数学の先生は黒板が大好き、チョークが好き、
ホワイトボード嫌い ー。

No. 1
Date '10・7・9

微分学のRenaissance　西村泰一先生

元祖 Newton … 力学の元祖でもある。17c. ——→ 今のロケット技術
どうして力学と微分の元祖に？

cf: Leibniz
↕ ケンカ
Newton
↳ 性格悪い
ネチネチ

i) Newton 以前の人々 … 天上と地上とは別の法則

- 天上 … 月、太陽　聖
- 地上　動力因　俗
  - └ アリストテレスなど

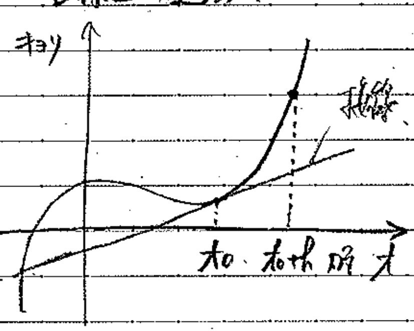
ティコ＝ブラーエ、ケプラー、ガリレオ
　└ 3法則

昔の人 … 円に魅かれる … 対称性

古代ギリシア
・Euclid 幾何 … 静的
↕
Newton … 動的なものを扱いたい
→ "瞬間の速さ" を求めたい ——— "平均の速さ" は簡単
→ 微分

ii) Newton
・曲線上の運動

☆ 2通りのとらえ方
① 極限 ⇒ 微分　19c
② Newton, Leibniz



現行の高校教育
|
← 19c になってできた考え
↓
17c と 19c の間は？

18c
Euler, Lagrange
Laplace

① 極限 ⇒ 微分

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

経過時間 h に対する平均の速さ　　f の t_0 における微分係数

h を 0 に近づけると

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled × 36 lines

No.

Date

2. Newton, Leibniz の考え

hが十分小さければ、$x=f(x)$は接線に一致する。 ／ "十分"…どのくらい？

└→ $h^2=0$ となるくらい小さい。

"$h^2=0$" じゃないのか？ ←― 昔の人々には、いっぱいあるように見えた。 ／ カッパ

$D=\{d\in\mathbb{R} \mid d^2=0\} \neq \{0\}$ と考えた。 ／ 今は$\{0\}$のみ

$\forall d\in\mathbb{R}$; $f(x_0+d)-f(x_0)=d\cdot a$ （$a\in\mathbb{R}$） ／ 今は$a=0$

となるような $a\in\mathbb{R}$ が唯一個定まる

しかし、当然反発する人も。 "無限小"という。 ／ ロック → バークレー → ヒューム

バークレー：$h^2=0$となるhは0のみではないのか

→ 微分とはいいかげんなものだ

→ 力学なんていらん!!（＝勉強すんのメンドくさい）

保守的

Newtonたちは無視。

なぜ19cに1の考えが出たのか？

19cとはどういう時代か？

19c. 産業革命　それまで手で作っていた ／ ①②の差異は？

→ 工場での大量生産

→ 技術者が多く必要になる

└ 物理、数学の基礎的素養のある人

→ 数学者の数が爆発的に増える。

→ 玉石混交（優秀な人もダメな人も） manualが必要。

└→ ①の誕生

それまでは少なかった。ごく一部の変わり者 みんな天才

18c末 フランス革命

19c以前の数学者の生活

→ 貴族に仕える。"好きなことやってていいぞ" patron

→ 貴族のジマン。

19c以後

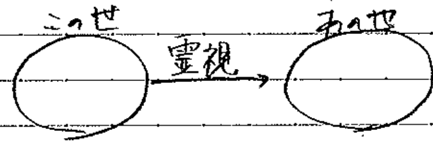
→ 大学に所属 学生に教える

→ 技術者の育成

No.
Date

20c 半ば　数学的にあの世を作る…？

$h^2=0$ となる数　{ この世 … $h=0$ だけ ／ あの世 … hはいっぱいある。



"霊視"って何…？

メンデル（19c）…みんなから無視された。「いずれ私の時代がくる」
メンデルの法則　→死後に認められる
cf: メンデレーエフ19c（周期表），ボルツマン
→「霊視」ができた天才たち。

「存在」を見せられなかった。
20c. 顕微鏡の発達
→見られるようになった。

iii) ①と②の違い

$(f+g)' = f'+g'$

$(fg)' = f'g + fg'$ （Leibnizの公式）

Prf.)
$$\frac{\{f(x_0+h)+g(x_0+h)\}-\{f(x_0)+g(x_0)\}}{h}$$
$$=\frac{\{f(x_0+h)-f(x_0)\}+\{g(x_0+h)-g(x_0)\}}{h}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$
$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'+g'$$

高校で習う証明
$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)\boxed{-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)}-f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$=g(x_0+h)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$
$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'g+fg'$$

しかし
Leibnizはこう証明していない

No.

Date

Leibniz の証明

$f(x_0+d)-f(x_0)=df'(x_0)\quad (\forall d\in D)$

$f(x_0+d)=f(x_0)+df'(x_0)$

$g(x_0+d)=g(x_0)+dg'(x_0)$

単に展開しただけ
↓
ただのオジサン

$f(x_0+d)g(x_0+d)-f(x_0)g(x_0)$

$=\{f(x_0)+df'(x_0)\}\{g(x_0)+dg'(x_0)\}-f(x_0)g(x_0)$

$=f(x_0)g(x_0)+d(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))$
$\quad +d^2f'(x_0)g'(x_0)-f(x_0)g(x_0)$

$d^2=0$

$=d(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))$

17c, 18c の方法の方が簡単

cf: ε-δ
メンドくさい

$D_1=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$

$\left.\begin{array}{l} d\in D \\ \alpha\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\ (\alpha d)^2=\alpha^2 d^2=0 \Rightarrow \alpha d\in D$

$d_1, d_2\in D$

$(d_1+d_2)^2=d_1^2+d_2^2+2d_1d_2$
$=2d_1d_2$

かけ算について閉じ、
たし算は閉じていない

1次の無限小 $D_1=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$

2次の 〃 $D_2=\{d\in\mathbb{R}\mid d^3=0\}$

3次の 〃 $D_3=\{d\in\mathbb{R}\mid d^4=0\}$

n次の 〃 $D_n=\{d\in\mathbb{R}\mid d^{n+1}=0\}$

$D_1\subseteq D_2\subseteq D_3\subseteq\cdots\subseteq D_n\subseteq D_{n+1}\subseteq\cdots$

$(d_1+d_2)^3=0\ \subseteq D_2$

一般に、$d_1\in D_k,\ d_2\in D_l \Rightarrow d_1+d_2\in D_{k+l}$

$(d_1+d_2)^{k+l+1}=0$

(∵ 二項定理)

て、$d_1, d_2, \cdots, d_n\in D_1$

$\Rightarrow d_1+d_2+\cdots+d_n\in D_n$

No.
Date

$$D \times D \times \cdots \times D \longrightarrow D_n$$
$$(d_1, \cdots, d_n) \longrightarrow d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$ 全射
$$d_1, d_2 \in D$$

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d$$
$$f(x+\underbrace{(d_1+d_2)}_{\delta}) = f(x+d_1) + f'(x+d_1)d_2$$
$$= f(x) + f'(x)d_1 + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2$$
$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2$$
$$d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$$ なので
$$= f(x) + f'(x)\underbrace{(d_1+d_2)}_{\delta} + \frac{1}{2}f''(x)\underbrace{(d_1+d_2)^2}_{\delta^2}$$

$$f(x+d_1+d_2+d_3)$$
$$= f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2)d_3$$
$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2$$
$$+ \{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x)d_1d_2\}d_3$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3)$$
$$+ f''(x)(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)$$
$$+ f'''(x)d_1d_2d_3$$

d_1, d_2, d_3 に関する一次の対称式

$$d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}$$
$$d_1d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3!}$$
$$\delta = d_1+d_2+d_3$$

$$= f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2}f''(x)\delta^2 + \frac{1}{3}f'''(x)\delta^3$$

$\delta \in D_n$
$$f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2}f''(x)\delta^2 + \cdots + \frac{1}{n}f^{(n)}(x)\delta^n$$

Taylor展開

No.

