Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. II.

Von Takeo NAKASAWA

(Eingegangen am 28. November, 1935)

Einleitung.

In der vorliegenden Schrift, welche eine Fortsetzung meiner früheren Arbeit[13] ist, soll die Geometrie des zweiten Verknüpfungsraumes $\mathfrak{V}_2$ (Def. VI, §1) aufgebaut werden, und zwar, nach der Herstellung der Hilfsbegriffen, wie Primzyklen (Def. VII, §4), linearer Primraum (Def. VIII, §3), Trennung der linearen Räume (Def. IX, §4), Trennung der Elemente (Def. XI, §5), wollen wir als Hauptresultat dieser Arbeit einen Zerlegungssatz des linearen Raumes (Satz 62, §4), sowie unseren $\mathfrak{V}_2$-Raumes (Satz 63, §5), bzw. in die direkte Summe von linearen Primräummen, sowie von Primverknüpfungsräumen angeben.

Bezeichnungen.

Ausser den Bezeichnungen, die wir in meiner früheren Arbeit[13] benutzen, wollen wir einige neue, 1, 7, 8, 11, hinzufügen:

1.	$\therefore$	bedeutet "also".
2.	$A \rightarrow B$	bedeutet, dass aus A B folgt.
3.	$A \longleftrightarrow B$	bedeutet, dass $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$.
4.	A, B	bedeutet, dass A und B.
5.	A_i, $(i = 1, \cdots, k)$	bedeutet, dass A_1, A_2, $\cdots$, und A_k.
6.	A oder B	bedeutet, dass mindestens eins von A und B.
7.	A_1 od. $\cdots$ od. A_k	bedeutet, dass mindestens eins von A_1, A_2, $\cdots$ und A_k.
8.	z. B. A_1	bedeutet, dass A_1 od. A_2 od. $\cdots$ od. A_k.
9.	$A \rightarrow W$.	bedeutet, dass A zum Widerspruch gerät.
10.	$A -(S)\rightarrow B$	bedeutet, dass auf Grund des Aussages S aus A B folgt.

(13) T. NAKASAWA, „*Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I*", Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, Volume 2, No. 43, (p. 235 – p. 255).

11. Ez, A_z bedeutet, dass ein Element z mit der Eigenschaft A_z existiert.

12. $\left.\begin{matrix} A_1, \\ \vdots, \\ A_k \end{matrix}\right\} \rightarrow B$ bedeutet, dass aus dem gleichzeitigen Bestehen der k Aussagen A_1, A_2, $\cdots$, A_k B folgt.

13. $A \rightarrow \left\{\begin{matrix} B_1, \\ \vdots, \\ B_k \end{matrix}\right.$ bedeutet, dass aus A gleichzeitig die k Aussagen B_1, B_2, $\cdots$, B_k folgt.

14. Die folgenden Bezeichnungen von Mengenlehre werden auch noch benutzt, wie sie gewöhnlich bedeuten; $\geqq$, $\not\geqq$, $\supset$, $\not\supset$, $=$, $\neq$, $\ni$, $\not\ni$, $+$, u. s. w.

ZWEITES KAPITEL

Der $\mathfrak{V}_2$-Raum.

Das vorliegende Axiomensystem unterscheidet sich von dem in meiner früheren Arbeit(13) angenommenen dadurch, dass erstens im Axiom 1* die Bedingung $a \neq 0$ erfüllt werden soll, und dass zweitens noch das letzte Axiom, d. h. die Existenz des Durchschnittselementes, zugefügt wird. Daher ist der $\mathfrak{V}_2$-Raum eine Verengung des früher betrachteten $\mathfrak{V}_1$-Raums.

§ 1. Axiome.

Grundannahme: Wir denken uns eine gewisse Menge von Elementen; $\mathfrak{V}_2 \ni a_1, a_2, \cdots, a_s, \cdots$. Für gewisse Reihen der Elemente, die wir *Zyklen* nennen wollen, denken wir dazu die Relationen "*gelten*", in Zeichen $a_1 \cdots a_s = 0$, gewöhnlich in kurzen Zeichen, $a_1 \cdots a_s$, bzw. "*nicht gelten*", in Zeichen $a_1 \cdots a_s \neq 0$. Diese Relationen sollen nun folgenden Axiomen genügen;

Axiom 1.* (Reflexivität) : $a \neq 0$, aa.

