

「理科Ⅰ地学」と「選択物理」における
万有引力の取り扱いについて

筑波大学附属駒場中・高等学校

大道 明・高橋 宏和

「理科1地学」と「選択物理」における 万有引力の取扱いについて

筑波大学附属駒場高等学校 大道 明
高橋 宏和

はじめに

現在、万有引力に関する教材は理科1物理分野や地学分野、選択物理分野で取り扱われている。理科1物理分野では、万有引力は落下運動や放物運動を決める重力として、地学分野では地球の形状や公転、惑星の運動を決める要因として扱われている。選択物理分野では万有引力の法則が発見される経緯を説明したり、この法則やエネルギー保存の法則を用いて惑星や人工衛星の運動を説明するのに使われている。

今回の発表では、まず、理科1や選択物理の教科書で万有引力に関する教材がどのように扱われているかを概観し、つぎに、本校でこの教材をどのように扱っているかを示す。最後に、今後、物理分野と地学分野でこの教材に関して重複をさけるための検討課題を示す。

このレポートの§1、§2は物理分野で大道が担当し、§3、§4は地学分野で高橋が担当した。

§1. 「物理」の教科書にみる「万有引力」教材取り扱いの特徴

次の表は各社の教科書で万有引力教材がどのように取り扱われているかを示したものである。この表から教科書における取り扱いの特徴をまとめると次のようになる。

(1) 半数以上の教科書が以下の項目を取り扱っている。

* 惑星表とケプラーの法則。

* ケプラーの法則を用いて等速円運動する惑星に働く力が距離の逆自乗に比例することの説明。

* 万有引力の法則とキャベンディッシュの実験。

* 重力と万有引力の関係。

* 万有引力による位置エネルギー。

* 人工衛星の第1及び第2宇宙速度。

(2) 表を見てわかるように、ケプラー以前の惑星の運動のとらえ方にふれているのは一社のみで、それもコペルニクスによる公転周期並びに公転半径の測定値と、現代のそれとの比較に限定されており、その測定方法については触れていない。

(3) ケプラーの法則はどの教科書も取り上げているが、惑星の運動学的特徴を表す際には、軌道は楕円ではなく円を用いている。

(4) スプートニク以前と異なり、教材として人工衛星（第1及び第2宇宙速度、静止衛星等）に各社ともかなりのスペースをさいている。

項目	ケプラーの法則と惑星の表	地球のケプラー定数から人工衛星の周期を求める	法則を適用し $F_{oc} = 1/R^2$ を求める 等速円運動する惑星にケプラーの第三	万有引力の法則とキャベンディッシュの実験	万有引力と重力の関係	万有引力による位置エネルギー	人工衛星の第一宇宙速度	人工衛星の第二宇宙速度	地球の質量	地球表面から高さ h の人工衛星の周期	地球の万有引力による月の加速度	コペルニクスの公転周期・公転半径	赤道と極における重力加速度の差	静止衛星
G社	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×
D社	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×
J社	○	×	○	○	○	○	○ 第1と名付けず	○ 第2と名付けず	○	○	×	×	×	×
O社	○	×	○	○	○	○	○ "	○ "	×	×	×	×	×	×
SK社	○	×	○	○ キャベンディッシュなし	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×
DG社	○	×	○	○ "	○	○	○	○	○	×	○	×	×	×
K社	○ 表なし	×	○	○	○	×	○	×	○	×	○	○	○	○
Ss社	○	×	○	○	○	○	○	○	×	周 期 で な く さ 月 面 上 の 重 力	×	×	×	×
T社	○	×	○	○	上空の重力加速度	○	○ 第1と名付けず	×	○ 太陽の質量	×	×	×	×	○
KR社	○	×	○	○	○	○	○ 問題の中	×	○	○	×	×	○	○ 問題の中

§ 2. 本校選択授業物理における「万有引力」教材の取り扱い

本校では高校2年で2単位の理科1(物理)を、高校3年で3単位の選択物理を実施している。力学分野について言えば、高校2年で運動の法則、等速円運動、運動量保存則、力学的エネルギー保存則を取り扱い、高校3年で座標系、単振動、万有引力の法則を取り扱っている。

今年度の物理選択者は70名で、この生徒達を対象にして別紙プリントをもちいて時数8時間で「万有引力」の授業を実施した。

資料プリントは3つの節から構成されており、以下にそれぞれの節について教材作成のねらいを簡単に説明する。

§ 1. 太陽系モデルの歴史的発展

ギリシャ時代からケプラーの時代までの地球中心説や太陽中心説がどのような天文学的事実の上に築かれてきたかを概観したものである。また、同時に当時の自然観にたった場合の太陽中心説が内包する問題点が、運動法則の確立によってどのようにして解決されたかを明らかにさせた。教科書では、万有引力教材に「ケプラーの法則」から入っているために、惑星の軌道が直線と円の組合せから抜けでたことの革新性が不明となっている。せめて、教科書でもコペルニクスの太陽中心説ではじめて、惑星の公転軌道半径、公転周期が測定できるようになったことくらいは触れるべきであろう。

§ 2. ケプラーの法則から万有引力の法則へ

ケプラーの法則と万有引力の法則がどのように関連しているかを、軌道を円に限定することなく、楕円にまで拡張して考えてみた。まず、ケプラーの法則が太陽系の惑星だけでなく、木星の衛星についても成り立つことを電卓による計算により確認させた。つぎに、ケプラーの第二法則(面積速度一定)が成り立つのは、太陽-地球間に中心力がはたらく場合で、このことを力が撃力の場合と連続力の場合にわけて検討させた。等速円運動する惑星にケプラーの第3法則を適用することにより、太陽-惑星間に作用する力が太陽-惑星間の距離に反比例することはどの教科書でもとりあげているが、この例をまず取り上げ、さらに作用・反作用の法則を適用して、この力が太陽、惑星それぞれの質量に比例することを推論させた。

ニュートンは地上の物体と月の運動がどちらも地球の万有引力により決定されることを示すことにより、初めて地上の運動と天界の運動を統一的に捉えたが、その一例として、月のデータを用いて地上の重力加速度の大きさを算出させた。さらにキャベンディッシュの万有引力定数の測定の話とともに、万有引力定数を用いずに地上の実験により地球の質量を算出するボイスの方法にふれた。

この節の最後に、惑星が円でなく楕円を描く場合について、ケプラーの第一法則と第二法則を用いて太陽-惑星間に作用する力が太陽-惑星間の距離に反比例することを導き出した。

§ 3. 万有引力と位置エネルギー

ここでは、まず、万有引力が保存力であること、従って万有引力による位置エネルギーが定義

できること、位置エネルギーの基準について考えさせた。次に、力学的エネルギー保存則を用いて第2宇宙速度を求め、第1宇宙速度との関係を調べてから、万有引力による位置エネルギーを重力による位置エネルギーで表してみた。潮汐（潮の干満）は万有引力の法則により初めて解明されたので、次にこの例を取り上げた。

この節でも取り上げたかったのは、地上から水平に投げ出された物体が2次曲線を描き、その種類が物体の初速度だけで決ってしまうことである。数学上で難しいところがあるので、ここの展開は教師が行った。また、初速度のちがいによる軌道の様子をパソコン・グラフィックにより大型テレビ画面に演示し、併せて面積速度が時間的に変わらないことを確認した。続いて、ケプラーの3つの法則が相互に関連していることを示すために、惑星の軌道が円になる場合と楕円になる場合に分けて、ケプラーの第1法則と第2法則とから第3法則が導けることを指摘した。

最後に、ケプラーの第3法則を用いて、真円軌道を描く人工衛星の周期や、楕円軌道を描く人工衛星の近地点や遠地点における速さを求め、理科年表の値と比較させた。また、太陽系からの脱出速度（第3宇宙速度）についてもふれ、その値を計算させた。

授業プリントを作成するにあたり、以下の文献を引用・参照した。

ホルトン他著	プロジェクト物理2	コロナ社	1978
コーエン著	近代物理学の誕生	河出書房新社	1967
G. ガモフ著	重力の話	河出書房新社	1967
P・ヒュウエット著	物理のコンセプト①	共立出版	1985
平田邦夫著	物理ドライラボ入門	共立出版	1984
バジャー・オルソン著	力学	培風館	1980
パークレー物理コース	力学（下）	丸善	1979
雑誌	バリエーション	丸善	1986, 12月号

§ 2-1. アンケートに見る授業の感想

配布したプリントの問題意識を喚起するための問題を考えることを中心に授業を進めたが、授業時数が少ないので数学的に難しいところは教師が説明するだけで終わったところもあった。そのため数学を理解することに追われ、物理的内容の定着が不十分というのが正直な感想である。しかし、かなり多くの生徒に理解は不十分ながらも、知的な刺激を与えることができたのではないかと推察している。

授業への関心度（面白さ）を節別に見ると、§3.万有引力と位置エネルギー §2.ケプラーの法則から万有引力の法則へ §1.太陽系モデルの歴史的発展の順であった。歴史に対する関心が最も低かったのは生徒の知的関心に対応する形で教材を配置できなかったことによると思われる。

授業の難易度を見ると、不思議なことに授業の面白さの順と一致する。難しいが面白い。易しいがつまらないといった傾向がみられる。難しさの原因の大部分が数学の難しさによることが推察できるが、難しい=嫌いと単純に結びつかないところに生徒の成長を見ることができる。

次に、興味を引く強さの順に教材の項目を並べると

1. ロケットの初速だけでロケットの軌道が決まり、その軌道が2次曲線になること。
2. 宇宙速度
3. 楕円軌道を描く天体について、ケプラーの第1、第2法則から第3法則を導くこと。
4. 楕円軌道を描く人工衛星の周期や速さを算出すること。

などがあげられる。

これに対して生徒の興味をひかなかったのは

- * 惑星や衛星についてデータ表からケプラーの第三法則が成り立つことを確認すること。
- * 潮汐
- * 慣性質量と重力質量

などで、単純作業や単なる知識と受け止められた教材があげられる。

次に、難しさの順に教材の項目をあげると

1. 楕円軌道を描く人工衛星の周期や速さを算出すること。
2. 楕円軌道を描く天体について、ケプラーの第1、第2法則から第3法則を導くこと。
3. 楕円軌道を描く天体について、ケプラーの第1、第2法則から逆自乗則を導くこと。
4. ロケットの初速だけで軌道の2次曲線の種類が決まること。

などで、興味の強さの順と難しさの順がかなりの程度において一致していることが分かる。

授業に程度の高い数学を導入したことについては、ある程度やむを得ないとしながらも「もっと基礎的な事項を勉強してから、深く追求してほしい」とか「授業で微積や極座標をもっとゆっくりと、分かりやすく教えてからにしてほしい」という意見が数人からでたが、これが彼らの本音であろう。

「微積を用いず、軌道を円に限る」という意見が3%(2人)と意外に少なかったが、たまには受験の世界を越えて高いところを見てみたい気持ちの現れかも知れない。

クロス集計では、「授業が易しい」と答えた生徒に「授業が面白い」と答える割合が最も多く、「非常に難しい」と答えた生徒に「つまらない」とする意見が多かった。

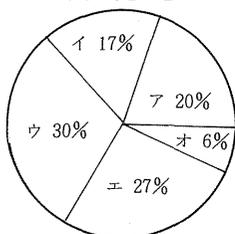
数学の程度と関心度の関係については、「程度の高い数学を使ってよい」と答えた生徒に「授業が面白い」と答える割合が多く、「数学は教科書程度にしてほしい」と答えた生徒に「つまらない」とする割合が多かった。

一般に、授業は生徒の関心や理解度の程度においてその内容が決められるが、今回の試みは一定の刺激を生徒たちに与えることができたと思う。もっとも、日常的に、このような授業ではかなりの物理嫌いを生み出してしまうが。

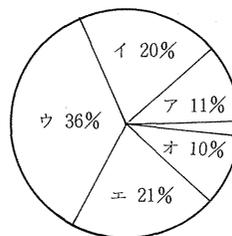
◎「万有引力」授業アンケートとその結果（回答者数 70名）

1. 「§1. 太陽系モデルの歴史的発展」に対する興味度と難易度

- ア. 非常に面白い
- イ. まあ面白い
- ウ. 普通
- エ. 余り面白くない
- オ. 全く面白くない

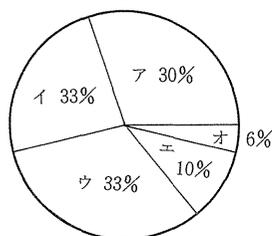


- ア. 易しい
- イ. まあ易しい
- ウ. 普通
- エ. やや難しい
- オ. 難しい

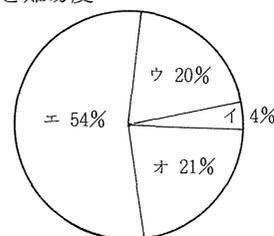


2. 「§2. ケプラーの法則から万有引力の法則へ」に対する興味度と難易度

- ア. 非常に面白い
- イ. まあ面白い
- ウ. 普通
- エ. 余り面白くない
- オ. 全く面白くない

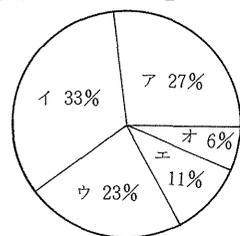


- ア. 易しい
- イ. まあ易しい
- ウ. 普通
- エ. やや難しい
- オ. 難しい

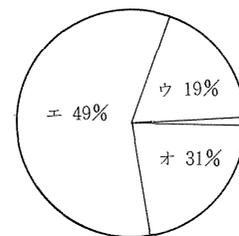


3. 「§3. 万有引力と位置エネルギー」に対する興味度と難易度

- ア. 非常に面白い
- イ. まあ面白い
- ウ. 普通
- エ. 余り面白くない
- オ. 全く面白くない



- ア. 易しい
- イ. まあ易しい
- ウ. 普通
- エ. やや難しい
- オ. 難しい



4. 授業で興味をひかれた（面白かった）項目（2つ指定）

- ア. ロケットの初速によって軌道が決まること 40 %
- イ. 宇宙速度 36 %
- ウ. ケプラーの第1, 第2法則から第3法則を導出すること（楕円について） 23 %
- エ. 楕円を描く人工衛星の周期や速さの算出 19 %
- オ. ・天動説から地動説への歴史 13 %
 ・地球の質量を見つけるボイスの方法
- カ. ケプラーの第1, 第2法則から逆自乗則を導出する事 11 %
- キ. ・面積速度一定は中心力 9 %
 ・万有引力が作用して等速円運動する物体では, $E_k = |E_p| / 2$
- ク. 円軌道について $a^3 / T^2 =$ 一定より逆自乗則を算出 7 %