Date

$\sigma^1_k(X_1, \ldots, X_k) = X_1 + \cdots + X_k$

$\sigma^2_k(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i \neq j} X_i X_j$

$\sigma^k_k(X_1, \ldots, X_k) = X_1 \cdots X_k$

$\sigma^n_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sigma^n_k(X_1, \ldots, X_k) + X_{k+1}\sigma^{n-1}_k(X_1, \ldots, X_k)$

命題：$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $d_1, \ldots, d_k \in D$

$f(x+d_1+\cdots+d_k) = \sum_{n=0} f^{(n)}(x)\sigma^n_k(d_1, d_2, \ldots, d_k)$

Prf.) kに関するMIで示す.

IB) $k=1$の場合は immediate

IS) $f(x+d_1+\cdots+d_k+d_{k+1}) = f(x+d_1+\cdots+d_k) + d_{k+1}f'(x+d_1+\cdots+d_k)$

fとf'にinductionの仮定を用いて.

$$f(x+d_1+\cdots+d_{k+1}) = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x)\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k) + d_{k+1}\sum_{n=0}^{k} f^{(n+1)}(x)\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{k+1} f^{(n)}(x)\left(\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k) + d_{k+1}\sigma^{n-1}_k(d_1, \ldots, d_k)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{k+1} f^{(n)}(x)\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k, d_{k+1})$$

Lemma: $(d_1+\cdots+d_k)^n = n!\,\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k)$

Prf:) By induction on k $d_{k+1}^2 = 0$

$(d_1+\cdots+d_k+d_{k+1})^n = (d_1+\cdots+d_k)^n + n d_{k+1}(d_1+\cdots+d_k)^{n-1}$

$n!\,\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k) + n d_{k+1}(n-1)!\,\sigma^{n-1}_k(d_1, \ldots, d_k)$

$= n!\left(\sigma^n_k(d_1, \ldots, d_k) + d_{k+1}\sigma^{n-1}_k(d_1, \ldots, d_k)\right)$

$= n!\,\sigma^n_{k+1}(d_1, \ldots, d_k, d_{k+1})$

No.
Date

無限小 …最近復活　微分幾何学
物理　(特殊/一般) 相対性理論 (時空)

20c.
一般相対性理論 アインシュタイン ← Riemann 19c.
back ground − independent
時空は「創られるもの」とした。 特殊相対性理論とくっつく
統一理論：失敗　時代は量子論へ → 場の量子論

宇宙論
昔…観測が原始的 (言いたい放題)

多様体 Riemann
ex. 地球、小さな平面が集まって、球面に
多様体を超える…？ ← 微分幾何学??

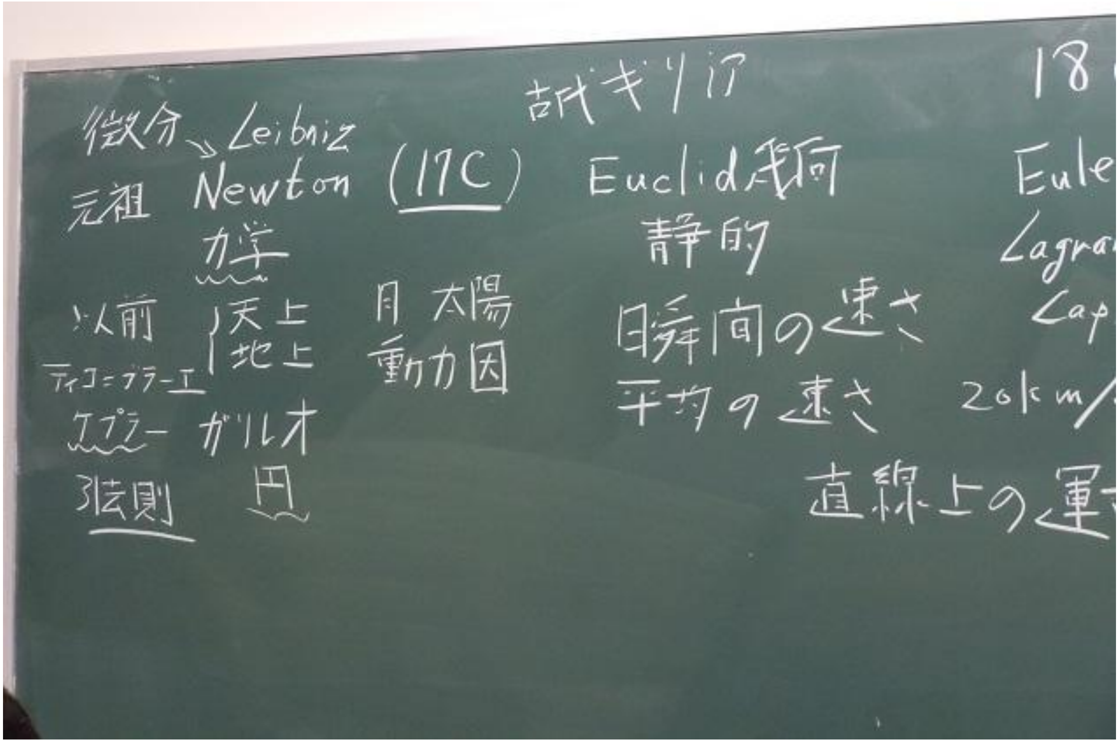
コーク 標準model 1980

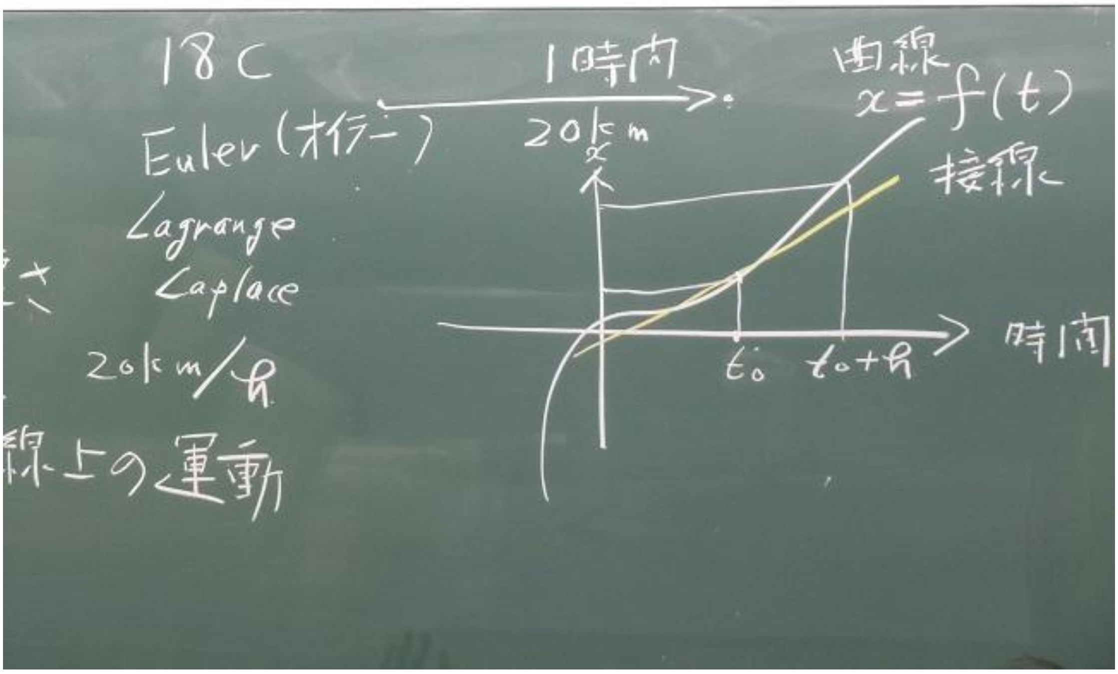
Newton
「時間と空間」という舞台
= 時空 (与えられている)