Axiom 2. (Folgerung) : $a_1 \cdots a_s \rightarrow a_1 \cdots a_s x$, $(s = 1, 2, \cdots)$.

Axiom 3. (Vertauschung): $a_1 \cdots a_i \cdots a_s \rightarrow a_i \cdots a_1 \cdots a_s$, $(s = 2, 3, \cdots; i = 2, \cdots, s)$.

Axiom 4. (Transitivität) : $a_1 \cdots a_s \neq 0$, $xa_1 \cdots a_s$, $a_1 \cdots a_s y \rightarrow xa_1 \cdots a_{s-1} y$, $(s = 1, 2, \cdots)$.

Axiom 5. (Durchschnitt): $a_1 \cdots a_s xy \rightarrow Ez, a_1 \cdots a_s z, xyz,$
$(s = 2, 3, \cdots)$.

Definition VI. Eine solche Menge $\mathfrak{V}_2$ heisst der *zweite Verknüpfungsraum*, in kurzen Worten, **$\mathfrak{V}_2$-Raum.**

V_2. **1.** Nehmen wir uns die Menge von allen Punkten des klassichen n-dimensionalen projektiven Raumes als $\mathfrak{V}_2$-Raum, und nennen wir von gewissen darin liegenden linearen abhängigen, bzw. unabhängigen Reihen von Punkten als gelten, bzw. nicht gelten, so sind ersichtlich die Grundannahme, sowie die Axiome 1*, 2, 3, 4, 5 erfüllt. Daher zeigt sich der projektive Raum eine typische Darstellung des $\mathfrak{V}_2$-Raumes in Bezug auf der linearen Abhängigkeit der Punktreihen. Also von jetzt an, werden wir oft die Wörter "Punkt" statt "Element", oder "linear abhängig", bzw. "linear unabhängig" statt "gelten" bzw. "nicht gelten" Gebrauch machen.

V_2. **2.** Wie oben gesagt ist ein beliebiger $\mathfrak{V}_2$-Raum auch ein $\mathfrak{V}_1$-Raum. Daher gelten alle im $\mathfrak{V}_1$-Raum bestehenden Sätze auch im $\mathfrak{V}_2$-Raum.

V_2. **3.** Ferner aus Axiom 1* folgt leicht, dass die Nullstelle[14] von $\mathfrak{V}_2$ eine leere Menge ist. Also von jetzt an, werden wir häufig die leere Menge mit dem Zeichen $\mathfrak{N}$ bezeichnen.

§ 2. Der Durchschnitt.

Satz 28. $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \rightarrow Ez, a_1 \cdots a_n z, b_1 \cdots b_m z.$

Beweis: Wir beweisen dies durch die vollständige Induktion in Bezug auf m.

(i) Falls m gleich 1 ist, dann ergibt sich

$$a_1 \cdots a_n b_1 \text{ —(Axiom 1*)}\rightarrow Eb_1, a_1 \cdots a_n b_1, b_1 b_1.$$

(ii) Falls m gleich 2 ist, dann ergibt sich

$$a_1 \cdots a_n b_1 b_2 \text{ —(Axion 5)}\rightarrow Ez, a_1 \cdots a_n z, b_1 b_2 z.$$

(iii) Nun genügt es zu zeigen, dass aus dem Fall $[m-1]$ der Fall $[m]$ folgt.

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m &\rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-2} b_{m-1} b_m \\ &\text{—(Axiom 5)}\rightarrow Ey, a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-2} y; b_{m-1} b_m y. \end{aligned}$$

(14) Vgl. a. a. O. p. 237!

$$a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-2}\, y \;-[m-1]\rightarrow Ez\;,\; a_1 \cdots a_n z\;,\; b_1 \cdots b_{m-2}\, yz\;.$$

Dann besteht

$$b_1 \cdots b_{m-2}\, yz\;,\; b_{m-1} b_m y \;-(\text{Zusatz 2 zum Satz 24})\rightarrow b_1 \cdots b_{m-2} b_{m-1} b_m z.$$

Daher $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \rightarrow Ez\;,\; a_1 \cdots a_n z\;,\; b_1 \cdots b_m z$,

w. z. b. w.

Satz 29. Rang $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ + Rang $\mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ = Rang $\mathfrak{R}_1$ + Rang $\mathfrak{R}_2$; in Worten: Die Summe der Ränge des Durchschnittes und des Vereinigungsraumes zwei gegebener linearer Räume ist gleich der Summe der Ränge der zwei linearen Räume.