ケ. 潮汐

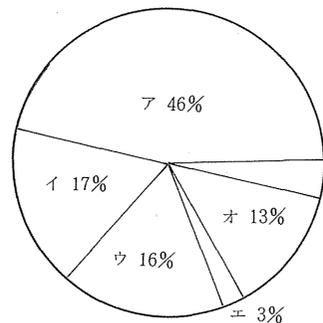
- 惑星や衛星について $a^3/T^2 = \text{一定}$ を確認 6 %
- 慣性質量と重力質量

5. 授業で最も難しかった項目 (2つ指定)

- ア. 楕円を描く人工衛星の周期や速さの算出 31 %
- イ. ケプラーの第1, 第2法則から第3法則を導出すること (楕円について) 30 %
- ウ. ケプラーの第1, 第2法則から逆自乗則を導出すること 29 %
- エ. ロケットの初速により軌道の2次曲線が決まること 26 %
 - 万有引力が作用して等速円運動する物体では, $E_k = |E_p|/2$
- オ. 面積速度一定は中心力 13 %
- カ. 円軌道について $a^3/T^2 = \text{一定}$ より逆自乗則を算出 11 %
- キ. 宇宙速度 9 %
- ク. 惑星や衛星について $a^3/T^2 = \text{一定}$ を確認 6 %
 - 地球の質量を見つけるボイスの方法
 - 潮汐
- ケ. 慣性質量と重力質量 3 %

6. 授業では万有引力の法則の偉大さを理解してもらうために, 軌道を円に限定せず楕円にまで拡張した。そのため, 極座標形式で運動方程式を考えたり, 2次曲線を表わしたり, 微積分をしたりした。このことについての感想。

- ア. 本質的理解につながるなら, 多少難しくても, 授業程度の数学は導入してもよい。
- イ. 極座標や微積分を用いるのはいいが, プリント9(2)のような軌道形を式で示すのは難しいからやめたほうがよい。
- ウ. 微積分はいいが, 極座標形式は難しすぎるからやめたほうがよい。
- エ. 高校物理では, 微積分を用いず, 軌道は円に限定すべきである。
- オ. その他



☆「その他」の意見 (「その他」に含まれない感想を含む)

- 微積分をある程度教えてからやって欲しい (5名)。
- 授業で微積分や極座標表示をもっとゆっくり, 分かりやすく教えてからにして欲しい (5名)。

・こういうことは難しくとも本質的理解を目指すべきだが、比較的時間にゆとりのある高2の時にもっとゆっくりやって欲しい(2名)。

・まず、教科書程度に万有引力を理解した上でやらないと理解できない(2名)。

・授業は難しく理解できなかったが、物理の考え方や、本質に触れた気がする。

・スピードが速い。問いの解もプリントして欲しい。

・スピードが遅い。(数学は自然の言葉だからどんどん使うべき)

・数式だけでは分かりにくい。

・微分表示は数学と同じにして欲しい。

・近似の方法をもっとしっかり教えて欲しい。

・「波動」、「電磁気」についても積極的に微積を使って欲しい。ただ、生徒はその分野について未習だから、教科書的基本事項を説明した上で深くやって欲しい。

◆クロス集計結果

難易度と興味度のクロス

(I) 1.について

易しい(11%)

ア. 面白い	38%
イ. まあ面白い	25%
ウ. 普通	12%
エ. 余り面白くない	25%
オ. 面白くない	0%

まあ易しい(20%)

ア. 面白い	22%
イ. まあ面白い	29%
ウ. 普通	22%
エ. 余り面白くない	21%
オ. 面白くない	0%

普通(36%)

ア. 面白い	20%
イ. まあ面白い	12%
ウ. 普通	36%
エ. 余り面白くない	32%
オ. 面白くない	0%

やや難しい(21%)

ア. 面白い	20%
イ. まあ面白い	14%
ウ. 普通	40%
エ. 余り面白くない	27%
オ. 面白くない	0%

難しい(10%)

ア. 面白い	0%
イ. まあ面白い	14%
ウ. 普通	29%
エ. 余り面白くない	14%
オ. 面白くない	43%

(Ⅱ) 2.について

まあ易しい (4%)

ア. 面白い	33%
イ. まあ面白い	33%
ウ. 普通	33%
エ. 余り面白くない	0%
オ. 面白くない	0%

やや難しい (54%)

ア. 面白い	34%
イ. まあ面白い	29%
ウ. 普通	31%
エ. 余り面白くない	5%
オ. 面白くない	0%

(Ⅲ) 3.について

まあ易しい (1%)

ア. 面白い	100%
--------	------

やや難しい (49%)

ア. 面白い	32%
イ. まあ面白い	35%
ウ. 普通	23%
エ. 余り面白くない	9%
オ. 面白くない	0%

普通 (20%)

ア. 面白い	36%
イ. まあ面白い	29%
ウ. 普通	36%
エ. 余り面白くない	0%
オ. 面白くない	0%

難しい (21%)

ア. 面白い	14%
イ. まあ面白い	0%
ウ. 普通	33%
エ. 余り面白くない	33%
オ. 面白くない	20%

普通 (19%)

ア. 面白い	31%
イ. まあ面白い	46%
ウ. 普通	23%

難しい (31%)

ア. 面白い	14%
イ. まあ面白い	23%
ウ. 普通	23%
エ. 余り面白くない	23%
オ. 面白くない	18%

数学の程度と興味度とのクロス

(Ⅳ) 6. と 2. について

授業程度の数学は導入してよい (46%)

ア. 面白い	53%
イ. まあ面白い	19%
ウ. 普通	25%

微積・極座標を使ってよいが軌道の式は難しいからやめる (17%)

ア. 面白い	8%
イ. まあ面白い	50%
ウ. 普通	33%

エ. 余り面白くない 3 %
 オ. 面白くない 0 %

エ. 余り面白くない 33 %
 オ. 面白くない 8 %

微積はよいが極座標は駄目 (17 %)

ア. 面白い 8 %
 イ. まあ面白い 8 %
 ウ. 普通 50 %
 エ. 余り面白くない 25 %
 オ. 面白くない 8 %

微積も極座標も使わず, 軌道は円のみ

(3 %)

エ. 余り面白くない 100 %

(V) 6. と 3. について

授業程度の数学は導入してよい (46 %)

ア. 面白い 50 %
 イ. まあ面白い 31 %
 ウ. 普通 9 %
 エ. 余り面白くない 0 %
 オ. 面白くない 0 %

微積・極座標を使ってよいが軌道の式は

難しいからやめる (17 %)

ア. 面白い 8 %
 イ. まあ面白い 50 %
 ウ. 普通 33 %
 エ. 余り面白くない 0 %
 オ. 面白くない 8 %

微積はよいが極座標は駄目 (17 %)

ア. 面白い 0 %
 イ. まあ面白い 18 %
 ウ. 普通 35 %
 エ. 余り面白くない 12 %
 オ. 面白くない 8 %

微積も極座標も使わず, 軌道は円のみ

(3 %)

エ. 余り面白くない 50 %
 オ. 面白くない 50 %

(VI) 6. と 1. について

授業程度の数学は導入してよい (46 %)

ア. 面白い 31 %
 イ. まあ面白い 28 %
 ウ. 普通 19 %
 エ. 余り面白くない 19 %
 オ. 面白くない 3 %

微積・極座標を使ってよいが軌道の式は

難しいからやめる (17 %)

ア. 面白い 17 %
 イ. まあ面白い 8 %
 ウ. 普通 17 %
 エ. 余り面白くない 35 %
 オ. 面白くない 6 %

微積はよいが極座標は駄目 (17 %)

ア. 面白い	6 %
イ. まあ面白い	0 %
ウ. 普通	41 %
エ. 余り面白くない	18 %
オ. 面白くない	6 %

微積も極座標も使わず、軌道は円のみ

(3 %)

エ. まあ面白い	50 %
オ. 面白くない	50 %

§ 3. 「地学」および「理科 1 (地学分野)」の教科書にみる「万有引力」

教材の取扱いの特徴

§ 1 の物理と同様に各社の教科書における万有引力教材の取扱い方を表に示してまとめてみた。その特徴を以下に挙げる。

(1) 万有引力と重力の関係については、「地学」の教科書のみ取り扱い、「理科 1 (地学分野)」ではほとんど触れられていない。前者では、まず、重力は万有引力と遠心力との合力であることを明示し、それに基づいて、地球の形や赤道と極での重力加速度の差について説明している。ところが、万有引力そのものに関する記述は、ほとんどないのが実情である。

(2) ケプラーの法則は、「地学」、「理科 1 (地学分野)」を通じて触れられているが、前者では万有引力とケプラーの第 3 法則との関係を明示するのは少なく、後者と同様に単なる惑星運動の規則性として取り上げられている。

(3) 「理科 1 (地学分野)」では、地動説と天動説のモデルの違いについて、読み物ふうに簡単に触れられていることが多いが、一方「地学」の教科書でそれを取り上げているのは少ない。

(4) 人工衛星は、物理と違ってあまり取り上げられず、第一および第二宇宙速度に関する記述はまれである。

(5) 地球の質量は、どの教科書にもものっているが、それが万有引力によって求められることは示されていない。

(6) 起潮力については、どの教科書も地球と月との引力および両者の共通重心を回る地球の遠心力との合力であることを定性的に説明している。

項目	出版社	万有引力と重力の関係	赤道と極における重力加速度の差	ケプラーの法則と惑星の表	法則を適用し $F \propto 1/R^2$ を求める 等速円運動する惑星にケプラーの第三	人工衛星の第一宇宙速度	人工衛星の第二宇宙速度	地表面から高さ h の人工衛星の周期	静止衛星	地球の質量	天動説と地動説の比較	起潮力と万有引力の関係
		地 学	D社	○	○	○	×	○	○	×	×	×
DN社	○		○	○	×	×	×	○	×	○	×	○
J社	○		○	○	○	×	×	×	×	×	○	○
KE社	○		○	○	×	×	×	×	×	×	×	○
KY社	○		○	○	×	○	○	×	×	×	×	○
O社	○		○	○	×	×	×	×	×	×	○	○
Su社	○		○	○	○	×	×	×	×	×	○	○
T社	○		○	○	○	×	×	×	×	×	×	○
理 科 I	DI社	×	×	○ グラフ	×	×	×	×	×	×	○	×
	DN社	×	×	○	×	×	×	×	×	×	○	×
	G社	×	×	○ 表なし	×	×	×	×	×	×	○	×
	KE社	×	×	○ 表なし	×	×	×	×	○	×	○	×
	KY社	×	×	○ 表なし	×	×	×	×	×	×	○	×
	Sa社	×	×	○ グラフ	×	×	×	×	×	×	○	×
	Su社	×	×	○ グラフ	×	×	×	×	×	×	○	×
新理科I	O社	×	×	○ グラフ	×	×	×	×	×	×	×	×
	Sa社	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×
	T社	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

§ 4. 本校「地学」における「万有引力」教材の取扱い

本校では、高校3年で「地学」(3単位)を履修(必修)させている。万有引力については、以下の4つの項目で取り上げている。

(1) 太陽系の天体……惑星運動の規則性について、ケプラーの法則を紹介してから、等速円運動と作用反作用の法則を用いて、ケプラーの第3法則から万有引力の公式を導いた。(等速円運動の速度と加速度の求め方も示した。これは、あくまで高校2年で物理を修得していることを前提にしている。)

(2) 大気圏の構造……大気上層における分子速度を求め、脱出速度との関係から地球大気の組成について考察した。

(3) 重力の補正……高度補正やブーゲー補正を行う理由を、万有引力の公式を使って解説した。

(4) 恒星の進化……脈動変光星のメカニズムについて重力ポテンシャルとエネルギー保存則を用いて説明した。

なお、授業に使用したプリントに掲載した図表は、以下の教科書や文献から引用した。

- 浜島書店編集部編 最新「図表地学」 浜島書店 1984
- 海野和三郎・上田誠也・駒林誠他著 「改訂地学」 東京書籍 1986
- 金原寿郎編 「基礎物理学」 裳華房 1963
- 小尾信彌・久城育夫・小林和男他著 「改訂地学」 大日本図書 1987
- 大森昌衛・森本雅樹他著 「地学 改訂版」 実教出版 1986
- 佐藤正・吉野正敏他著 「地学 改訂版」 大原出版 1987

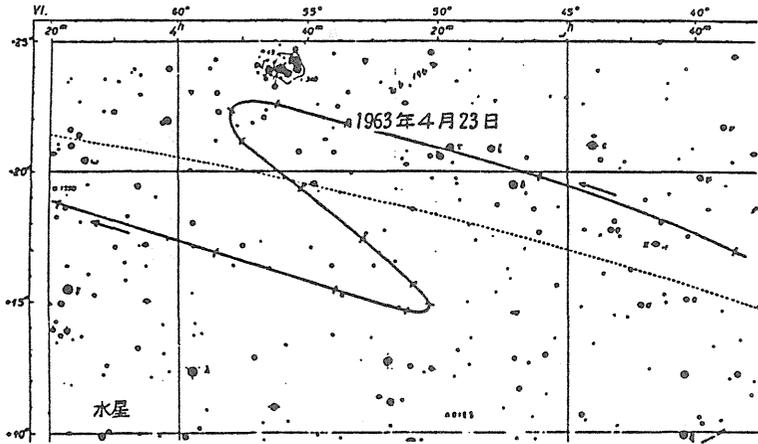
おわりに

以上述べたように、万有引力教材に関して、物理ではケプラーの法則から入り、しかも円軌道を用いて惑星の運動の特徴を説明している。一方、理科1(地学分野)ではケプラー以前の惑星の運動のとらえかたをプトレオマイオスの天動説とコペルニクスの地動説の比較という形で簡単に取扱われている。さらに、地学では、ケプラーの法則を取り上げても万有引力との関係を明示しない場合が多い。

現在、本校では、高校3年で選択物理と地学を履修させているが、授業の進度や教材の配当など両者の関係を緊密にすることが課題となっている。たとえば、1987年度は、地学で先にケプラーの法則を取り上げて、等速円運動の加速度と作用反作用の法則を用いて、ケプラーの第3法則から万有引力の公式を導いた。その後、選択物理でケプラー以前の太陽系モデルの展開や楕円まで拡張したケプラーの法則と万有引力との関連性を明示した。いずれにしる選択物理と地学で万有引力教材に関して重複があるのは避けられず、前者では授業時数の関係からこの教材に充分時間を掛けるだけの余裕がない。