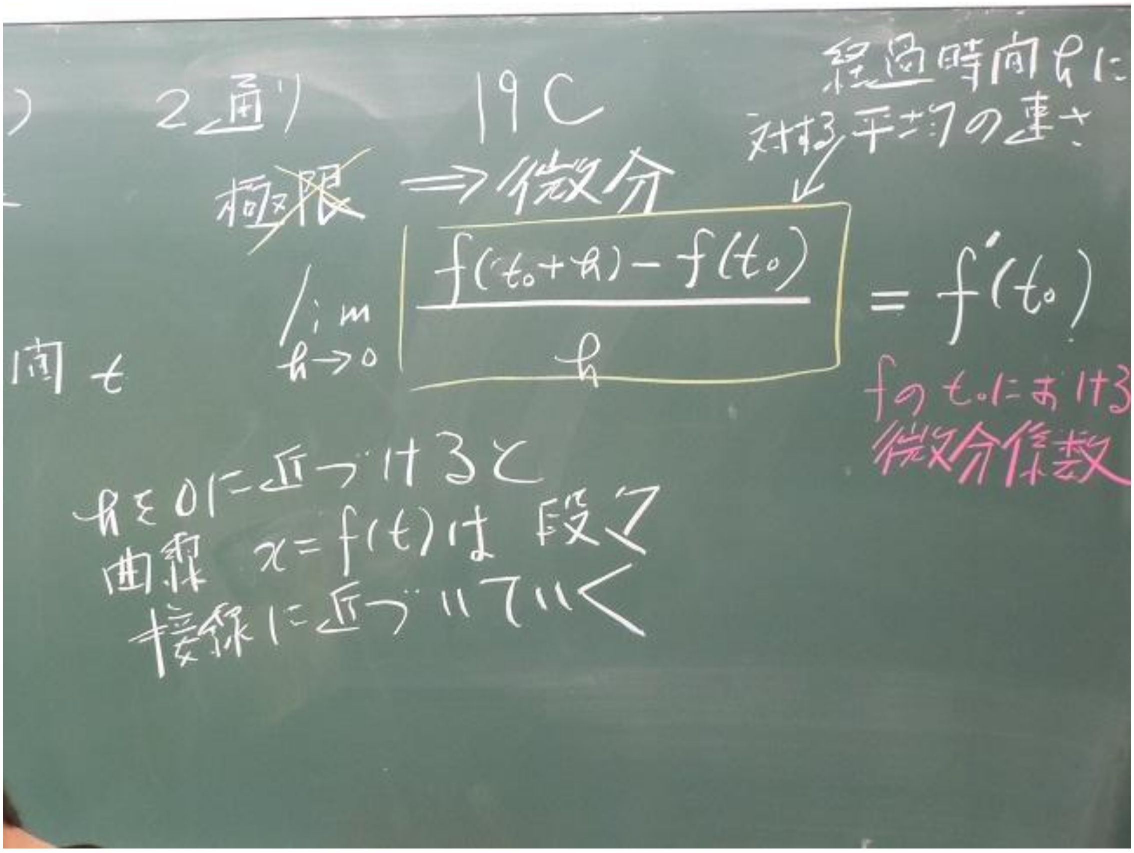
重力、電磁力、弱い力、強い力
小さいものを扱うとき、一般相と量子論は相性が悪い。

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

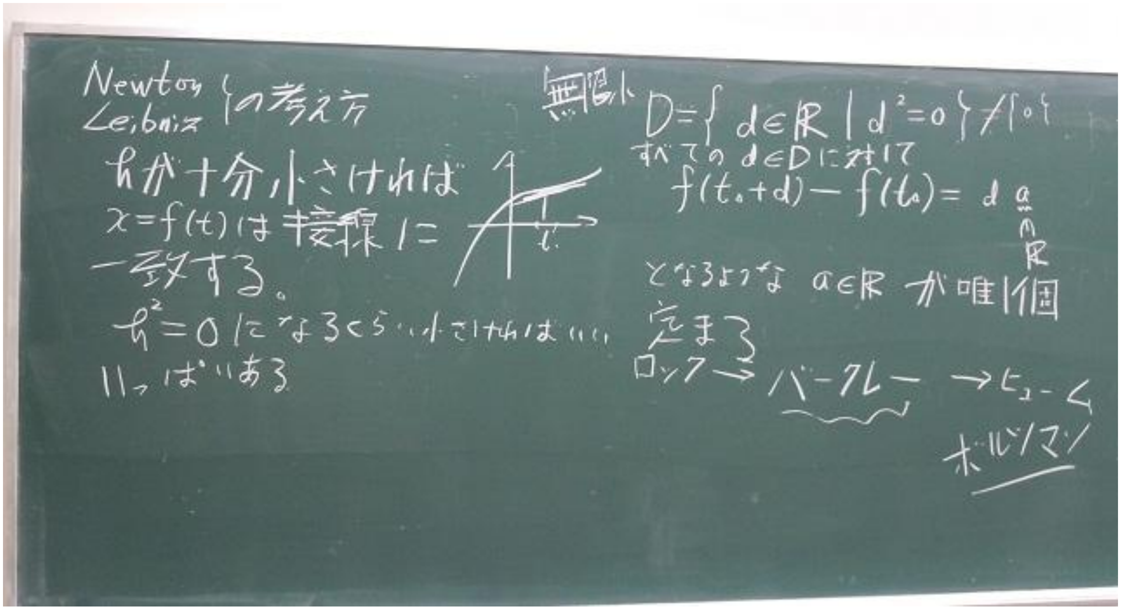
★No.1

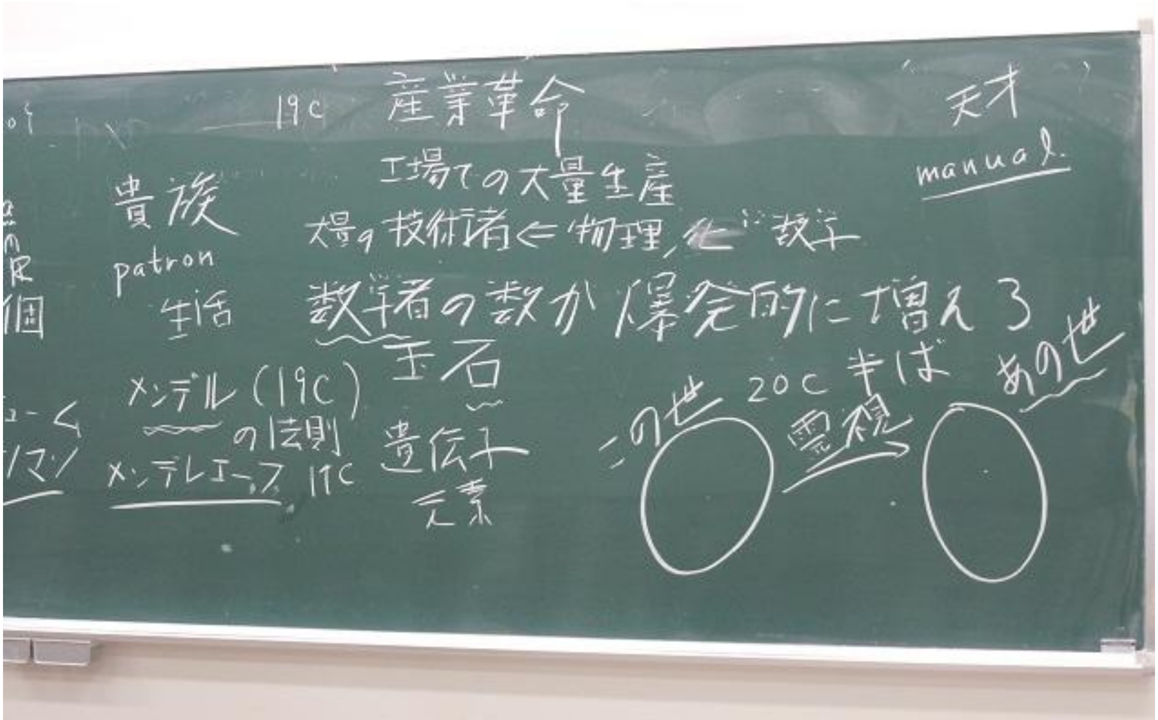

古代ギリシア
18
微分 Leibniz
元祖 Newton (17C)
Euclid幾何
Euler
力学
静的
Lagrange
以前 天上 地上
月 太陽
動力因
瞬間の速さ
平均の速さ
ティコ=ブラーエ
ケプラー ガリレオ
3法則 円
直線上の運動


18C
1時間
20km
曲線
x = f(t)
Euler (オイラー)
接線
Lagrange
Laplace
20km/h
線上の運動
t₀ t₀+h
時間