Beweis: Sei die Basis von $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ $c_1 \cdots c_k$, und seien die Basen von $\mathfrak{R}_1$, und $\mathfrak{R}_2$ bzw. je $c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n$, und $c_1 \cdots c_k b_{k+1} \cdots b_m$, so folgt nach Satz 18,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = \mathfrak{V}(c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n b_{k+1} \cdots b_m)\;.$$

Nun wäre $c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n b_{k+1} \cdots b_m = 0$, so würde sich folgern,

$$c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n b_{k+1} \cdots b_m \;-(\text{Satz 28})\rightarrow Ez,\; c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n z,\; b_{k+1} \cdots b_m z.$$

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n z \rightarrow \mathfrak{R}_1(c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n) \ni z, \\ b_{k+1} \cdots b_m z \qquad\quad\; \rightarrow \mathfrak{R}_2(c_1 \cdots c_k b_{k+1} \cdots b_m) \ni z \end{array}\right\} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \ni z \rightarrow c_1 \cdots c_k z\;.$$

$$c_1 \cdots c_k z\;,\; b_{k+1} \cdots b_m z \;-(\text{Zusatz 3 zum Satz 24})\rightarrow c_1 \cdots c_k b_{k+1} \cdots b_m \rightarrow W.$$

So muss $c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n b_{k+1} \cdots b_m \neq 0$.

Daher Rang $\mathfrak{V}(c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n b_{k+1} \cdots b_m) = n + m - k$.

Daher Rang $\mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = n + m - k$.

Anderseits,

Rang $\mathfrak{R}_1(c_1 \cdots c_k a_{k+1} \cdots a_n) = n$,

Rang $\mathfrak{R}_2(c_1 \cdots c_k b_{k+1} \cdots b_m) = m$,

Rang $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ = Rang $\mathfrak{R}_1(c_1 \cdots c_k) = k$.

Daher Rang $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ + Rang $\mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)$ = Rang $\mathfrak{R}_1$ + Rang $\mathfrak{R}_2$,

w. z. b. w.

Dies ist nichts anders als der Satz 18, beidem das Bestehen einer Ungleichung behauptet wurde. Infolge der Voraussetzung des Axioms 5 lässt sich hier das Bestehen der Gleichung beweisen.

Zusatz 1. Ist $a_1 \cdots a_n \neq 0$, $b_1 \cdots b_m \neq 0$, und Rang $(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) = s$, so existiert der Durchschnitt zweier linearer Räume $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n)$, $\mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m)$, dessen Rang gleich $n + m - s$ ist.

Zusatz 2. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n d_1 \cdots d_k),\ \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m d_1 \cdots d_k)) = \mathfrak{R}(d_1 \cdots d_k)$
$\rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m d_1 \cdots d_k \neq 0$.

Zusatz 3. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n),\ \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m)) = \mathfrak{R}$
$\rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0$.

§ 3. Primzyklen.

Definition VII. Derjenige Zyklus $a_1 \cdots a_{n+1}$ derart, dass $a_1 \cdots a_{n+1} = 0$, aber $a_1 \cdots *_i \cdots a_{n+1} \neq 0$[15], $(i = 1, \cdots, n+1)$ ist, heisst der *Primzyklus* vom Range n, und wird mit $\overline{a_1 \cdots a_{n+1}}$ bezeichnet.

Satz 30. $\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0, \\ \overline{b_1 \cdots b_m} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n b_1 \cdots *_i \cdots b_m \neq 0, \\ (i = 1, \cdots, m)\ . \end{array}\right.$

Beweis: Wäre vorläufig $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots *_i \cdots b_m = 0$, so wäre nach Satz 22,

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n b_1 \cdots *_i \cdots b_m, \\ \quad b_1 \cdots b_m \end{array}\right\} \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1} \text{ oder } b_1 \cdots *_i \cdots b_m .$$

Die beiden Ergebnisse widersprechen aber unseren Voraussetzungen;

$$a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1},\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 \rightarrow W .$$
$$b_1 \cdots *_i \cdots b_m,\ \overline{b_1 \cdots b_m} \rightarrow W .$$

Daher $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1}$ oder $b_1 \cdots *_i \cdots b_m \rightarrow W$.

Daher muss $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots *_i \cdots b_m \neq 0$, $(i = 1, \cdots, m)$.