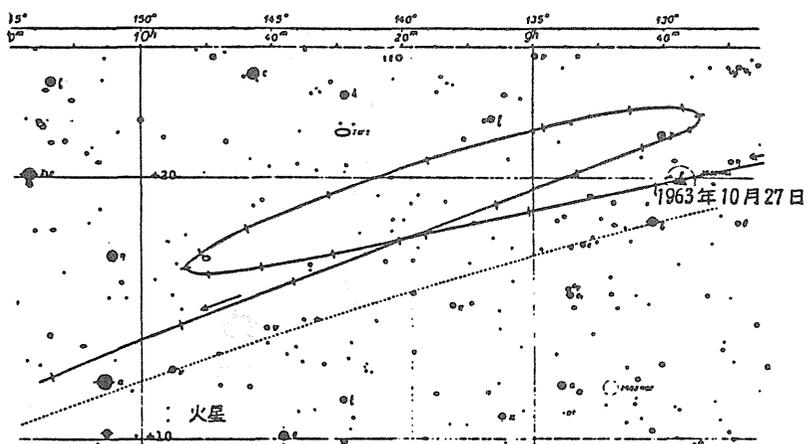
そこで、1989年度から本校の教育課程が改定になり、高校1年で地学を履修させることにした。つまり理科1（地学分野）を拡大して、太陽系モデルの歴史的発展や万有引力の発見に至るまでの道筋を高校1年の地学で踏まえた上で、高校3年の選択物理で万有引力を取扱ったほうがより充実すると思われるからである。そして何よりも、科学を歴史的な観点からとらえさせ、どのようにして一つのパラダイムが構築されたのか、また別の新しいパラダイムに置換されたのかというドキュメントを知ることは大事である。すなわち、ただ現在世間一般に受入れられている科学的真理を受け取るだけでなく、現在に至るまでの流れや背景を体系的に学ぶことにより、科学に対するより本質的な理解力や創造力を生徒に促したいと考えている。

太陽系モデルの歴史的発展

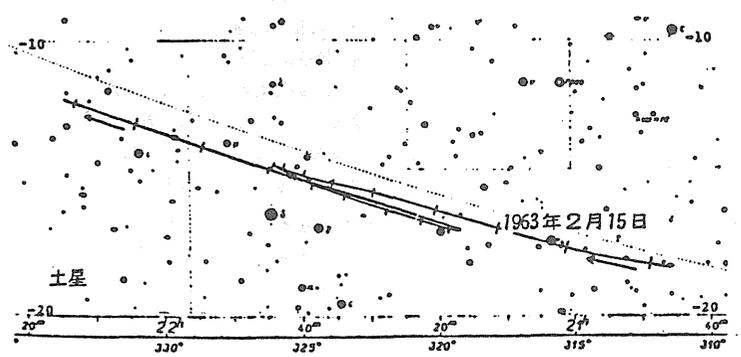


(5-8)
いずれの図においても、太陽の年周行程、つまり黄道を点線で示してある。

(a) 水星の逆行現象 (5日ごとに位置をプロットしてある)。



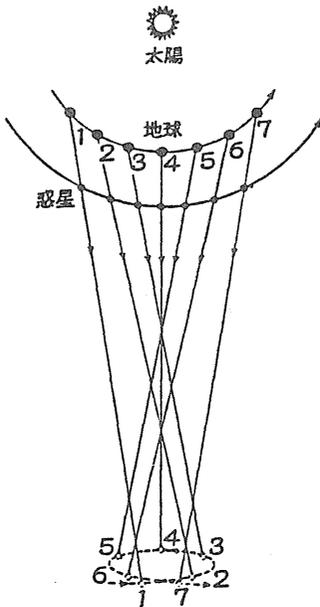
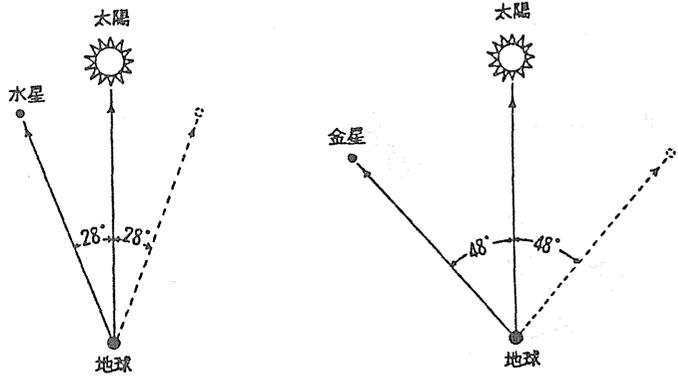
(b) 火星の逆行現象 (10日ごとに位置をプロットしてある)。



(c) 土星の逆行現象 (20日ごとに位置をプロットしてある)。

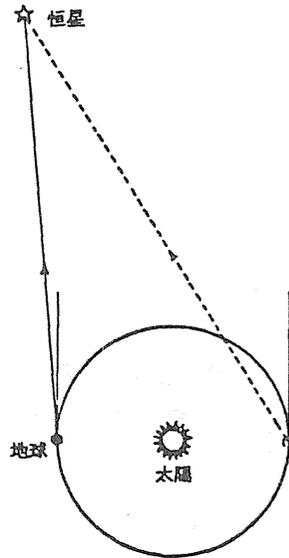
(5-9)

地球から観測した場合、水星と金星とが太陽から離れて見える最大の角度を示した図。両者とも日の入り時、日の出時に見えるが、水星は太陽から 28° 、金星は 48° 以上離れて見えることはない。



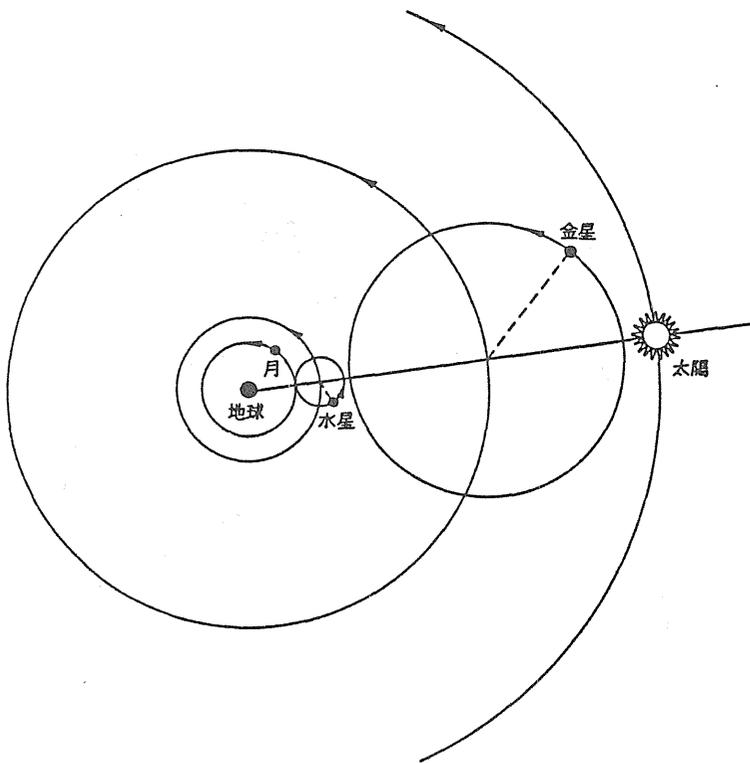
(5-12)

地球が、太陽をめぐる軌道の上で惑星を追い越すと、その惑星は地球から見て逆行しているように見える。実線の矢は、番号をつけた各位置に地球があるときに、その地球から惑星が見える方向を示している。おのおの場合に恒星群に対する惑星の見かけの位置がどのようになるかを示したのが、下の、番号をつけた小さなループである。

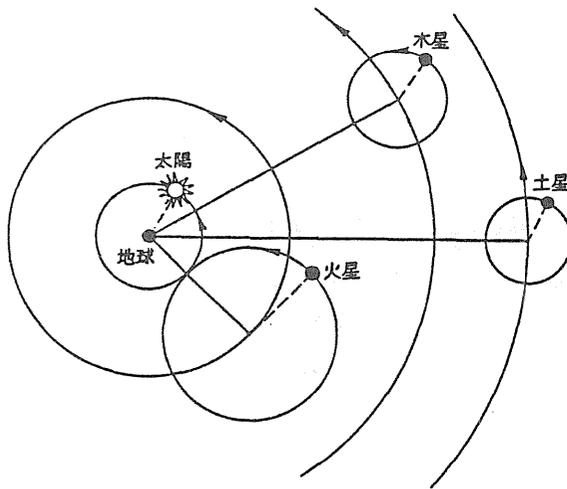


(5-13)

地球が太陽の周囲を回転していたとすると、ある恒星を地球から見る視角は、1年間の間に変わるはずである。このように、観測者の位置の変化に応じて対象の相対的な見かけの位置が変わることを視差と呼ぶ。地球の公転によって生じる恒星の視差のうち最大のものは約 $\frac{1}{2500}$ 度である。これは、地球から最も近い恒星への距離が約40兆kmであることから説明できる。



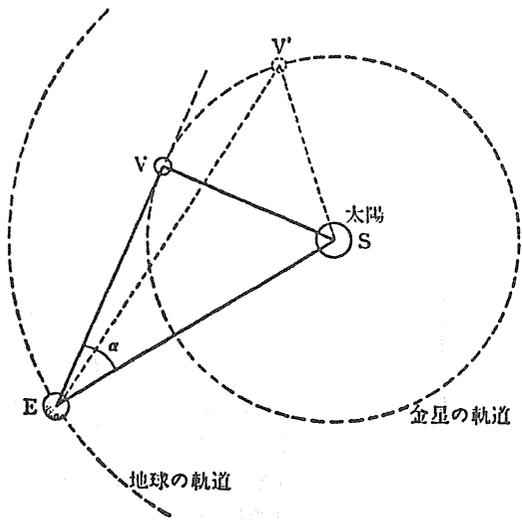
プトレマイオスは、惑星運動を
 図示するにあたって、一つの惑星の
 運動がつぎの惑星の運動を決定す
 るというような、全体的な相互に
 関連する機構の形をとることはし
 ていない。惑星どうし間の距離
 については何も値がないため、プ
 トレマイオスは、地球から惑星へ
 の距離を、古くからの値に従って
 計算している。恒星はもっとも遠
 く、つぎに土星、木星、火星、太
 陽、金星、水星、月の順である。
 軌道はふつう入れ子の形で書か
 れ、周転円はお互いに重ならない
 ようにしてある。



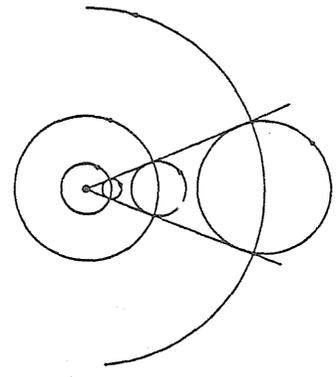
(5-17)

プトレマイオス体系を単純化して示した図。上の図は地球と太陽の間にある惑星の図、下の図は太陽以遠の惑星の図である。上図の縮尺は下図の8倍になっている。

水星と金星のそれぞれの周転円の中心は、上図のように、つねに太陽と地球を結ぶ直線上にある。これに対して、火星、木星、土星のそれぞれの周転円は、さまざまな位置をとる。下図では、これら3惑星の周転円の大きさの割合を比較しやすいように、三つの周転円が近づいた場合を示してある。



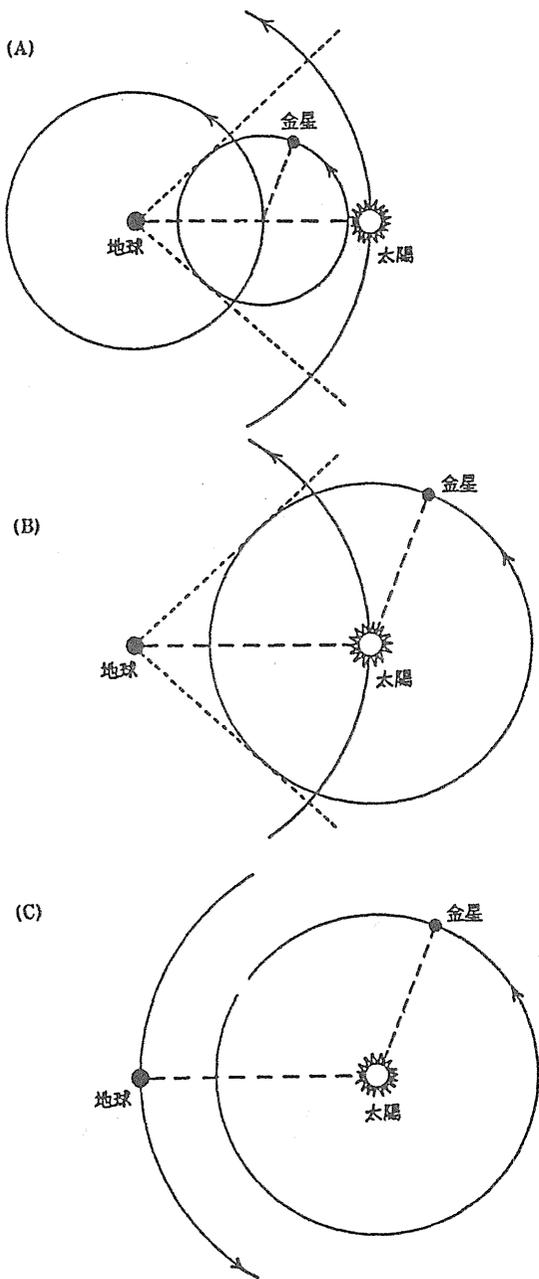
14図 コペルニクス系では、金星と太陽の距離を計算することができるようになった。もし離れの角（すなわち金星が太陽となす角 α ）が最大のとき、地球から金星への視線EVは、金星の軌道の接線となる。したがってそれは半径VSに垂直である。VSを計算することは、初等三角法のやさしい問題である。他のどんな位置においても、たとえばV'にいたとして、離れの角は最大ではない。



(6-6)
 プトレマイオス体系では、周転円と導円との相対的な大きさだけが定められていた。したがって、お互いの比さえそのままなら、どんな大きさに書いてもよいのである。

表 (6-3)

惑星名	コペルニクスの軌道半径値	今日の数値
水星	0.38 AU	0.39 AU
金星	0.72	0.72
地球	1.00	1.00
火星	1.52	1.52
木星	5.2	5.20
土星	9.2	9.54



(6-7)

座標系を地球から太陽に変える。

プトレマイオス体系からコペルニクス体系への視点の転換は、今日の言葉でいえば座標系の変換である。それまでは導円と周転円に帰されていた見かけの運動が、コペルニクスによって地球の公転と他の惑星の公転に帰されることになったのである。