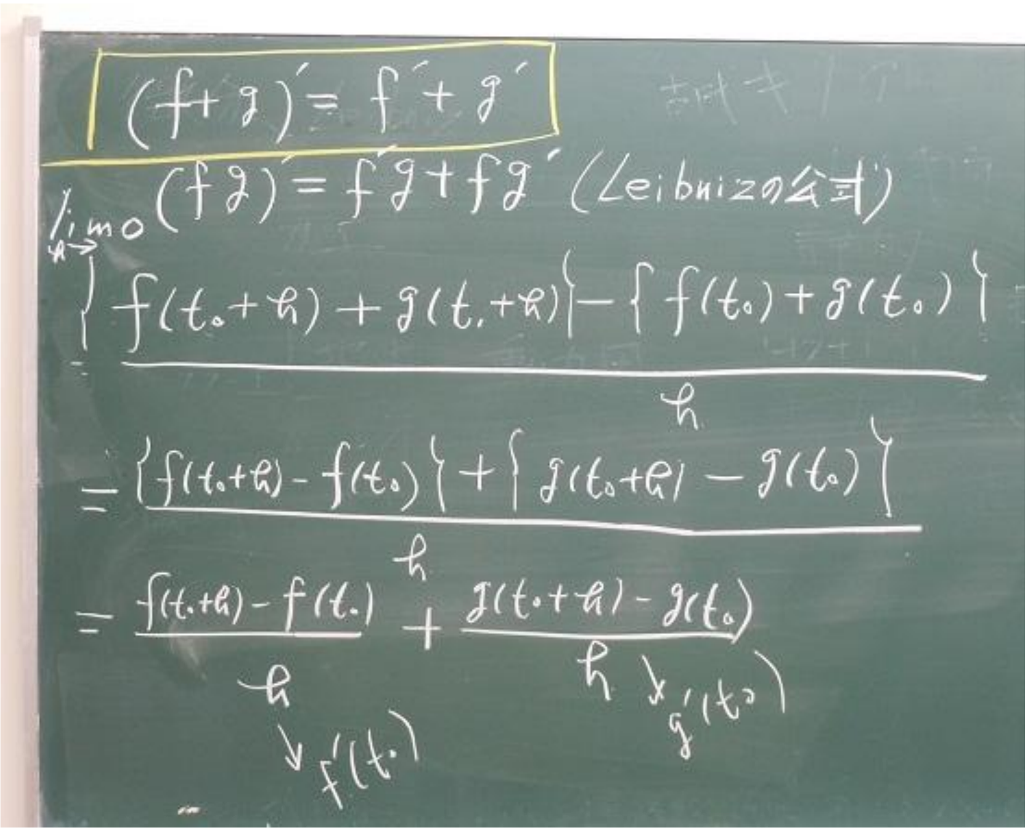

2通り
19C
経過時間hに対する平均の速さ
極限 ⇒ 微分
lim h→0 f(t0+h)−f(t0) / h = f'(t0)
fのt0における微分係数
hを0に近づけると
曲線 x=f(t)は 段々
接線に近づいていく

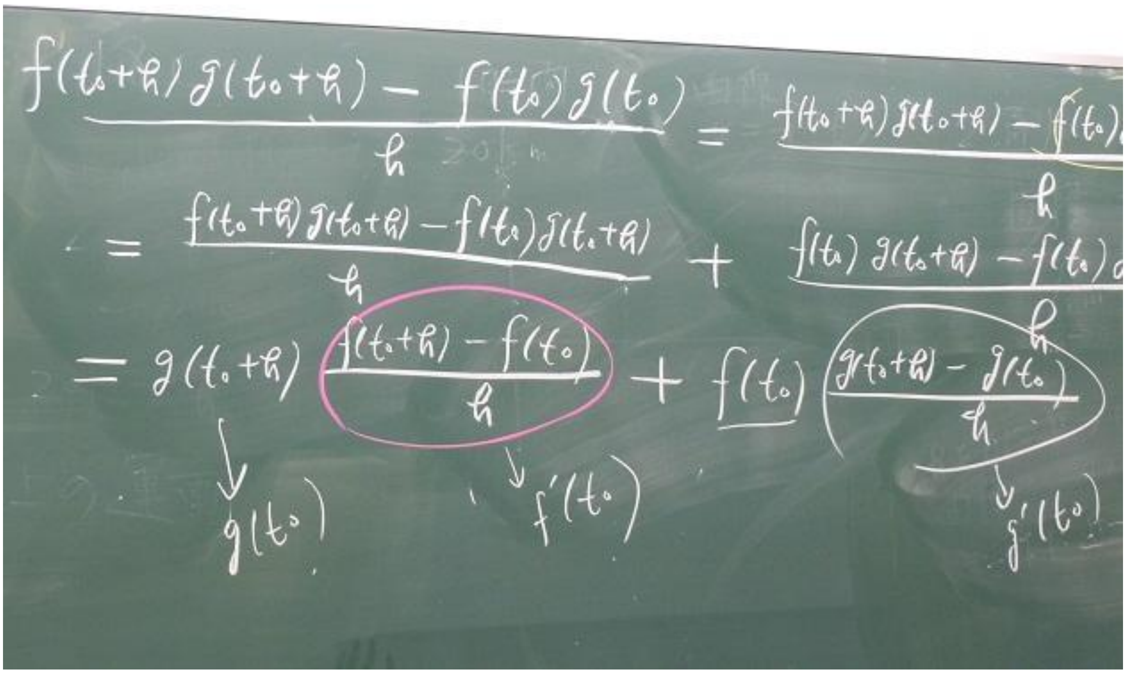
★No.2

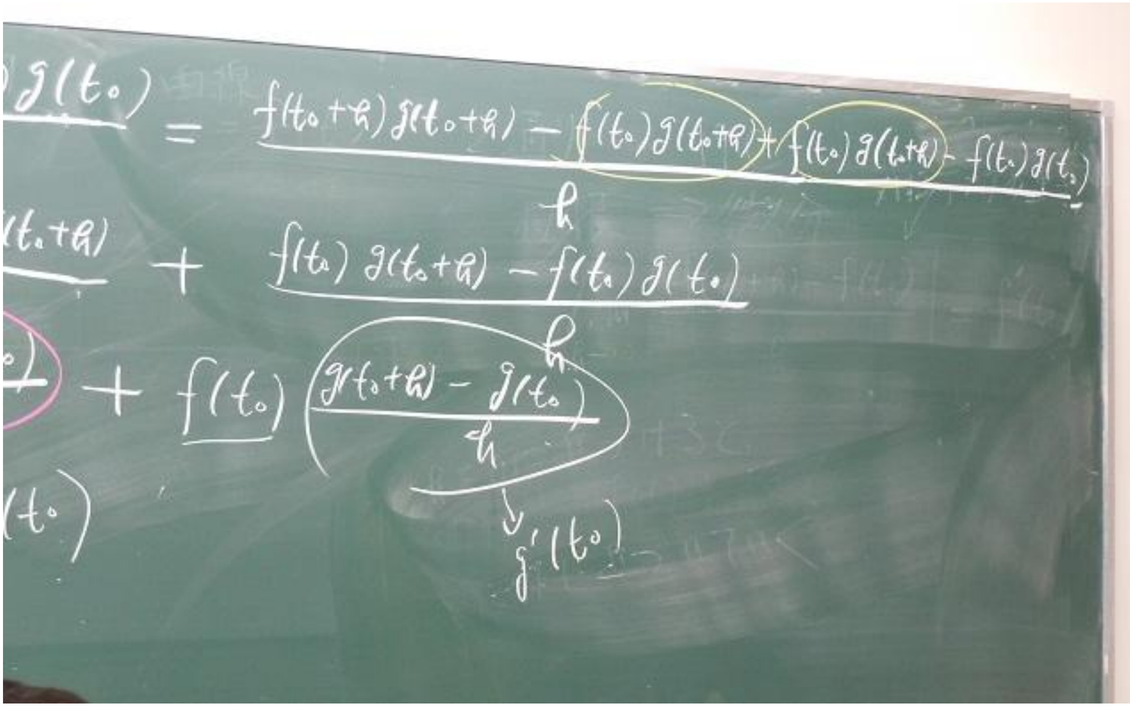

Newton
Leibniz の考え方
hが十分小さければ
x=f(t)は接線に
一致する。
h²=0になるくらい小さければいい
いっぱいある
無限小 D={d∈R | d²=0}≠{0}
すべてのd∈Dに対して
f(t0+d)−f(t0)= d a
となるような a∈R が唯1個
定まる
ロック→バークレー→ヒューム
ボルツマン


