界でニュートンやオイラー達は微積分をやっていたのである.

この講義ではニュートンに代表される 17 世紀や 18 世紀の数学者達の立場, $h^2 = 0$ となるくらい小さい h がいっぱいあるような考え方のもと微積分学を学んでいく.