たとえば、金星の運動を考えてみよう。プトレマイオスの地球中心説では、金星の周転円の中心は、(A)図のように太陽の運動と結びついている。金星の導円は太陽のそれより小さいと考えられ、その周転円はちょうど地球と太陽の間に納まると考えられていた。しかし、この体系が見かけの運動を説明するために必要なのは、周転円と導円の相対的な大きさだけであった。周転円との比が変わらないかぎり、導円の大きさはどのように変えてもよかったのである。

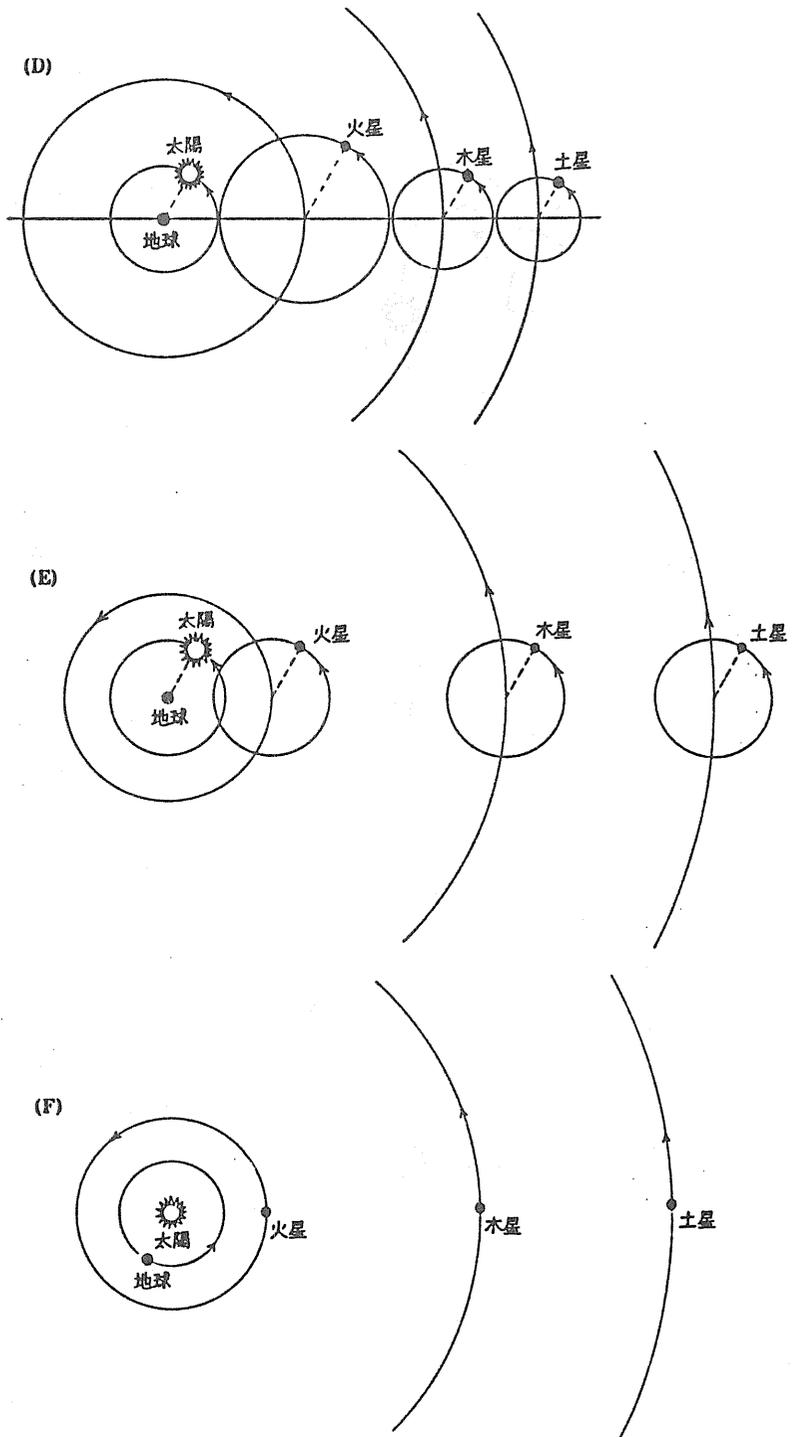
太陽中心体系への転換の第一歩は、(B)図のように、金星の1年周期の導円の中心を太陽に移し、それに見合うだけ周転円の大きさも大きくする。こうすると金星は太陽中心に回転し、太陽は地球を中心に回転することになる。ティコ・ブラーエが後に提出した体系は、このような、地球のまわり回転する太陽を中心として、すべての惑星が回転するというものであった。

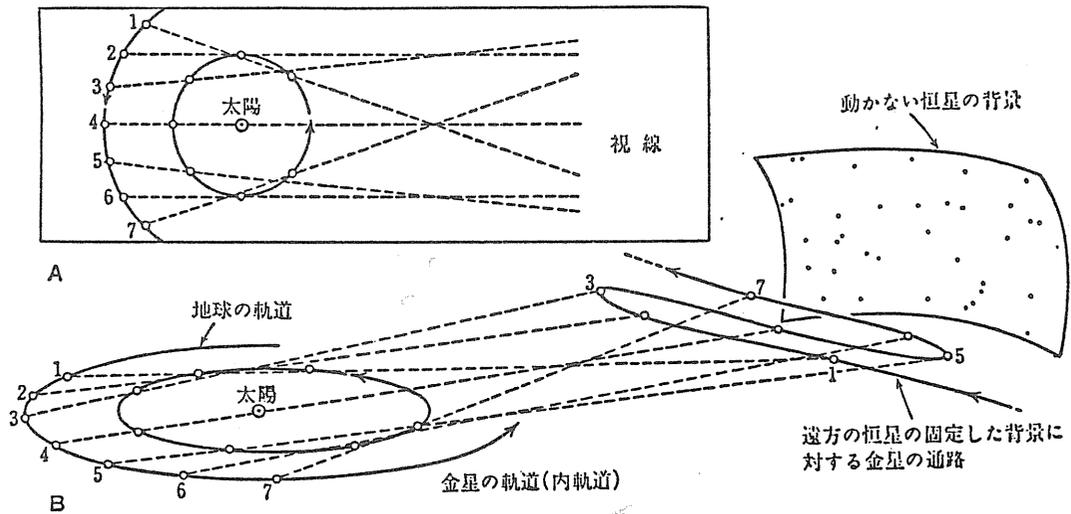
コペルニクスはさらに進んで、地球と太陽との相対運動を、これまでとは逆に太陽中心に地球が回転するものとして考えてみた。このコペルニクス体系では、金星の周転円はそのまま金星の公転軌道になり、金星の導円は、地球の公転軌道に置き換えられた。(C)図がそれを示している。この三つの体系、つまり、プトレマイオス、ティコ、コペルニクスの体系は、どれも同じ観測データを説明することができるのである。

外惑星についても事情は同じで、ただ、周転円と導円の役割が逆になるだけである。ちょうど1年周期をもっていて、太陽の動きと一致しているのは、内惑星の場合には導円であったが、外惑星

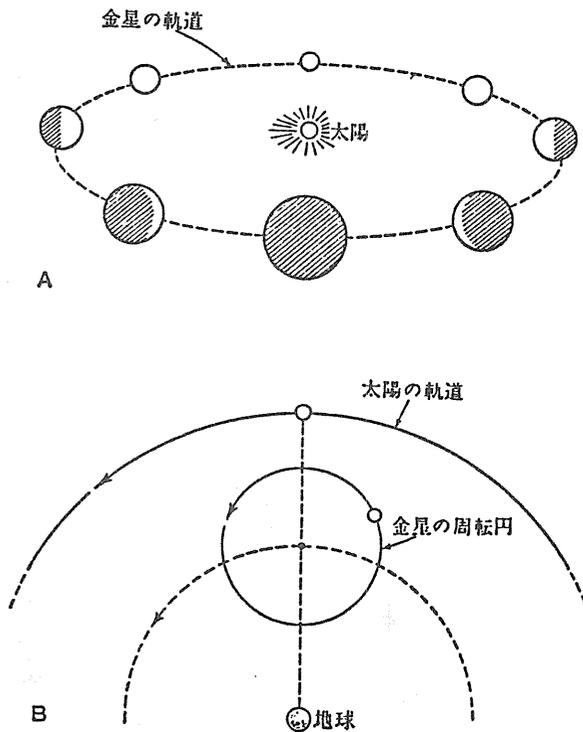
の場合には周転円である。導円の大きさとしては、各惑星の周転円が隣り合った惑星の周転円とぶつからないぐらいのぎりぎりの大きさがとられていた。(これは「重なりも無駄なすき間もなく空間を満たす」という、単純の原理ともいべき前提のみごとな具体例の一つであった。) そのことは (D) 図を見ればわかる。(もちろんこの図では、すべての惑星の導円の中心が一直線上に並ぶという、実際にはまず起こらないような位置をとって図が描かれている。)

そこで、太陽中心体系への転換の第一歩は、導円の大きさを動かして(周転円との比は保ちながら)、1年周期の周転円が、太陽の1年周期の軌道と同じ大きさになるように修正してやることである。この修正を施した図が(E)図である。つぎに、太陽の見かけの年周運動を地球の公転に転換すればよい。そうすると、1年周期の周転円で説明されていた外惑星の逆行運動のループも、この地球の公転運動によって説明できることになる。そこで、いつも同調的に回転しなければならなかった外惑星すべての周転円運動と太陽の軌道運動とは、太陽のまわりを回る地球の公転だけに置き換えられてしまうことになる。これが(F)図に示されている。外惑星の導円はそのまま、その公転軌道となるわけである。





12図 軌道が地球と太陽の間にある惑星，内惑星の逆行運動も，同様視線群を使って簡単に説明できる。金星は地球より速く太陽のまわりを回っている。



22図 ガリレオによってはじめて観測された金星の相（満ちたり，かけたり）は古代天文学に対する強力な反論であった。（A）図で諸君は，相の存在がコペルニクス系といかによく合うか，金星の大きさの見かけの変化が，この惑星が太陽のまわりの軌道を持つという考えをいかに支持しているかがわかるであろう。諸君は，トレミー系ではこの現象が不可能であるのはなぜかが（B）図でわかるだろう。

§ 1. 太陽系モデルの歴史的発展

1. 基本的観測事実

- 太陽, 月, 惑星, 恒星の日周運動
- 太陽, 月, 惑星の恒星に対する年周運動
- 惑星の逆行現象, 光度変化
- 水星, 金星の最大離角 28° と 48°

2. ギリシャ人の考え方

(1) プラトン (B.C 4)

惑星の運動は等速円運動の組み合わせで表される。(天体の運動はその崇高な身分に応じた運動をせねばならぬとする哲学的原理)

(2) エウドクセス (B.C 4) アリストテレス (B.C 4) ……地球中心説

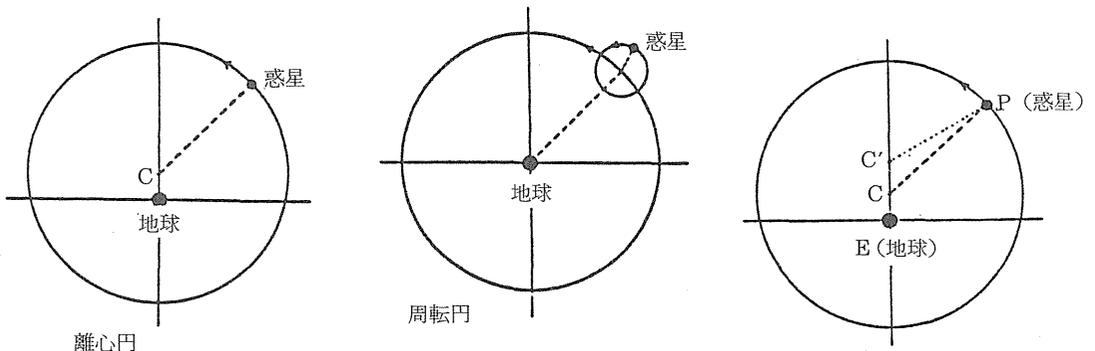
地球のまわりをまわる多くの天球を考え, 日周運動, 年周運動を説明したが観測事実と余り一致しなかった。また, 惑星の光度変化を説明できなかった。

(3) アリストアルコス (B.C 3) ……太陽中心説

日周運動や年周運動, 惑星の逆行現象や光度変化を説明できたが, 地球の運動が感知できない, 哲学的原理と合わないことや恒星の年周視差が観測されない理由で受け入れられなかった。

3. プトレマイオス (A.D 150頃) ……地球中心説

- (i) 離心円の導入……惑星の順行時の速度変化を説明
- (ii) 周転円の導入……惑星の逆行現象や光度変化を説明
- (iii) エクサント……逆行の起こる時期の不規則性を説明



4. コペルニクス (1473~1543) ……太陽中心説

できるだけ少ない数の等速円運動を組み合わせて惑星体系をつくりあげようと企図した。

(長所)

- (i) 基本的には地球中心説よりも簡単な構造をもっていた。
- (ii) 惑星の公転周期，惑星間の軌道の大きさの相対比が求められた。

(このことから，コペルニクスは彼のモデルが天空を説明するものであると考えた。)

(短所)

- (i) エクサントを導入しなかったため，正確な計算ではプトレマイオスよりも多くの周転円，離心円を必要とした。(30個以上)
- (ii) 新しい観測事実がなく，必然性がなかった。
- (iii) 恒星の年周視差を発見できなかった。

* 誤差はプトレマイオスモデルと同経度(約 2°)だったので，哲学上の観点から議論され，後の研究への新たな可能性を切り拓いた。

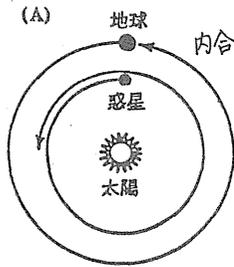
5. ティコ・ブラーエ (1546~1601)

- (i) 1572年 超新星の発見(ティコの星) ……「天界は不変でない」
- (ii) 1577年 彗星の発見とその距離を発見 ……月よりも遠い「彗星は天界の現象である。」
- (iii) コペルニクスもプトレマイオスも不正確な星の位置表をもとに理論を組み立てていることに気づき，観測器具の改良(大型化，目盛りの読みとり)を行い，誤差を $2'$ 以内に押えた。
- (iv) ティコの惑星系