19C 産業革命
天才
manual
工場での大量生産
貴族
patron
生活
数学者の数が爆発的に増える
玉石
メンデル（19C）
の法則
遺伝子
元素
この世
20C半ば
あの世

★No.3

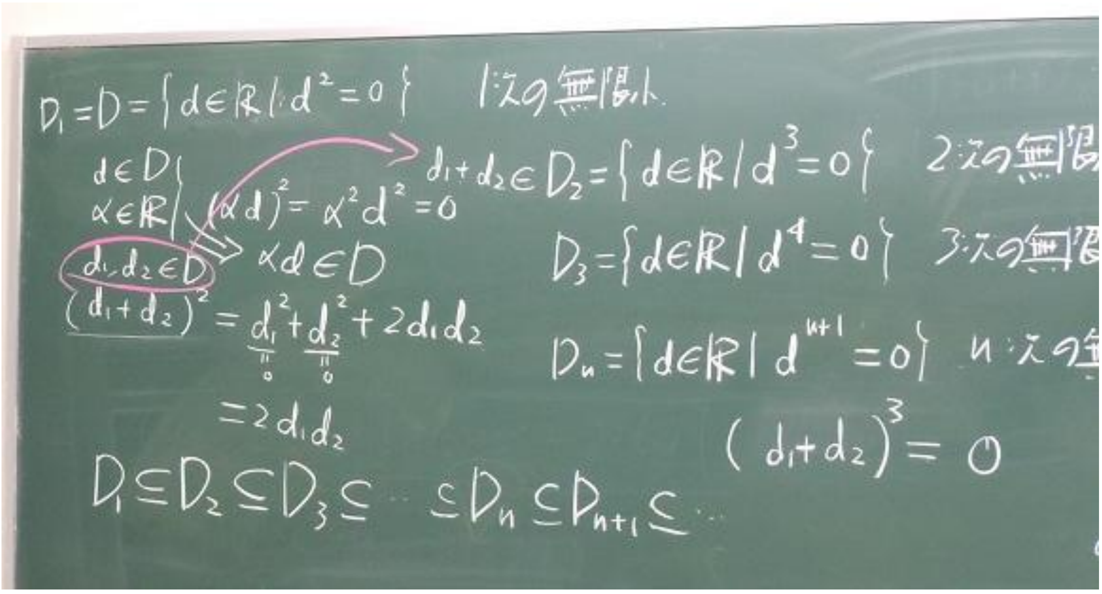

(f+g)′ = f′ + g′
(fg)′ = f′g + fg′ (Leibnizの公式)
lim h→0
{f(t₀+h) + g(t₀+h)} − {f(t₀) + g(t₀)} / h
= {f(t₀+h) − f(t₀)} + {g(t₀+h) − g(t₀)} / h
= f(t₀+h) − f(t₀) / h + g(t₀+h) − g(t₀) / h
f′(t₀)
g′(t₀)

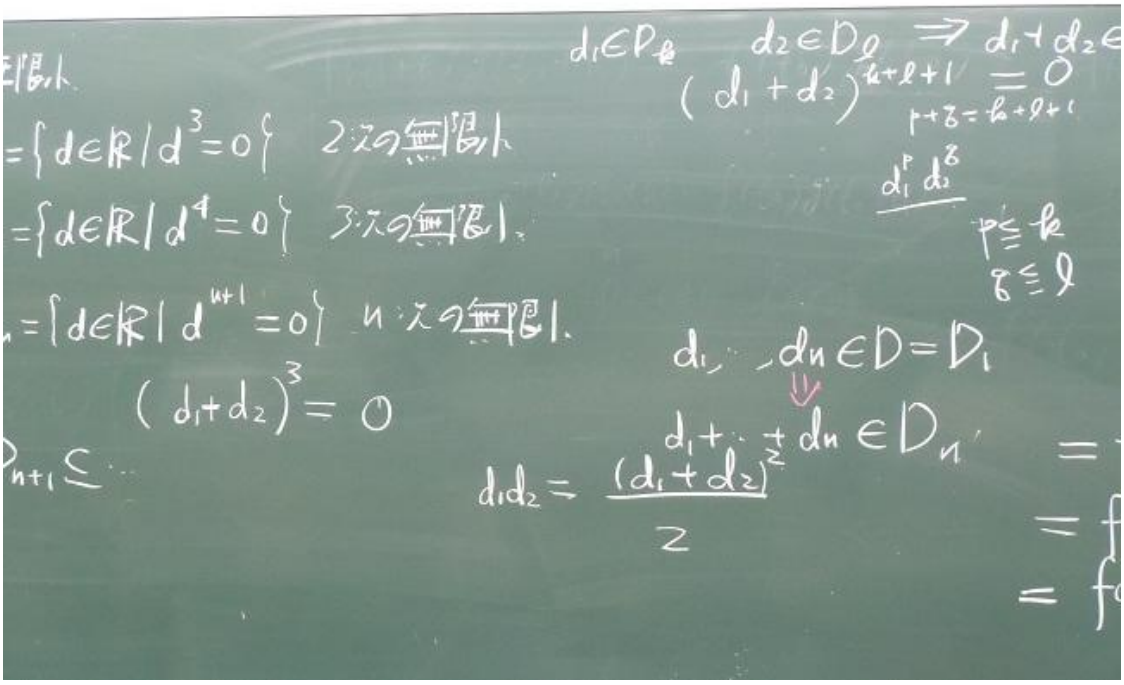




★NO.4　ライプニッツによる、(f g) '=f 'g + f g '　の証明（無限小を用いた式で展開）
写真を撮り忘れてしまいました。申し訳ありません。（松尾）

★NO.5


$D_1 = D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$ 1次の無限小
$d \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$ ⇒ $\alpha d \in D$
$d_1 + d_2 \in D_2 = \{d \in \mathbb{R} \mid d^3 = 0\}$ 2次の無限小
$d_1, d_2 \in D$
$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2$
$= 2d_1d_2$
$D_3 = \{d \in \mathbb{R} \mid d^4 = 0\}$ 3次の無限小
$D_n = \{d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0\}$ n次の無限小
$(d_1 + d_2)^3 = 0$
$D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \cdots \subseteq D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq \cdots$


$d_1 \in D_k$ $d_2 \in D_l$ ⇒ $d_1 + d_2 \in$
$(d_1 + d_2)^{k+l+1} = 0$
$p + q = k + l + 1$
$d_1^p d_2^q$
$p \leqq k$
$q \leqq l$
$d_1, \ldots, d_n \in D = D_1$
⇓
$d_1 + \cdots + d_n \in D_n$
$d_1 d_2 = \frac{(d_1 + d_2)^2}{2}$

$d_1 \in D_k \quad d_2 \in D_l \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_{k+l}$

$(d_1 + d_2)^{k+l+1} = 0$

$p + q = k + l + 1$

$d_1^p d_2^q$

$p \leq k$

$q \leq l$

$d_1, \cdots, d_n \in D = D_1$

$\Downarrow$

$d_1 + \cdots + d_n \in D_n$

$\dfrac{(d_1 + d_2)^2}{2}$

$D \times \cdots \times D \longrightarrow D_n$

$(d_1, \cdots, d_n) \to d_1 + \cdots + d_n$ 全射

$d_1, d_2 \in D$

f'

f''