Satz 31.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n}, \\ \overline{d_1 \cdots d_s b_1 \cdots b_m}, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_{n-1} b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 \cdots *_i \cdots d_s a_1 \cdots *_j \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots *_j \cdots a_n b_1 \cdots *_k \cdots b_m \neq 0, \\ d_1 \cdots *_i \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots *_k \cdots b_m \neq 0, \\ \quad (i = 1, \cdots, s;\ j = 1, \cdots, n; \\ \quad k = 1, \cdots, m). \end{array}\right.$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n}, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_{n-1} b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 30)\rightarrow d_1 \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 .$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{d_1 \cdots d_s b_1 \cdots b_m}, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 30) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 \cdots * \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots * \cdots b_m \neq 0. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n}, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots * \cdots b_m \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 30)\rightarrow d_1 \cdots * \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots * \cdots b_m \neq 0.$$

(15) $a_1 \cdots *_i \cdots a_{n+1}$ bedeutet $a_1 \cdots a_{i-1}\, a_{i+1} \cdots a_{n+1}$.

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n}\,, \\ \overline{d_1 \cdots d_s b_1 \cdots b_m}\,, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_{n-1} b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 \cdots * \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0\,, \\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots * \cdots b_m \neq 0\,, \\ d_1 \cdots * \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots * \cdots b_m \neq 0\,, \end{array}\right.$$

w. z. b. w.

Satz 32. $\overline{a_1 \cdots a_n x} \rightarrow Ey\,,\ \overline{a_1 \cdots a_{n-1} y}\,.$

Beweis: $a_1 \cdots a_n x$ —(Axiom 5)→ $Ey\,,\ a_1 \cdots a_{n-1} y\,,\ a_n xy\,.$

Nun wäre $a_1 \cdots *_i \cdots a_{n-1} y = 0$, so würde sich folgern,

$a_1 \cdots *_i \cdots a_{n-1} y\,,\ a_n xy$ —(Zusatz 2 zum Satz 24)→ $a_1 \cdots *_i \cdots a_n x\,.$

$a_1 \cdots *_i \cdots a_n x\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n x} \rightarrow W\,.$

So muss $a_1 \cdots *_i \cdots a_{n-1} y \neq 0\,, \quad (i = 1, \cdots, n-1)\,.$

Daher $\overline{a_1 \cdots a_{n-1} y}\,.$

Daher $\overline{a_1 \cdots a_n x} \rightarrow Ey\,,\ \overline{a_1 \cdots a_{n-1} y}\,,$ w. z. b. w.

Es ergibt sich auch der folgende Satz durch Wiederholung der Operationen des Satzes 32.

Satz 33. $n \geqq m\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n x} \rightarrow Ez\,,\ \overline{a_1 \cdots a_m z}\,.$

Satz 34. $\overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m} \rightarrow Ez\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n z}\,,\ \overline{b_1 \cdots b_m z}\,.$

Beweis: $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ —(Satz 28)→ $Ez\,,\ a_1 \cdots a_n z\,,\ b_1 \cdots b_m z\,.$

Nun wäre $a_1 \cdots *_i \cdots a_n z = 0$, so würde sich folgern,

$a_1 \cdots *_i \cdots a_n z\,,\ b_1 \cdots b_m z$ —(Zusatz 3 zum Satz 24)→ $a_1 \cdots *_i \cdots a_n b_1 \cdots b_m.$

$a_1 \cdots *_i \cdots a_n b_1 \cdots b_m\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m} \rightarrow W\,.$

So muss $a_1 \cdots *_i \cdots a_n z \neq 0\,, \quad (i = 1, \cdots, n)\,.$

Daher $\overline{a_1 \cdots a_n z}\,.$

Analog erhält man $\overline{b_1 \cdots b_m z}\,.$

Daher $\overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m} \rightarrow Ez\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n z}\,,\ \overline{b_1 \cdots b_m z}\,,$

w. z. b. w.

Satz 35. $$\left.\begin{array}{l} \overline{a_1 \cdots a_n z}\,,\ \overline{b_1 \cdots b_m z}\,, \\ a_1 \cdots a_{n-1} b_1 \cdots b_{m-1} z \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m}\,.$$

Beweis:

Einerseits ist

$a_1 \cdots a_n z,\ b_1 \cdots b_m z$ —(Zusatz 3 zum Satz 24)→ $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m\,.$

Anderseits ist

$$\left.\begin{array}{l} \overline{z a_1 \cdots a_n}\,,\ \overline{z b_1 \cdots b_m}\,, \\ z a_1 \cdots a_{n-1} b_1 \cdots b_{m-1} \neq 0 \end{array}\right\} \text{—(Satz 31)→} \left\{\begin{array}{l} a_1 \cdots * \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots * \cdots b_m \neq 0\,. \end{array}\right.$$

Daher $\overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m}$.