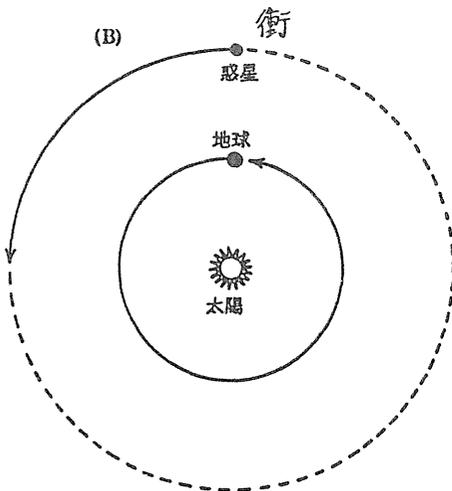
地球は宇宙の中心で惑星は太陽のまわりをまわる。

惑星の回転周期

それ自体も太陽のまわりを回転している地球からの観測データを使って、ある惑星の太陽のまわりの公転運動の回転数を見つけよう、というのが問題である。ここで、惑星の1年間の公転回数を“回転数”と呼ぶことにする。したがって、地球の回転数は当然1となる。いまたとえば、ある内惑星が、1年に太陽のまわりを $1\frac{1}{4}$ 回回転するとしてみよう。地球も同じ方向に回転し、1年で1回転する。地球は、その惑星のあとを追いかける形になるから、地球から見たその惑星の公転運動は $1\frac{1}{4}$ 回/年より小さな回転数になるように見えるはずである。事実、図(6-5)の(A)図でわかるように、この惑星の見かけの公転の回転数は、その惑星の公転の回転数と地球の公転の回転数との差になるわけである。つまり、 $1\frac{1}{4}$ 回/年から1回/年を引いた $\frac{1}{4}$ 回/年である。一般に、内惑星の公転の回転数を $f_{惑}$ とし、地球の公転の回転数を $f_{地}$ とすると、地球から見たその惑星の見かけの公転の回転数 $f_{惑-地}$ は、 $f_{惑-地}=f_{惑}-f_{地}$ で表される。



(A) 1年で $1\frac{1}{4}$ 回転の公転をする惑星があったとすると、それを地球から見ると、わずか $\frac{1}{4}$ 回転しかしなかったように見える。



(B) 1年で $\frac{1}{4}$ 回転しか公転しない外惑星も、地球から見ると $1\frac{1}{4}$ 回転したように見える。

(6-5)

同じことが外惑星についてもいえる。図 (6-5) の(B)図を見よ。外惑星は、地球よりもゆっくり公転しているから、地球は何回もその惑星を追い越すことになる。したがって、外惑星の場合には $f_{惑-地}$ を表す式の符号を変えて、 $f_{惑-地} = f_{惑} + f_{地}$ と書けばよい。

見かけの回転数 $f_{惑-地}$ は、地球から実際に観測できるものだし、 $f_{地}$ はもともと 1 回/年である。そこで $f_{惑-地}$ がわかれば、各惑星の公転周期は、ただちに上式から求められる。

$$\text{内惑星の } f_{惑} \text{ は } \quad f_{惑} = 1 \text{ 回/年} + f_{惑-地}$$

$$\text{外惑星の } f_{惑} \text{ は } \quad f_{惑} = f_{惑-地} - 1 \text{ 回/年}$$

である。

コペルニクスは、プトレマイオスのデータと自分のデータとを併用している。『天球の回転について』のなかで、その例を引いてみると、「木星は、71 太陽年より 5 日 45 分 27 秒を差し引いた時間内に、65 回地球に追い越される。……」といったぐあいである。表 (6-2) の ϵ の欄は、コペルニクスのデータを、それに最も近い年数に直して掲げたものである。(もっとも、もともとこれらのデータは、ほとんどが年数で出されていた。) 内惑星の場合に使われている回転周期は、太陽から最も東側に外れた位置からつぎにその位置にもどるまでを考えており、外惑星の場合は、ある衝の位置からつぎの衝の位置までである。

表 (6-2)

	観測年数 (ϵ)	ϵ 年の間に太陽に対して見かけ上何回転したか(n)	見かけの回転数 $f_{惑-地}$ 回/年 (n/ϵ)	公転の回転数 $f_{地}$ 回/年	公転周期 $1/f_{惑}$ 年
水星	46	145	3.15	4.15	0.241
金星	8	5	0.625	1.625	0.614
火星	79	37	0.468	0.532	1.88
木星	71	65	0.915	0.085	11.8
土星	59	57	0.966	0.034	29.4

6. ガリレオ・ガリレイ (1564~1642)

1609年 望遠鏡を発明

1610年 月面の観察……地表面と同じように山や谷がある。

木星の4つの衛星発見……すべての回転の中心が地球にあるわけではないこと。地球だけに衛星があるわけではないこと。

太陽黒点の発見……太陽にもきずがあること

金星の満ち欠けの発見……コペルニクス体系を支持

* ガリレイは最初からコペルニクス説を支持していたが観測によりこれを確信。「地球を動かす方が宇宙を動かすよりもずっとたやすいことを疑わない。」

7. ヨハネス・ケプラー (1571~1630)

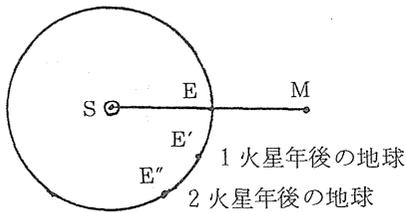
1596年 6個の惑星軌道間の間隔を5個の正多面体で説明しようとした。

1600年 プラハのティコの天文台に助手として招かれる。

火星軌道を離心円とエクアントで計算(観測と8'の差)

彼は周転円を用いなかった。(惑星は何もない空間を中心に運動することはないと考えていた。)

○火星軌道の決定

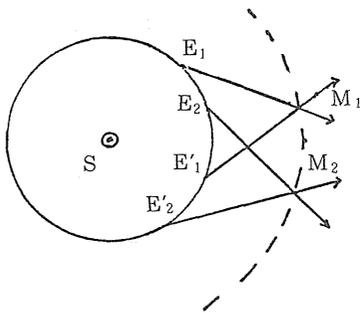


- ① 1火星年毎の観測結果より、太陽-火星間を基線として太陽-地球間の距離を求めた。この結果と太陽の見かけの位置変化の記録より地球の軌道を求めた。

↓

地球は太陽に近づいた時に最も速く運動する。(面積速度一定の法則；第二法則)

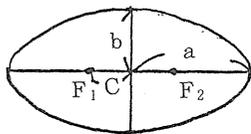
- ② 1火星年毎の地球の位置を基線として三角測量の要領で火星の位置を割り出す。これを火星の軌道を求める。→火星の軌道は楕円であり、太陽はその一方の焦点上にある。(第一法則)



* ケプラーの幸運

(i) 火星は運動が速く、ティコの観測データが豊富にあった。

(ii) 火星の軌道の離心率 e が大きかった。($e = 0.093$)



a ; 長半径

F_1, F_2 ; 焦点

b ; 短半径

$e = \frac{c}{a}$; 離心率

1619年 第三法則の発見

$$T^2/a^3 = \text{const.}$$

T ; 周期

a ; 長半径

各惑星の軌道と速度の関係

(木星の衛星系などでも成立……定数値は異なる。)

§ 2. ケプラーの法則から万有引力の法則へ

惑星の軌道と周期

惑星	a (天文単位)*	公転周期 T (太陽年)**	$\frac{a^3}{T^2}$	離心率***
水星	0.387	0.24	1.00	0.2056
金星	0.723	0.62	0.98	0.0068
地球	1.00	1.00	1.00	0.0167
火星	1.52	1.88	0.993	0.0934
木星	5.20	11.9	0.992	0.0483
土星	9.54	29.5	0.998	0.0560
天王星	19.2	84.1	1.00	0.0461
海王星	30.1	165	1.00	0.0101
めい王星	39.5	249	0.994	0.2485

* 1 天文単位 = 1.49600×10^8 km

** 1 太陽年 = 365.24 日

*** 長軸 2a, 短軸 2b
$$\text{離心率} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

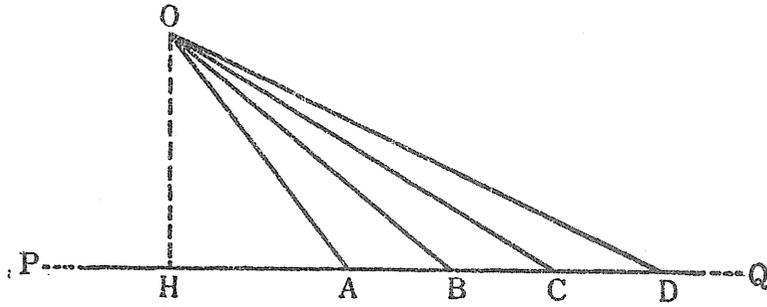
木星のガリレオ衛星 (1610年発見) の軌道と周期

衛星	軌道長半径 R*	周期 T (day)	$\frac{R^3}{T^2}$	離心率
Io	5.91	1.77	65.9	0.0000
Europa	9.40	3.55	65.9	0.0003
Ganymede	14.99	7.15	65.9	0.0015
Callisto	26.36	16.69	65.8	0.0075
Metis**	1.79	0.2949	65.9	~ 0

** 1979年 Voyager により最も新しく発見された衛星

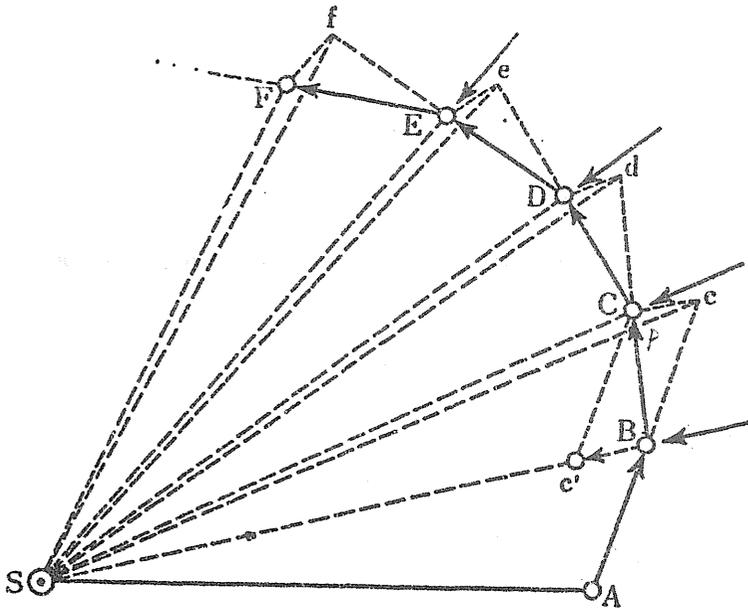
問 1. $\frac{a^3}{T^2}$ と $\frac{R^3}{T^2}$ を求めよ。

1. 面積速度が一定 \longleftrightarrow 力がはたらく場合、その力は中心力である。



力がはたらかない場合、任意の点 O に関する面積速度は一定

問 2. 上記を説明せよ。

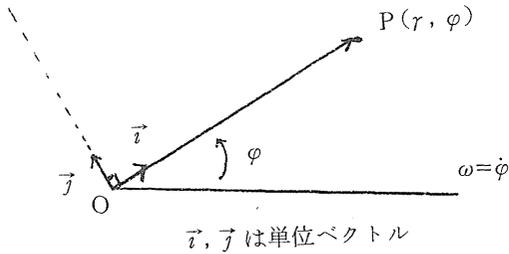


力が撃力でその力が中心 S を向いている場合

問 3. 上記の場合、面積速度一定を説明せよ。

○ 一般的証明

運動方程式の極座標表示



点 P の運動を極座標で考える

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\vec{i} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{i} + r\frac{d\vec{i}}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{i} + r\omega\vec{j} \\ &= v_r\vec{i} + v_\phi\vec{j}\end{aligned}$$

v_r : 速度の動径方向成分

v_ϕ : 速度の偏角方向成分

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{i} + \dot{r}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{r}\omega\vec{j} + r\omega\frac{d\vec{j}}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\cdot\vec{j} \\ &= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{i} + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\vec{j} \quad (\because \frac{d\vec{i}}{dt} = \omega\vec{j}, \frac{d\vec{j}}{dt} = -\omega\vec{i}) \\ &= a_r\vec{i} + a_\phi\vec{j}\end{aligned}$$

運動方程式の r 方向と ϕ 方向成分

$$f_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\omega^2)$$

$$f_\phi = ma_\phi = m(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}) = m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\omega)$$

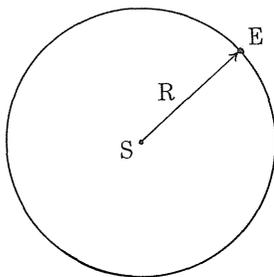
問 4. 上記を利用して、中心力 \iff 面積速度一定 を示せ。

2. ケプラーの第三法則 $R^3/T^2 = \text{一定}$ から太陽が地球に及ぼす力は太陽—地球間の距離 R の逆 2 乗に比例することを導出する。

地球の公転軌道の長半径を R とすると離心率 e が約 0.017 だから、短半径 b は

$$b = R\sqrt{1-e^2} = R\sqrt{1-(0.017)^2} = 0.99986 R$$

となり、地球の公転軌道を円とみなしてよいことがわかる。



問 5. 太陽の惑星に関するケプラー一定数を k_s とすると、これは惑星に無関係で太陽のみのデータを含む定数であることを説明せよ。

問 6. 作用・反作用の法則を用いることにより $k_s \propto M_s$ (M_s : 太陽質量) を説明せよ。

3. ニュートンの入神の業績 —月もリンゴと同じように落ちる—

(月のデータを用いて地上の重力加速度を導出する)

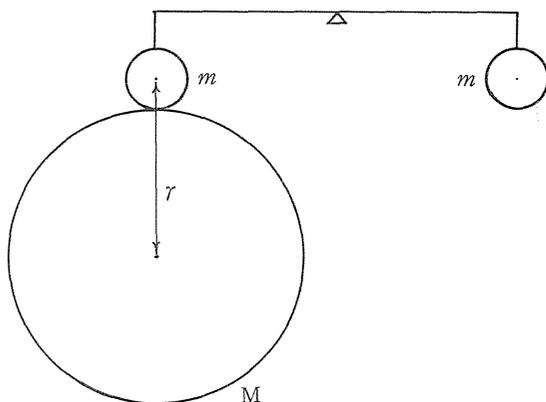
問7. 地球の衛星(月, 人工衛星)に関するケプラー定数を k_e とすると, 地上の重力加速度

g は $g = 4\pi^2 k_e / R_e^2$ (R_e : 地球の半径) と表すことができることを示せ。

問8. 月の公転半径 $R_M = 3.844 \times 10^5$ [km], 公転周期 $T_H = 27.32$ [日], 地球の極半径

$R_e = 6.357 \times 10^3$ [km] としたとき, 重力加速度 g の値を求めよ。

4. 地上の実験により地球の質量を測定する方法 —ボイスの方法—



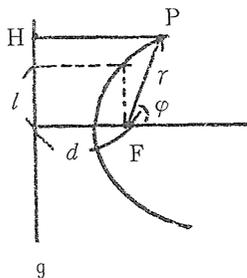
質量 m の小球に質量 M の大球を近づけたとき, 天びんのバランスをくずさないためには右の小球に質量 Δm を附加しなければならない。