$f(x + \underbrace{d}_{\delta}) = f(x) + f'(x)d$

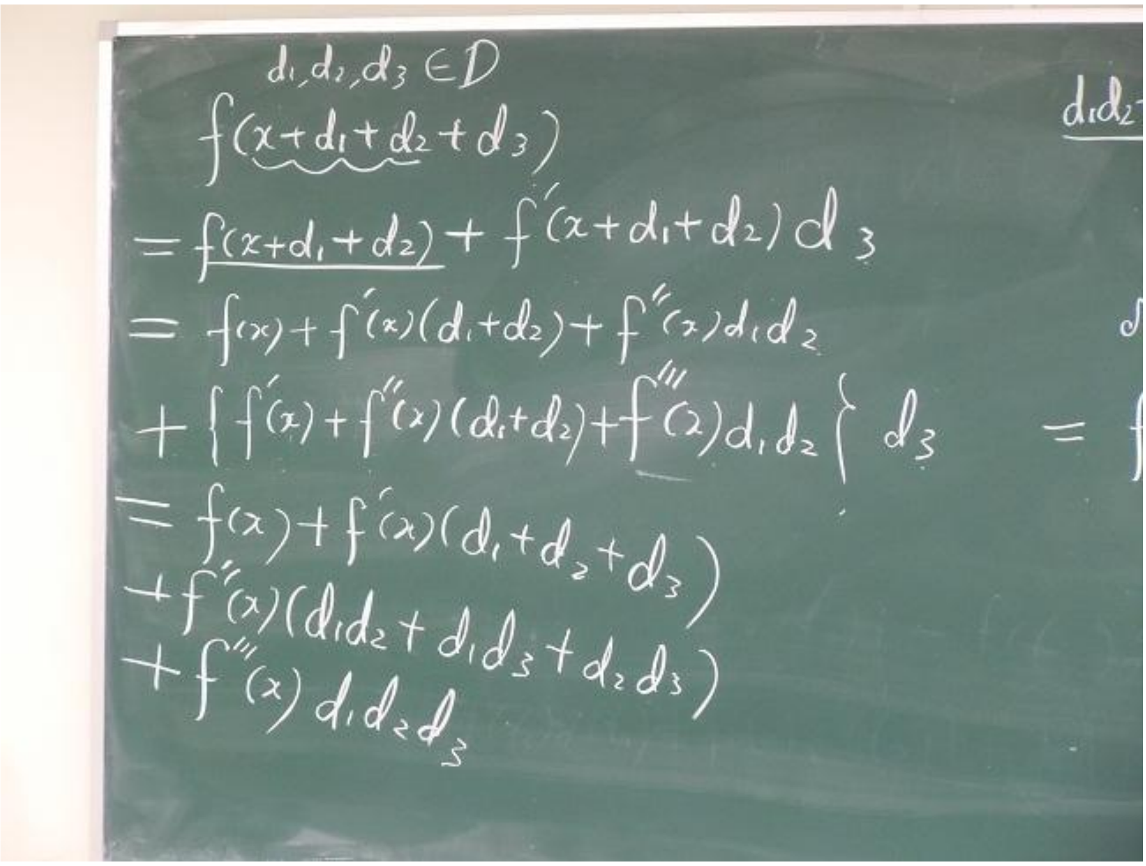
$f(x + d_1 + d_2) = f(x + d_1) + f'(x + d_1)d_2$

$= f(x) + f'(x)d_1 + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2$

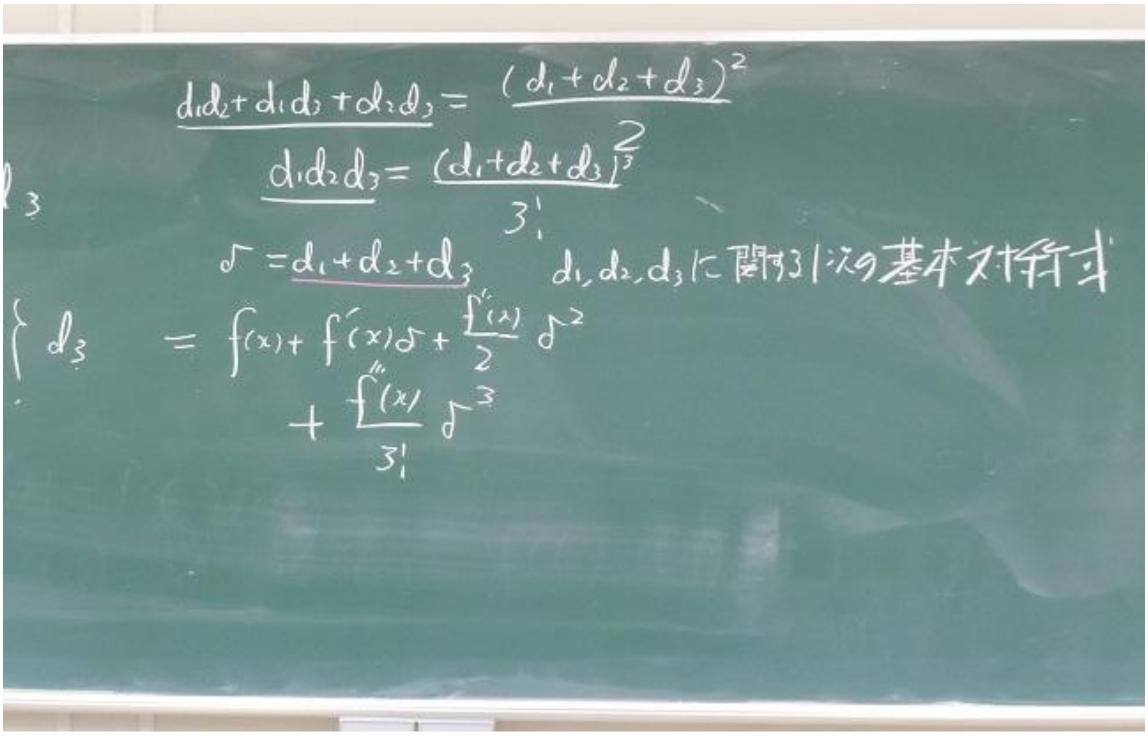
$= f(x) + f'(x)(d_1 + d_2) + f''(x)d_1 d_2$

$= f(x) + f'(x)\underbrace{(d_1 + d_2)}_{\delta} + \dfrac{1}{2}f''(x)\underbrace{(d_1 + d_2)^2}_{\delta^2}$