Satz 36.
$$\left.\begin{array}{l}\overline{da_1 \cdots a_n x}\,,\\ \overline{dby}\,,\\ da_1 \cdots a_n b \neq 0\end{array}\right\} \to Ez\,,\ \overline{da_1 \cdots a_n bz}\,.$$

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l}\overline{da_1 \cdots a_n x}\,,\ \overline{dby}\,,\\ da_1 \cdots a_n b \neq 0\end{array}\right\} -(\text{Satz } 35) \to \overline{a_1 \cdots a_n bxy}$$
$$-(\text{Satz } 33) \to Ez\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n yz}\,,\quad \text{und} \quad a_1 \cdots a_n by \neq 0\,.$$
$$\left.\begin{array}{l}\overline{a_1 \cdots a_n yz}\,,\ \overline{dby}\,,\\ a_1 \cdots a_n by \neq 0\end{array}\right\} -(\text{Satz } 35) \to \overline{da_1 \cdots a_n bz}\,.$$
$$\therefore \left.\begin{array}{l}\overline{da_1 \cdots a_n x}\,,\ \overline{dby}\,,\\ da_1 \cdots a_n b \neq 0\end{array}\right\} \to Ez\,,\ \overline{da_1 \cdots a_n bz}\,,$$
w. z. b. w.

Satz 37.
$$\left.\begin{array}{l}\overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n x}\,,\\ \overline{d_1 \cdots d_s b_1 \cdots b_m y}\,,\\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0\end{array}\right\} \to Ez\,,\ \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z}\,.$$

Beweis:
$$\overline{d_1 \cdots d_s b_1 \cdots b_m y} -(\text{Satz } 33) \to \left\{\begin{array}{l}Ey_1\,,\ \overline{d_1 b_1 y_1}\,,\\ Ey_2\,,\ \overline{d_1 b_2 y_2}\,,\\ \cdots\cdots\cdots\,,\\ Ey_m\,,\ \overline{d_1 b_m y_m}\,.\end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{l}\overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n x}\,,\ \overline{d_1 b_1 y_1}\,,\\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \neq 0\end{array}\right\} -(\text{Satz } 36) \to Ez_1\,,\ \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 z_1}\,.$$
$$\left.\begin{array}{l}\overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 z_1}\,,\ \overline{d_1 b_2 y_2}\,,\\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 b_2 \neq 0\end{array}\right\} -(\text{Satz } 36) \to Ez_2\,,\ \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 b_2 z_2}\,.$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$\left.\begin{array}{l}\overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_{m-1} z_{m-1}}\,,\ \overline{d_1 b_m y_m}\,,\\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0\end{array}\right\} -(\text{Satz } 36) \to Ez,\ \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z}\,.$$
$$\therefore \left.\begin{array}{l}\overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n x},\\ \overline{d_1 \cdots d_s b_1 \cdots b_m y},\\ d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0\end{array}\right\} \to Ez\,,\ \overline{d_1 \cdots d_s a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z}\,,$$
w. z. b. w.

Satz 38.
$$\left.\begin{array}{l}\overline{a_1 \cdots a_n b_1 x}\,,\\ a_1 \cdots a_n b_1 b_2\,,\\ a_1 \cdots a_n b_2 \neq 0\end{array}\right\} \to Ez\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n b_2 z}\,.$$

Beweis: Wir beweisen dies durch die vollständige Induktion in Bezug auf n.

(i) Falls n gleich 0 ist, dann ergibt sich,

$$\overline{b_1 x}, \quad b_1 b_2 \quad \rightarrow \quad Eb_1, \quad \overline{b_2 b_1}.$$

(ii) Falls n gleich 1 ist, dann ergibt sich,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{a_1 b_1 x}, \\ a_1 b_1 b_2, \\ a_1 b_2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sei } b_1 b_2 \neq 0 \rightarrow Eb_1, \ \overline{a_1 b_2 b_1}. \\ \text{Sei } b_1 b_2 = 0 \rightarrow Ex, \ \overline{a_1 b_2 x}. \end{array}\right.$$

(iii) Also genügt es zu zeigen, dass aus dem Fall $[n-1]$ der Fall $[n]$ folgt.