問・大球と小球間の距離を r , 地球の半径を R_e としたとき, 地球の質量を $m, \Delta m, M, r, R_e$ を用いて表せ。

問9. 小球の半径を10 cm, 大球の半径を50 cm, 密度をそれぞれ等しく 20 [g/cm^3] としたとき, 大球と小球の間にはたらく万有引力の最大値を求めよ。

5. 惑星が楕円軌道を描くなら, 太陽が惑星に及ぼす力は距離の逆2乗に比例する。

補1. 二次曲線の定義



点 P から定点 F 及び定直線 g に至る距離の比が一定値 e に等しい点 P の軌跡を2次曲線と定義する

$$\overline{PH} = d + r \cos \varphi \quad \overline{PF} = r$$

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{r}{d + r \cos \varphi} = e \quad \therefore r = \frac{de}{1 - e \cos \varphi}$$

$de = l$ とすると

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \varphi}$$

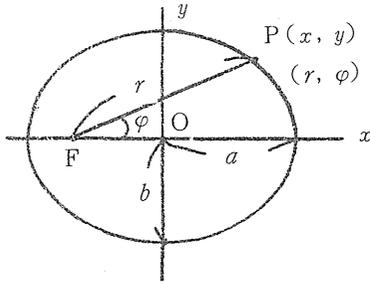
$e = 0$ 円

$0 < e < 1$ 楕円

$e = 1$ 放物線

$e > 1$ 双曲線

補2. 楕円の式の x - y 座標から極座標への変換



$$\text{楕円の式 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{①}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} \quad \text{②}$$

$$\overline{OF} = ae \quad \text{③}$$

$$x = r \cos \varphi - ae \quad \text{④}$$

$$y = r \sin \varphi \quad \text{④}$$

①式に②, ③, ④を代入

$$\frac{(r \cos \varphi - ae)^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$$(1-e^2)(r^2 \cos^2 \varphi + a^2 e^2 - 2aer \cos \varphi) + r^2 \sin^2 \varphi = a^2(1-e^2)$$

$$r^2(1-e^2 \cos^2 \varphi) - 2(1-e^2)ae \cos \varphi \times r - a^2(1-e^2)^2 = 0 \quad \text{⑤}$$

$a(1-e^2) = l$ とすると ⑤式は

$$(1-e^2 \cos^2 \varphi)r^2 - 2le \cos \varphi \times r - l^2 = 0 \quad \text{⑤'}$$

⑤' を r について解くと

$$r = \frac{le \cos \varphi \pm \sqrt{l^2 e^2 \cos^2 \varphi + (1-e^2 \cos^2 \varphi)l^2}}{1-e^2 \cos^2 \varphi}$$

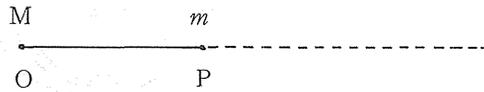
$r > 0$ より

$$r = \frac{l(e \cos \varphi + 1)}{1-e^2 \cos^2 \varphi} = \frac{l}{1-e \cos \varphi}$$

問10. 楕円の極座標表示式を用いて, 命題 5. を説明せよ。

§ 3. 万有引力と位置エネルギー

1. 万有引力の位置エネルギーと力学的エネルギーの保存

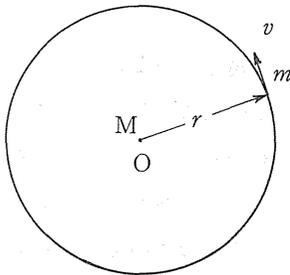


問11. 点 O に質量 M の物体がある。無限遠から $\overline{OP} = r$ となる点 P まで物体を運ぶとき、万有引力のする仕事を求めよ。

問12. 無限円を位置エネルギー E_p の基準点としたとき、点 P にある質量 m の物体の位置エネルギーを求めよ。

問13. $r = 0$ に位置エネルギーの基準点をとってはならない理由を考えよ。

問14.



質量 m の小物体が半径 r の円周上を速さ v で等速円運動している。

この物体の全力学的エネルギー E が

$$E = -\frac{GmM}{2r}$$

となることを説明せよ。

問15. 地球の引力から脱出するのに必要な速度（第2宇宙速度）が地球すれすれにまわる人工衛星の速度（第1宇宙速度）の $\sqrt{2}$ 倍になることを説明せよ。

問16. 重力加速度 $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ （ R_e : 地球の半径, M_e : 地球の質量）

となることを用いて、地表面から h の高さにある質量 m の物体の位置エネルギーが mgh になることを万有引力の位置エネルギーから求めなさい。

2. 潮汐（潮の干満）

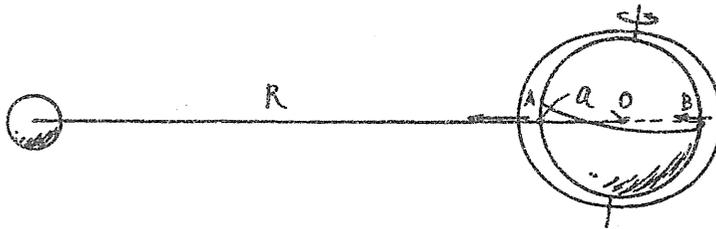


図4.9 二つの潮のふくらみは月に対して相対的に見れば動かず、その内側で地球が1日1回の自転を行っていることになる

月が地表面上の点 A, B 及び中心 O に及ぼす力の大きさが異なることによって潮の干満が生ずる。

問17. 月と地球の間の距離を R , 月の質量を M , 地球の半径を a , 万有引力定数を G とし

たとき, 月が A 点にある単位質量に及ぼす力は O 点にある場合にくらべて $\frac{2aGM}{R^3}$ だけ大きく, B 点にある場合は $\frac{2aGM}{R^3}$ だけ小さくなることを説明せよ。

太陽も潮に関係している。しかし、それは月が潮を持ち上げるのとくらべ半分以下の効果しかない。太陽が地球を引く力が月の引力のほぼ 200 倍以上であることを知っている。これはわかりにくいことが多いようである。なぜ太陽は月よりも 200 倍以上強く（少なくとも同じくらい）潮をひき起こさないのだろうか。それは、太陽が地球の近い側を引っばる力と地球の遠い側を引っばる力の差が、月のときほど大きくないということである。地球の遠い側と近い側の差の 12,740 キロメートル（地球の直径）は、太陽からの 1 億 5 千万キロメートルと比較すると小さな差である。そのため、太陽の万有引力は非常に大きいけれども、その引力は地球の両側でほとんど等しく、地球の海水をほんのわずかに引き延ばすだけである。したがってほんの小さな潮のふくらみを生み出すにすぎない。月による重力はずっと小さいけれども、地球の近くと遠くの両側での月の引力の差はずっと大きい。地球の月から最も遠い部分と近い部分の差 12,740 キロメートルは地球から月への 384,000 キロメートルの 30 分の 1 である。しかし、この 12,740 キロメートルは地球から太陽への 1 億 5 千万キロメートルの距離のほんの約 $1/12,000$ である。この理由から、月による重力の差は、太陽のそれよりも大きい効果をもつのである。



太陽の引力と月の引力とが助け合うとき、大潮が生ずる。



太陽の引力と月の引力が直角になるとき、小潮になる

図4.10

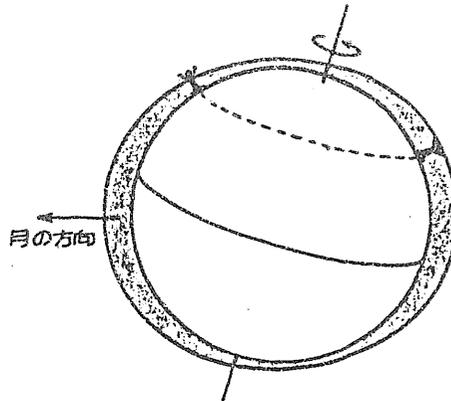


図4.11 1日に起こる2回の満潮の違い。地軸が傾いているために、北半球の人は、月に近い側に来たときには低い満潮、半日後に反対側に来たときには高い満潮をみる。この違いは、月と太陽の位置によって変化する

3. 万有引力の作用で運動する物体の軌道とエネルギー

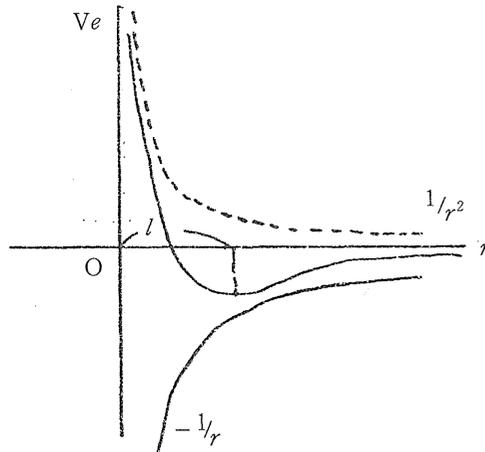
力学的エネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}$$

$$\frac{E}{m} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{2GM}{r}$$

$$r^2 \dot{\phi} = h \quad (\text{面積速度一定より})$$

$$\begin{aligned} \frac{2E}{m} &= \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} \\ &= \dot{r}^2 + V_e \end{aligned}$$



$$V_e = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} \quad \text{：実効ポテンシャル}$$

(1) $V_e(\text{min})$ が円軌道になること

$$\frac{dV_e}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{2h^2}{r^3} + \frac{2GM}{r^2} = 0 \rightarrow r = \frac{h^2}{GM} = l \quad \text{とする。 (3-1)}$$

$$\rightarrow l = \frac{l^4 \dot{\phi}^2}{GM} = \frac{l^2 v^2}{GM} \quad (r\dot{\phi} = v \text{ より})$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{GM}{l} \quad \text{等速円運動の運動方程式} \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \text{ より}$$

$$v^2 = \frac{GM}{l} \quad \text{従って} \quad \underline{V_e(\text{min}) \text{ の軌道は円}}$$

$$E(\min) = \frac{mVe(\min)}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{G^2 M^2}{h^4} - \frac{2G^2 M^2}{h^2} \right) = \frac{-mG^2 M^2}{2h^2} = -\frac{mG^2 M^2}{2l^2 v^2}$$

$$= -\frac{mG^2 M^2}{2l^2 \frac{GM}{l}} = -\frac{mGM}{2l}$$

(2) 軌道の種類

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{2E}{m} = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{h^2}{r^4} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \cdot \frac{h}{r^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 h^2 + h^2 u^2 - 2GMu$$

$$u = \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi} \frac{dr}{du} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}$$

$$\rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2E}{mh^2} + \frac{G^2 M^2}{h^4} - \left(u - \frac{GM}{h^2} \right)^2$$

$$u - \frac{GM}{h^2} = u' \quad K = \frac{2E}{mh^2} + \frac{G^2 M^2}{h^4} \quad u' = \sqrt{Ky}$$

$$K \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2 = K(1-y^2)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \pm \sqrt{1-y^2} \quad y = \cos\theta \quad dy = -\sin\theta d\theta$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sin\theta d\theta}{\sin\theta} = \mp d\varphi$$

$$\theta = \mp\varphi + C$$

↓

$$\cos^{-1}y = \mp\varphi + C \quad \rightarrow \quad y = \cos\varphi \quad (C=0 \text{ とする})$$

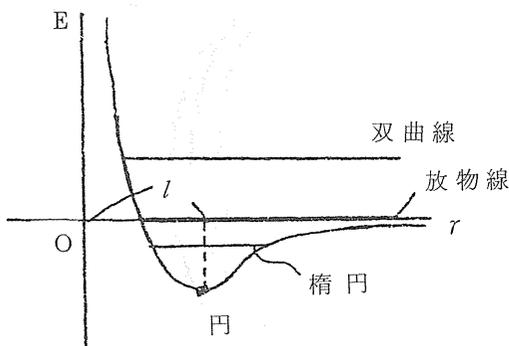
$$\rightarrow \frac{u - \frac{GM}{h^2}}{\sqrt{K}} = \cos\varphi \quad \rightarrow \quad u = \frac{1 + \frac{h^2}{GM} \sqrt{K} \cos\varphi}{\frac{h^2}{GM}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{mG^2 M^2}} \cos\varphi}{\frac{h^2}{GM}} = \frac{1 + e \cos\varphi}{l}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{mG^2 M^2}} \quad (3-2)$$

$$l = \frac{h^2}{GM}$$

$e = 1$	放物線の場合	$E = 0$
$e = 0$	円の場合	$E = -\frac{mG^2M^2}{2h^2}$
$0 < e < 1$	楕円の場合	$E < 0$
$e > 1$	双曲線の場合	$E > 0$



$$\dot{r}^2 > 0 \text{ より } E > \frac{mVe}{2}$$

$$r = \frac{l}{1+e \cos \varphi} \quad (3-3)$$

4. ケプラーの第 1, 第 2 法則から第 3 法則を導く

楕円の長半径 a は (3-3) 式で $\varphi = 0$ と π の相加平均となるから

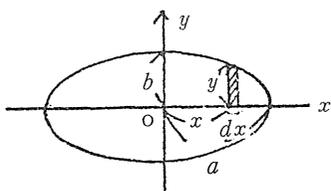
$$a = \left(\frac{l}{1+e} + \frac{l}{1-e} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{l}{1-e^2} \quad (4-1)$$

(3-1)、(3-2) を代入すると

$$a = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 - \left(1 + \frac{2h^2 E}{mG^2 M^2} \right)} = -\frac{mGM}{2E} = \frac{mGM}{2|E|} \quad \left(\because E = -\frac{mGM}{2a} \right) \quad (4-2)$$

$$\text{他方 (4-1) より短半径 } b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{l}{\sqrt{1-e^2}} = h\sqrt{\frac{m}{2|E|}} = h\sqrt{\frac{a}{GM}}$$