★NO.6

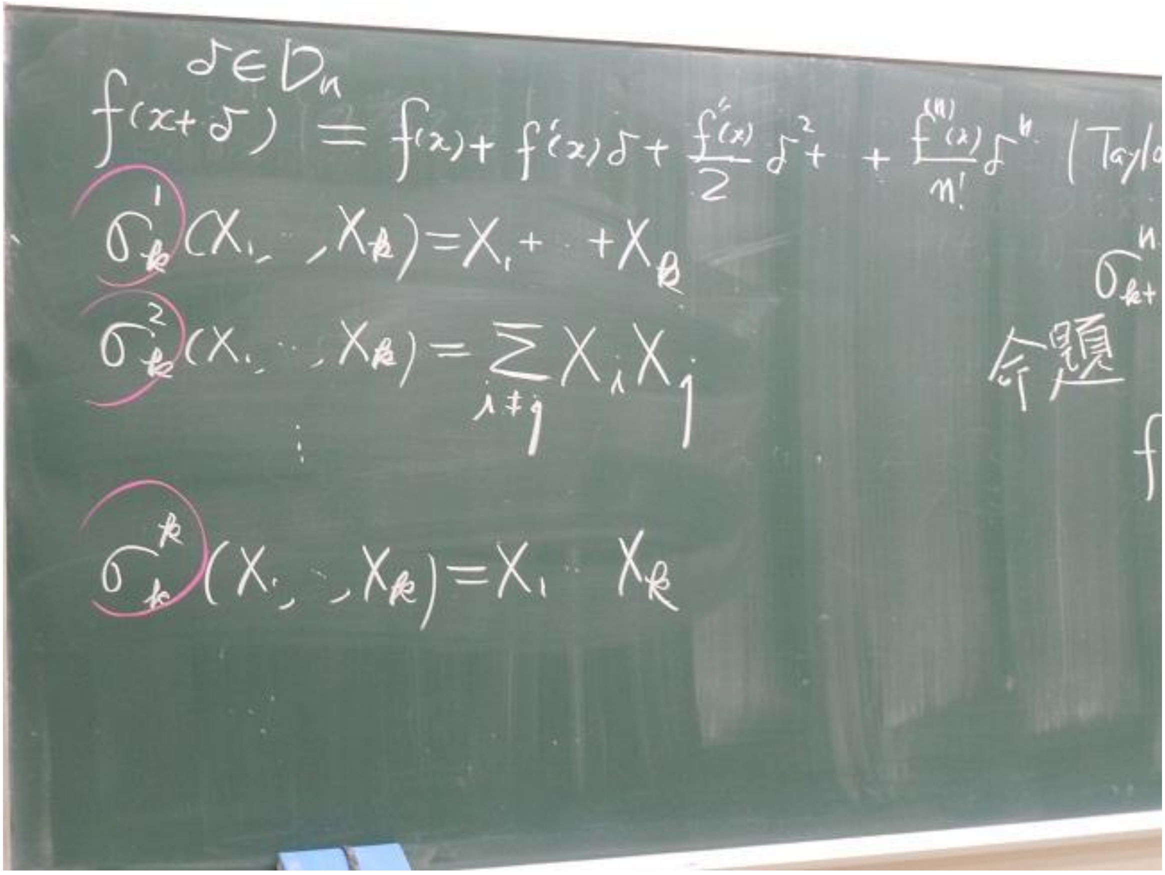


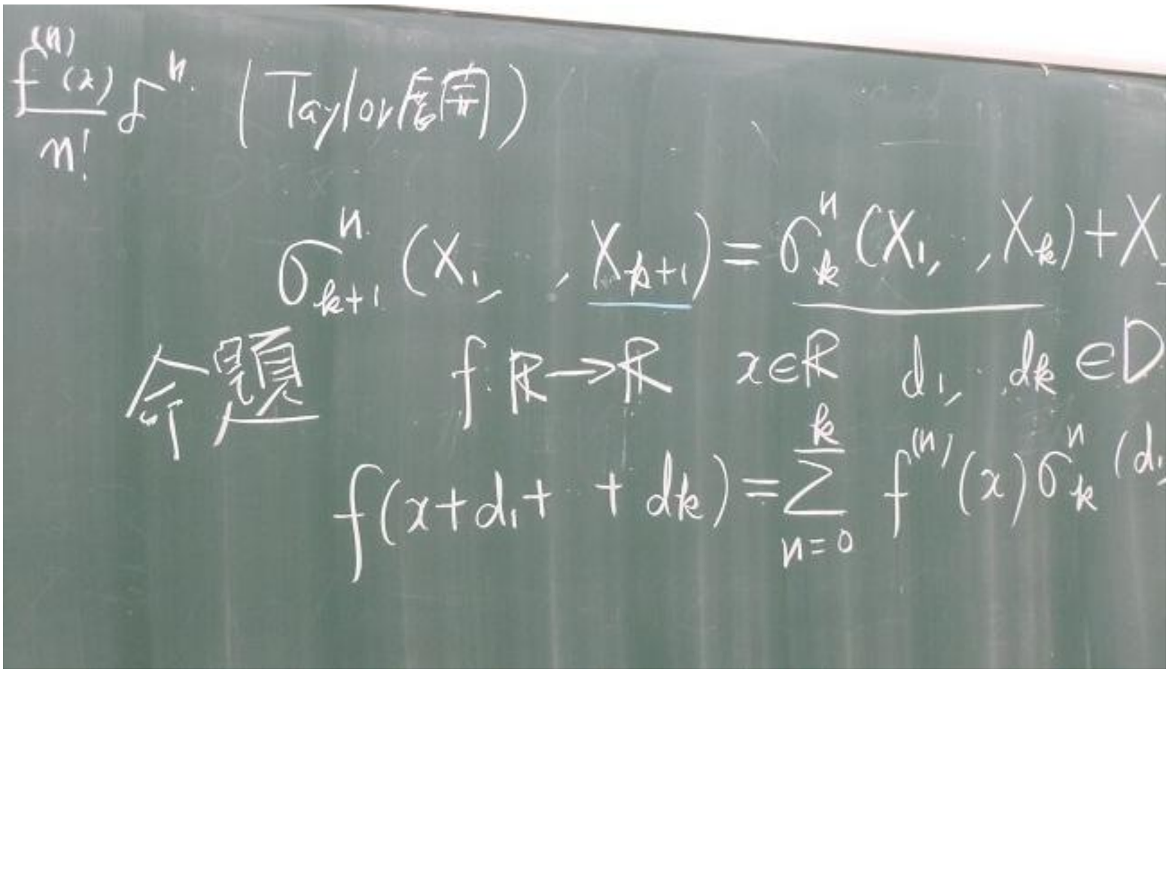
$d_1, d_2, d_3 \in D$
$f(x+d_1+d_2+d_3)$
$= f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2)d_3$
$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2$
$+ \{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x)d_1d_2\} d_3$
$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3)$
$+ f''(x)(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)$
$+ f'''(x)d_1d_2d_3$



$d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}$
$d_1d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3!}$
$\delta = d_1+d_2+d_3$
d_1, d_2, d_3に関する1次の基本対称式
$= f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2$
$+ \frac{f'''(x)}{3!}\delta^3$

★NO.7


$\delta \in D_n$
$f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\delta^n$ (Taylo
$\sigma_k^1(X_1, \dots, X_k) = X_1 + \cdots + X_k$
$\sigma_k^2(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i \neq j} X_i X_j$
$\sigma_k^k(X_1, \dots, X_k) = X_1 \cdots X_k$
σ_{k+}^n
命題
f


$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\delta^n$ (Taylor展開)
$\sigma_{k+1}^n(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sigma_k^n(X_1, \dots, X_k) + X$
命題
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $d_1, \dots, d_k \in D$
$f(x + d_1 + \cdots + d_k) = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x)\sigma_k^n(d_1$

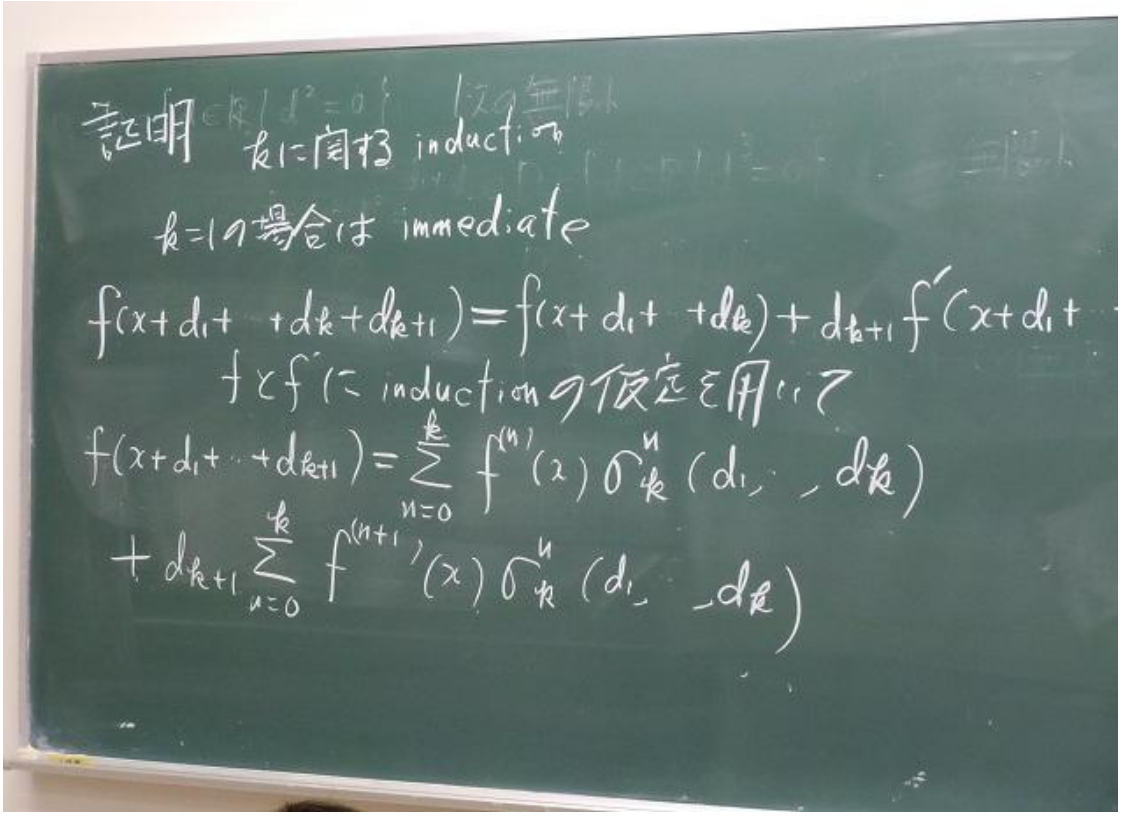
$)$

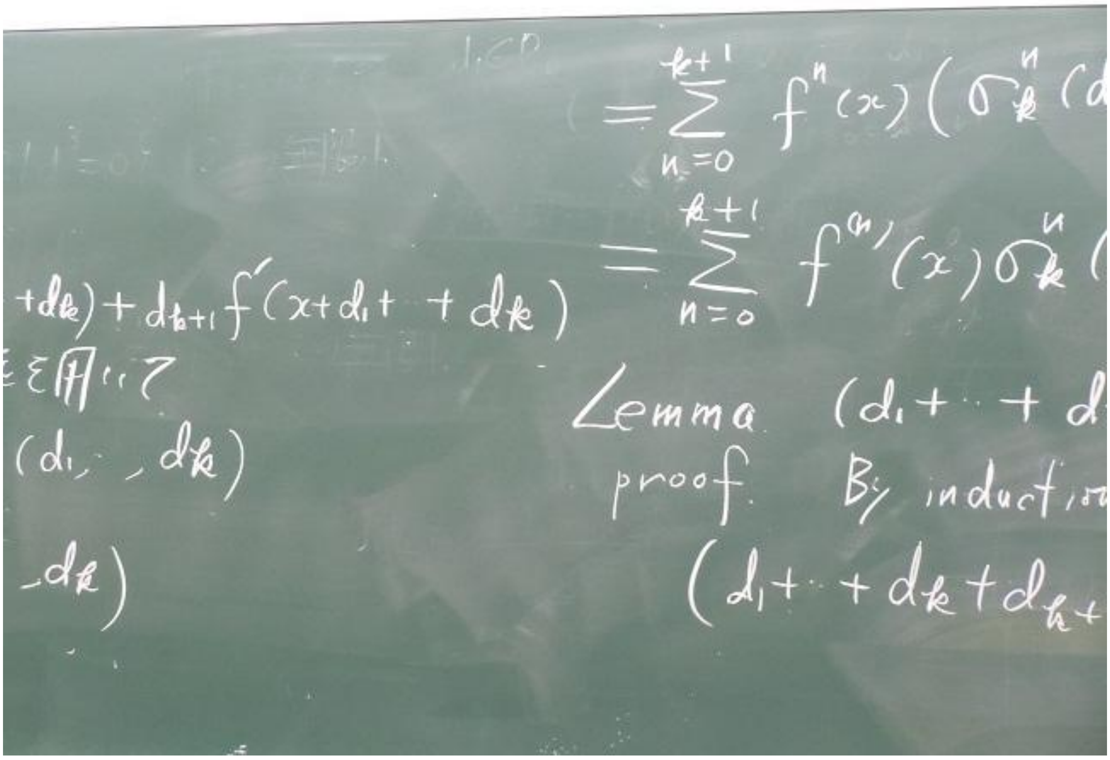
$, \underline{X_{k+1}}) = \underline{\sigma_k^n(X_1, \ , X_k)} + \underline{X_{k+1} \sigma_k^{n-1}}(X_1, \ , X_k)$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} \quad d_1, \ d_k \in D$

$d_1 + \ + d_k) = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x) \sigma_k^n(d_1, \ d_k)$

★NO.8


証明 kに関する induction
k=1の場合は immediate
f(x+d1+ +dk+dk+1)=f(x+d1+ +dk)+dk+1 f′(x+d1+
fとf′にinductionの仮定を用いて
f(x+d1+ +dk+1)=Σ_{n=0}^{k} f^(n)(x) σ_k^n (d1, , dk)
+dk+1 Σ_{n=0}^{k} f^(n+1)(x) σ_k^n (d1, , dk)


=Σ_{n=0}^{k+1} f^n(x)(σ_k^n(d
=Σ_{n=0}^{k+1} f^(n)(x)σ_k^n(
+dk)+dk+1 f′(x+d1+ +dk)
を用いて
(d1, , dk)
,dk)
Lemma (d1+ + d
proof By inductio
(d1+ + dk+dk+

$$\sum_{n=0}^{k+1} f^{n}(x)\left(\sigma_k^{n}(d_1,\dots,d_k) + d_{k+1}\,\sigma_k^{n-1}(d_1,\dots,d_k)\right)$$

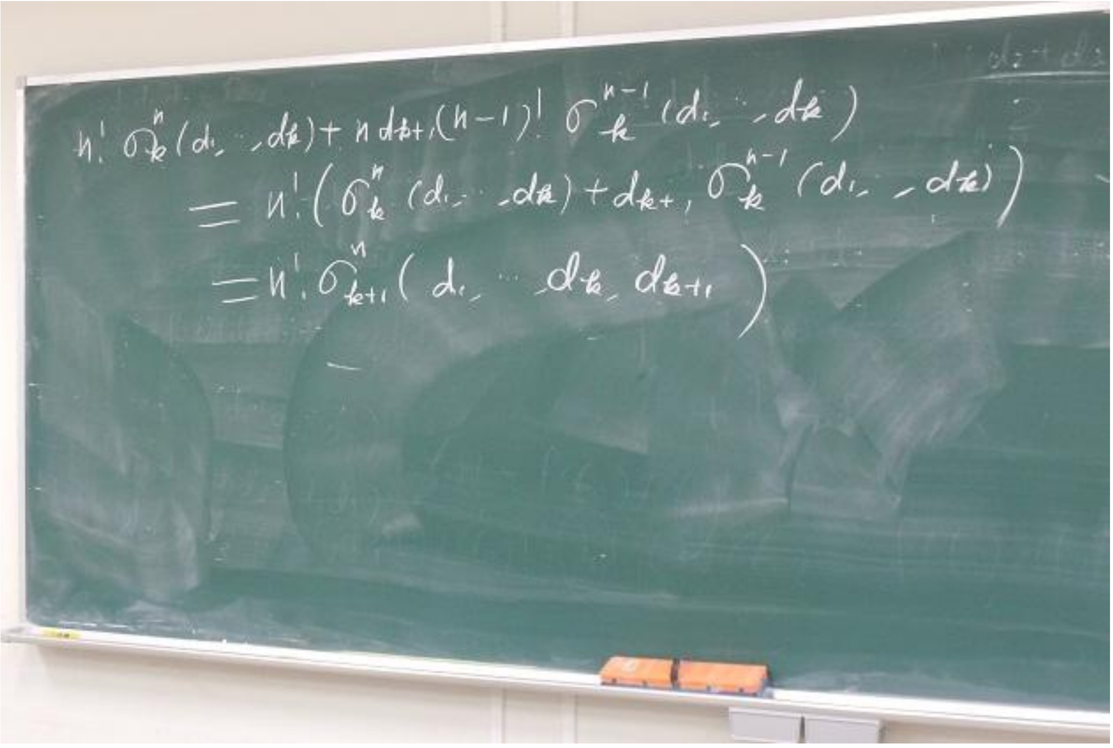
$$\sum_{n=0}^{k+1} f^{(n)}(x)\,\sigma_k^{n}(d_1,\dots,d_k,d_{k+1})$$

mma $(d_1+\cdots+d_k)^n = n!\,\sigma_k^{n}(d_1,\dots,d_k)$

roof. By induction on k. $d_{k+1}^2 = 0$

$$(d_1+\cdots+d_k+d_{k+1})^n = (d_1+\cdots+d_k)^n + n\,d_{k+1}(d_1+\cdots+d_k)^{n-1}$$

★NO.9



$n!\,\sigma_k^n(d_1,\dots,d_k) + n\,d_{k+1}(n-1)!\,\sigma_k^{n-1}(d_1,\dots,d_k)$
$= n!\left(\sigma_k^n(d_1,\dots,d_k) + d_{k+1}\,\sigma_k^{n-1}(d_1,\dots,d_k)\right)$
$= n!\,\sigma_{k+1}^n(d_1,\dots,d_k,d_{k+1})$


(f+g)' = f' + g'
(Leibnizの公式)
STANFORD