補 楕円の面積 S



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

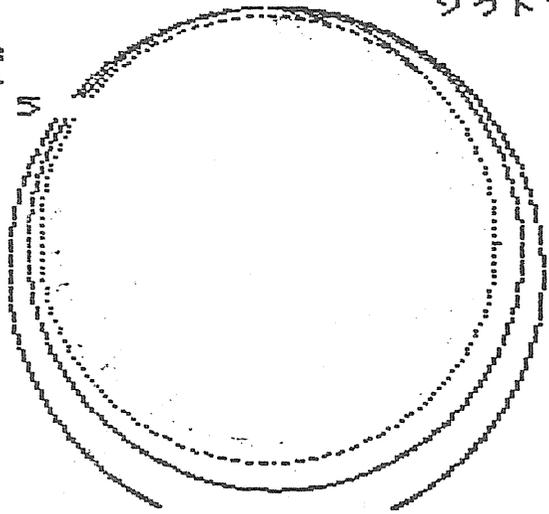
$$x = a \sin \theta \text{ とおくと } dx = a \cos \theta \cdot d\theta$$

$$S = 4 b a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \pi ab$$

H=255 km

T = 1
= 1
= 1
= 1

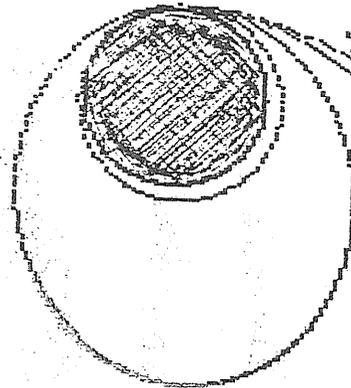
ソクトニ = 1
= 1
= 1
= 1



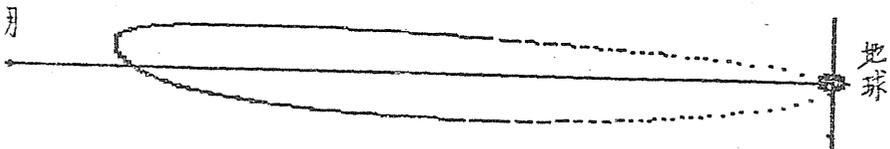
H=320 km

T = 1
= 1
= 1
= 1

ソクトニ = 1
= 1
= 1
= 1

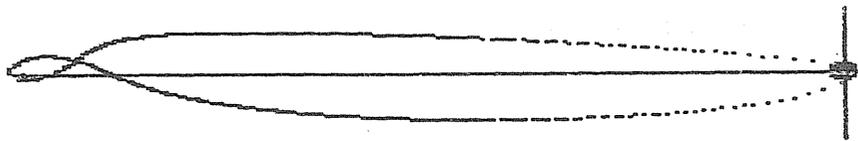


ソクトニ = 1
= 1
= 1
= 1



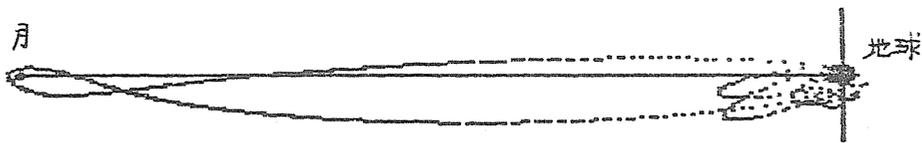
ソクトニ = 1
= 1
= 1
= 1

CX-
 III
 PNN
 004 . 72 C = 24.20
 PNV
 000



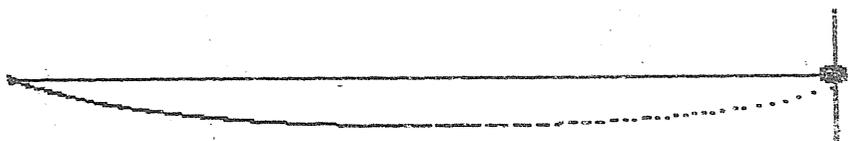
11.059

CX-
 III
 PNN
 006 . 01 C = 4.56
 PNV
 000



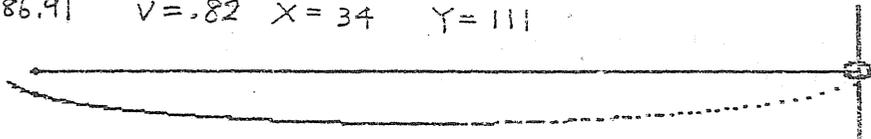
11.063

CX-
 III
 000
 004 . 04 C = 9.00
 PNV



11.07

T=86.91 V=.82 X=34 Y=111



11.082
 54 0000

問18. ケプラーの第1法則と第2法則から $a^3/T^2 = \frac{GM}{4\pi^2}$ (第3法則) を導出せよ。

5. 人工衛星の周期, 速度と第3宇宙速度

問18. の結果を用いて人工衛星の周期を求めてみよう。

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_e}} (R_e + h)^{3/2}$$

T : 人工衛星の周期

R_e : 地球の半径

h : 人工衛星の高度

M_e : 地球の質量

$GM_e = g R_e^2$ を用いると

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{(R_e + h)^{3/2}}{R_e}$$

$g = 9.83 \text{ m/s}^2$, $R_e = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ を用いると

$$T = 3.15 \times 10^{-7} \times (R_e + h)^{3/2}$$

問19. 人工衛星「てんま」は $h = 500 \text{ km}$ の高度を真円軌道を描いてまわっている。この人工衛星の周期を求めよ。

問20. (4-2) 式とエネルギー保存則を用いて, 人工衛星の速度 v が

$$v = \sqrt{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) g R_e^2} = v_{II} \sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) R_e}$$

となることを導出しなさい。

r : 地球中心から人工衛星までの距離

a : 衛星の平均半径

v_{II} : 第2宇宙速度 (約 11.2 km/s)

問21. 人工衛星「きょくこう」は地表面から近点 $6.42 \times 10^5 \text{ m}$ と遠点 $39.8 \times 10^5 \text{ m}$ の間を楕円軌道を描いて運動している。近点と遠点における速さを求めよ。

問22. 地球の公転半径を $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$, 公転周期を 365.25 日としたとき公転速度の大きさを求めよ。

人工衛星が地球と太陽の引力を振りきって太陽系から脱出するのに必要な速度を第3宇宙速度と言っている。

先ず、慣性系からみて、人工衛星が太陽の引力（とりあえず、地球の引力は考えない）を振りきるのに必要な速さ V を考えてみよう。

問23. $V = \sqrt{2}V_e$ を証明し、問22. の結果を利用し、この値を求めよ。

V_e : 地球の公転速度

次に、この人工衛星を地球の公転方向に打ち出すとすると、地球からみた衛星の速さ V' は $V' = (\sqrt{2} - 1)V_e$ となる。

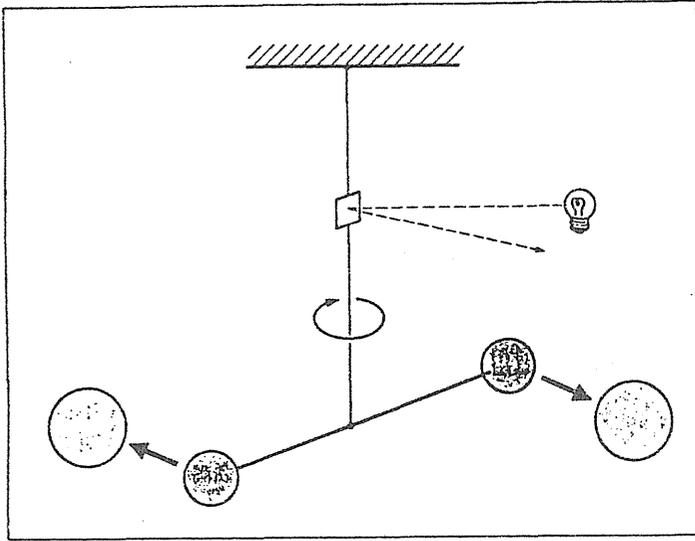
問24. V' の値を求めよ。

さて、次に地球の引力の効果を考えてみよう。

問25. エネルギー保存則を利用して、第3宇宙速度 v_{III} が

$$v_{III} = \sqrt{V^2 + 2gR_e} = \sqrt{V'^2 + v_{II}^2}$$
 になることを説明し、その値を求めよ。

(万有引力はこれでおしまい)



〈図2〉 キャベンディッシュのねじれ平衡装置

附 録

重力質量と慣性質量

かとはいえ、このような θ の物質依存性は重力加速度のみかけ上の物質依存性として観測されるはずである。

ここでガリレイが登場する。

重力質量と慣性質量の等価性

ガリレイがピサの斜塔から鉄の球と木の球を同時に落とすと、2つの球は彼の子想どおり同時に石だたみに達した〈図1〉。この実験で、物質が異なってもそれに働く重力加速度は同じであることが証明された、と言われている。歴史家によれば、この実験が実際に行われた証拠はなく、振り子の周期の等時性などに気づいていたガリレイなら当然考えたであろう実験、ということらしい。その後ニュートン力学が確立されると、この“斜塔の実験”のもつ意味がいつそう明確になる。

力学の第2法則を $F=ma$ と書くときの質量 m を慣性質量とよび、万有引力の法則

$$F = -Gm_1m_2/r^2$$

に出てくる質量を重力質量とよぶ。慣性質量と重力質量は独立な概念で、その値が等しいか否か、より正確に言うと、その比が物質によらない普遍量であるか否かは実験によって検証すべきことである。重力加速度は重力質量と慣性質量の比に比例するので、“斜塔の

実験”は質量の等価性を証明したことになる。質量の等価性は、振り子の周期が錘の種類によらないことからニュートン自身も 10^{-3} の精度で確かめている。等価性の実験精度は19世紀末から20世紀にかけてのエトヴェシュ(R. Eötvös)の実験で飛躍的に上がり、のちに第五の力にかかわりをもつのだが、その前に、18世紀末に重力定数 G の大きさを高い精度で測ったキャベンディッシュ(H. Cavendish)の実験を思い出そう〈図2〉。

キャベンディッシュのねじれ平衡とよばれる装置の原理は簡単に、両端に球をつけた棒を細糸で水平に吊し、大きな質量をもつ物体を図のように球に近づけて、球と物体間の重力が水平の棒に及ぼす微弱な偶力を測るものである。糸はねじれに対して復元力があるので、棒が水平面内である角度まで回転するとねじれ力と釣り合って止まる。糸に小さな鏡をつけて光を当てておくと、回転角度が正確に測れる。1798年、キャベンディッシュはこの簡単な装置を使って、現在の G の値

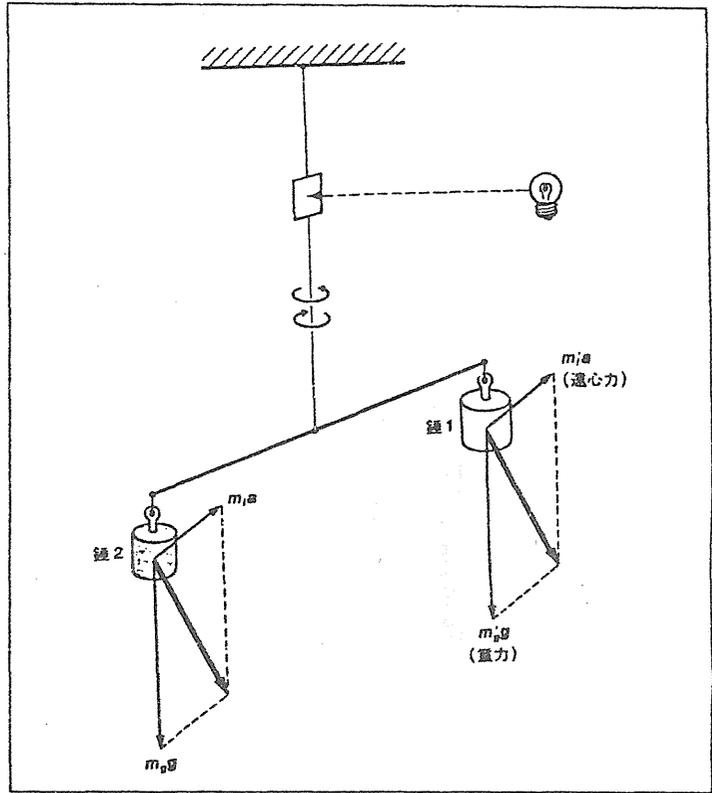
$$G = (6.6720 \pm 0.0041) \times 10^{-11} \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

と比べてわずか1%の誤差で G を測定することに成功した。1970年代に入ると、このキャベンディッシュの装置が第五の力を探求する方法の1つとして威力を発揮することになる。

キャベンディッシュから約百年後、ハンガリーの男爵ロランド・エトヴェシュはキャベンディッシュの装置を利用して、慣性質量と重力質量の比に物質ごとの差がないかどうかを高精度で測定した。地上の物体には地球による重力のほかに、地球の自転による遠心力が働くので、物体に働くみかけ上の

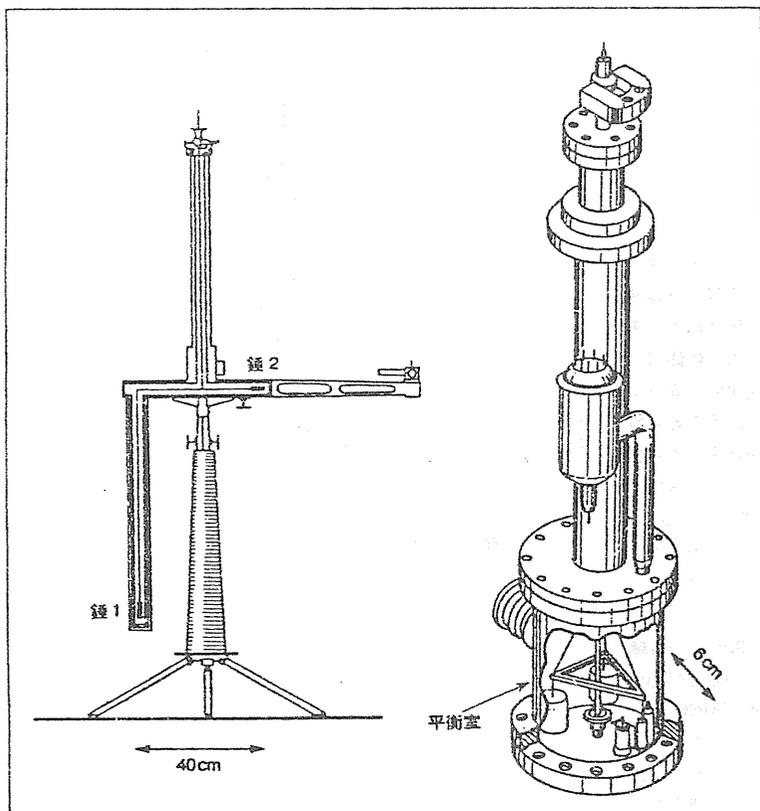
重力の方向は地球の重心から少しずれている。遠心力は地球の半径と自転角速度ならびに実験地点の緯度にもよるが、慣性質量に比例することに注目しよう。もし質量の等価性が成り立っていれば、みかけ上の重力、すなわち重力と遠心力のベクトル和はすべての物質について同じ方向を向いているはずである。一方、等価性が破れていると、みかけ上の重力は物質ごとに少しずつ異なる方向を向いている。このわずかな破れを検出するために、エトヴェシュは棒の両端に異なる物質からなる錘を付けて、糸で棒を水平に吊した(図3)。2つの錘に働く力の方向が等価性の予言どおり正確に同じならば、水平の棒に偶力が働かないが、もし等価性が破れていると、2つの錘による偶力が打ち消し合わないで水平棒が回転して糸がねじれる。1889年に最初の実験が行われ、その後協力者が加わって実験が続けられ、エトヴェシュの死後1922年に彼を含む3人の連名で最終結果が発表された¹⁾。これが有名なエトヴェシュの実験で、平衡装置の錘として、一方には白金または銅、他方には銅、硬質の木、水、硫酸銅、石綿、獣脂などを使って偶力が働くか否かを調べた。その結果 5×10^{-9} の精度で質量の等価性を検証することに成功した。

エトヴェシュが平衡実験を始めてから最終結果が出るまでの間に、物理学は飛躍的進歩をとげていた。すなわち量子論と相対論が近代物理学の基礎として確立された。ニュートンの力学が万能であった時代は終り、1916年にはアインシュタインの重力理論、すなわち一般相対論が提唱され、質量の等価性はその根本原理の中に組み込まれていた。一般相対性は、加速度をもって



相互運動する2つの座標系の間でも物理則が同じ形で書けることを要求するから、有名なエレベーターの思考実験からもわかるように、座標系の選び方によって重力質量を消去して慣性質量で記述することができるし、その逆も可能である。これは質量の等価性にほかならない。一般相対論の正しさが重力場による光の屈折や水星の近日点の移動などによって実験的に証明されたからは、その根本原理をあえて疑う人はなく、よってその帰結の1つである質量の等価性を疑う人もない。1960年代にエトヴェシュの実験はディッキー(R.H. Dickie)らによってくり返された(図4)。彼らの平衡装置は、隠れた実験誤差を抑えるために地球の公転による遠心力を利用した。周囲の物体による擾乱を防ぐ工夫として三角形の平衡棒をつくり、アルミの錘2つと金の錘1つを使って等価性の精度を 10^{-11} まで上げた。1970年代初めにモスクワ

〈図3〉エトヴェシュの平衡実験の原理
質量の添字 i と g は慣性質量と重力質量を意味する。



〈図4〉 エトヴェシュの使った平衡装置の1つ(左)と、ディッキーらの平衡装置(右)

〈図3〉に示した原理の図と異なり、エトヴェシュが実際に使った装置では、なぜか一方の鐘が他方の鐘より低い位置にとりつけられている。

で行われた実験では 10^{-12} にまで達したが、これ以上の精度を得るには、熱運動によるノイズや絶え間なく起こっている微弱な地球の振動の影響を除くために、地球を離れた空間で極低温の実験をしなければならない。宇宙飛行を利用したこのような実験では 10^{-15} ~ 10^{-18} までゆくと期待されている。

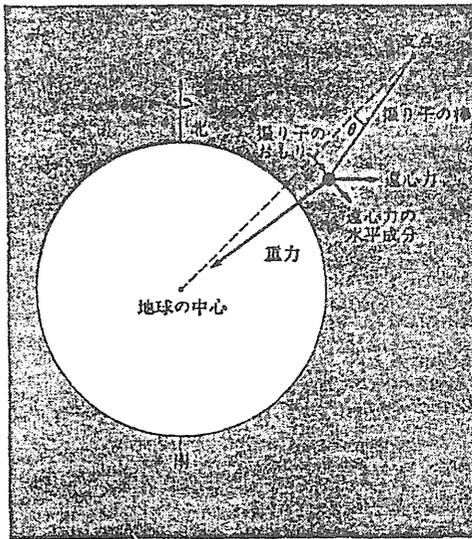


図 14.1 地球の自転による遠心力のために、振り子が鉛直から小さい角度 θ だけふれるありさまを示す。図では、角度 θ 、振り子の地表からの距離、遠心力などをすべて誇張して描いてある。

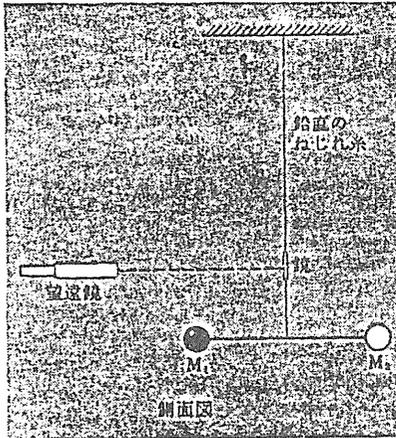


図 14.2 エートヴェッソンが慣性質量と重力質量の比を決定するのに用いたのと同様な装置の側面図。 M_1 と M_2 は重力質量が等しくて物質の種類が異なる物体である。

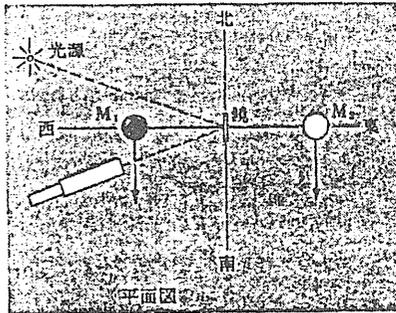


図 14.3 もし M_1 と M_2 の慣性質量が等しければ、遠心力の水平成分(矢印)は等しくなり、したがって糸をねじろうとする力は現われない。

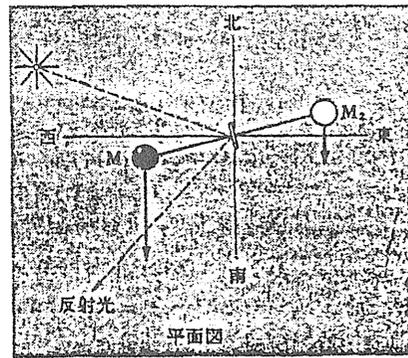
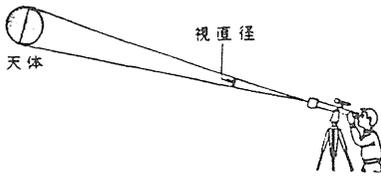


図 14.4 もし M_1 の慣性質量が M_2 の慣性質量よりも大きければ、糸をねじろうとする力が現われて糸は回転する。

地 学 ノ ー ト 89

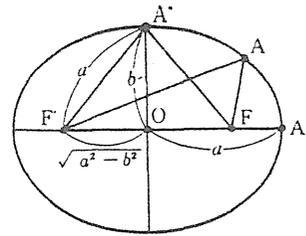
〔 考 察 7 〕 惑星運動の規則性について考えよう。



① 天体の視直径

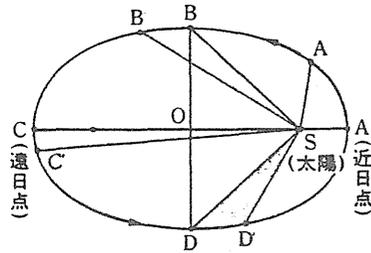
② 30日ごとの太陽の視直径と距離

1981年	太陽の視直径	地球から太陽までの距離 (天文単位)
1月6日	32' 35"	0.983
2 5	32 29	0.986
3 7	32 17	0.992
4 6	32 0	1.008
5 6	31 45	1.008
6 5	31 34	1.014
7 5	31 30	1.016
8 4	31 34	1.014
9 3	31 45	1.008
10 3	32 1	1.005
11 2	32 17	0.992
12 2	32 29	0.985



楕円は F, F' を焦点とし、この2点からの距離の和が一定の点 A の軌跡である。図からわかるように、 $A'F + A'F' = 2a$ だから、 $A'F = A'F' = a$ 、 $OF = OF' = \sqrt{a^2 - b^2}$ である。また、 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ を離心率といい、 e であらわす。

③ 楕円の性質



面積 $ASA' = BSB' = CSC' = DSD'$

④ 面積速度の一定

⑤ ケプラーの法則

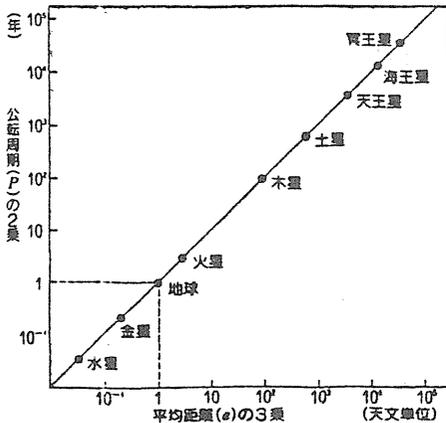
第一法則 惑星は、太陽を焦点の1つとする楕円軌道を公転する。

第二法則 惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間にえがく面積は、惑星によってそれぞれ一定である。

第三法則 惑星の太陽からの平均距離の3乗と公転周期の2乗との

比は、惑星によらず一定である。

⑥ ケプラーの第三法則



惑星	軌道長半径 a (平均距離)天文単位	対恒星平均周期 P (太陽年)	$\frac{a^3}{P^2}$
水星	0.3871	0.2409	0.9995
金星	0.7233	0.6152	0.9998
地球	1.0000	1.0000	1.0000
火星	1.5237	1.8809	0.9999
ケレス	2.767	4.602	1.0000
木星	5.2028	11.862	1.0009
土星	9.5388	29.457	1.0002
天王星	19.1914	84.075	0.99997
海王星	30.0811	164.821	0.99998
冥王星	39.5294	248.541	0.99992

グラフは直線であるから、 $\log P = \frac{3}{2} \log a$

よって、 $2 \log P = 3 \log a$ したがって、 $P^2 = a^3$ 、 $\frac{a^3}{P^2} = 1$

〈参 考〉

半径 a , 角速度 ω の等速円運動を考えてみる。(90-①) $\left(\omega = \frac{d\varphi}{dt}\right)$

$x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ の関係は常に成立するから,

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = a \frac{d}{dt} \cos \varphi = a \frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = -a \sin \varphi \cdot \omega \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = a \frac{d}{dt} \sin \varphi = a \frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = a \cos \varphi \cdot \omega \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

従って, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 \omega^2 \sin^2 \varphi + a^2 \omega^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{a^2 \omega^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = a\omega$ --- (2)

この速度 v の方向と x 軸となす角を θ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{v_x}{v} = -\sin \varphi = \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \theta &= \frac{v_y}{v} = \cos \varphi = \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \therefore \theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

従って, 速度の方向は, 90-① のOPに垂直である。

(第1象限では, $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dt} > 0$ であるから, 速度が φ の増す向きになっている)

さらに, 等速円運動の加速度 a を考えてみる。(90-②)

(1)から, $a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega \cos \varphi \cdot \omega = -a\omega^2 \cos \varphi$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -a\omega \sin \varphi \cdot \omega = -a\omega^2 \sin \varphi$$

そこで加速度ベクトルの大きさは, $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a\omega^2$

$\left((2) \text{から } \omega = \frac{v}{a} \text{ だから } |a| = \frac{v^2}{a} \right)$

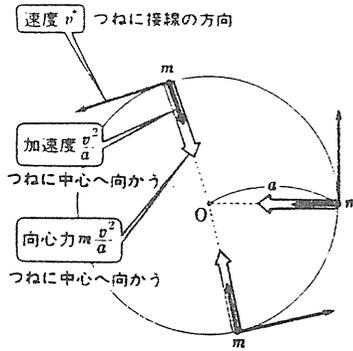
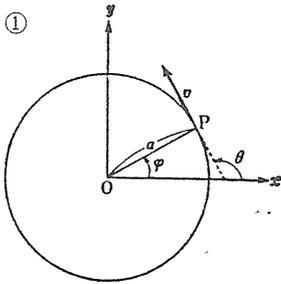
この加速度の方向は, 90-②の θ を知ればよいから

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x} = \tan \varphi \quad \therefore \theta = \varphi \text{ あるいは } \theta = \varphi + \pi$$

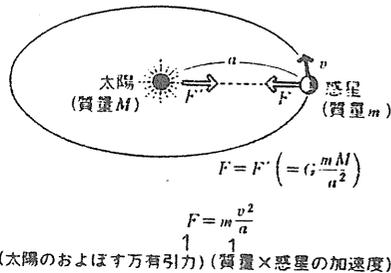
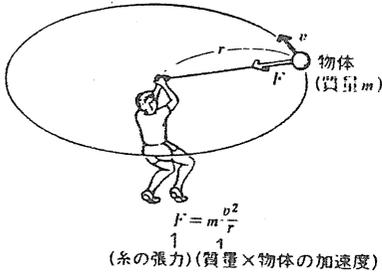
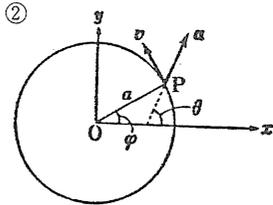
すなわち, a の方向はOPの方向と一致するが, Pが第1象限にある時,

$a_x < 0$, $a_y < 0$ でなければならない。このことは a の向きが \overrightarrow{OP} と反対であることを意味する。

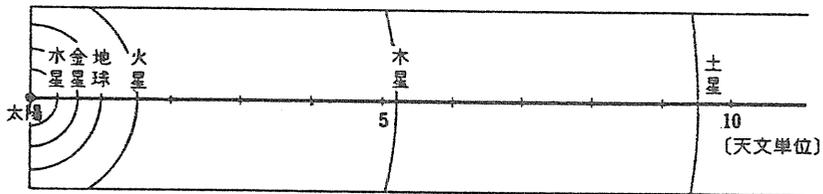
従って, 加速度 a は, $\left\{ \begin{array}{l} \text{大きさ: } \frac{v^2}{a} \\ \text{方 向: OP の方向} \\ \text{向 き: 中心に向かう} \end{array} \right.$



③ 等速円運動の向心力



④ 万有引力



⑤ 当時知られていた惑星軌道の一部

⑥ ボーデの法則による距離と実際の距離

惑星	水星	金星	地球	火星	小惑星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
n	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ボーデによる	0.4	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6	38.8	77.2
実際	0.39	0.72	1.0	1.52	2.65	5.20	9.54	19.2	30.1	39.5