Sei nun $a_1 \cdots *_i \cdots a_n b_1 b_2 \neq 0$, $(i = 1, \cdots, n)$, so folgt,

$$\left.\begin{array}{r} a_1 \cdots *_i \cdots a_n b_1 b_2 \neq 0, \ (i = 1, \cdots, n), \\ a_1 \cdots a_n b_2 \neq 0 \qquad\qquad\quad\ , \\ \overline{a_1 \cdots a_n b_1 x} \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \neq 0 \qquad\qquad\ \end{array}\right\} \rightarrow Eb_1, \ \overline{a_1 \cdots a_n b_2 b_1}.$$

Sei mindestens für ein Element z. B. a_n $a_1 \cdots a_{n-1} b_1 b_2 = 0$, so folgt,

$$\left.\begin{array}{r} \overline{a_1 \cdots a_n b_1 x} \text{ —(Satz 32)} \rightarrow Ex_1, \ \overline{a_1 \cdots a_{n-1} b_1 x_1}, \\ a_1 \cdots a_{n-1} b_1 b_2, \\ a_1 \cdots a_n b_2 \neq 0 \rightarrow \ a_1 \cdots a_{n-1} b_2 \neq 0 \end{array}\right\} \text{— } [n-1] \rightarrow Ey, \ \overline{a_1 \cdots a_{n-1} b_2 y}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{a_1 \cdots a_n b_1 x} \text{ —(Satz 32)} \rightarrow Ex_2, \ \overline{a_1 \cdots a_{n-1} a_n x_2}, \\ \overline{a_1 \cdots a_{n-1} b_2 y}, \\ a_1 \cdots a_n b_2 \neq 0 \end{array}\right\} \text{— (Satz 37)} \rightarrow Ez, \ \overline{a_1 \cdots a_n b_2 z}.$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \overline{a_1 \cdots a_n b_1 x}, \\ a_1 \cdots a_n b_1 b_2, \\ a_1 \cdots a_n b_2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow Ez, \ \overline{a_1 \cdots a_n b_2 z}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Definition VIII. Der lineare Raum vom Range n, der mindestens einen Primzyklus vom Range n in sich enthält, heisst der *lineare Primraum* vom Range n.

Satz 39. $\Re(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_{n+1}$, und $\overline{b_1 \cdots b_{n+1}}$

$$\rightarrow Ea_{n+1}, \ \Re(a_1 \cdots a_n) \ni a_{n+1}, \ \overline{a_1 \cdots a_{n+1}}.$$

Beweis:

Unter n Elementen $a_1, \cdots, a_n$, muss die Relation $b_1 \cdots b_{n-1} a_1 \neq 0$ mindestens für ein Element z. B. a_1 bestehen.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \overline{b_1 \cdots b_{n-1} b_n b_{n+1}}\,, \\ b_1 \cdots b_{n-1} b_n a_1\,, \\ b_1 \cdots b_{n-1} a_1 \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 38)\rightarrow Ez_1\,,\ \overline{b_1 \cdots b_{n-1} a_1 z_1}\,.$$

Unter $n-1$ Elementen $a_2, \cdots, a_n$, muss die Relation $b_1 \cdots b_{n-2} a_1 a_2 \neq 0$ mindestens für ein Element z. B. a_2 bestehen.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \overline{b_1 \cdots b_{n-2} a_1 b_{n-1} z_1}\,, \\ b_1 \cdots b_{n-2} a_1 b_{n-1} a_2\,, \\ b_1 \cdots b_{n-2} a_1 a_2 \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 38)\rightarrow Ez_2\,,\ \overline{b_1 \cdots b_{n-2} a_1 a_2 z_2}\,.$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Zwischen 2 Elementen a_{n-1}, a_n, muss die Relation $b_1 a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1} \neq 0$ mindestens für ein Element z. B. a_{n-1} bestehen.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \overline{b_1 a_1 \cdots a_{n-2} b_2 z_{n-2}}\,, \\ b_1 a_1 \cdots a_{n-2} b_2 a_{n-1}\,, \\ b_1 a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1} \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 38)\rightarrow Ez_{n-1}\,,\ \overline{b_1 a_1 \cdots a_{n-1} z_{n-1}}\,.$$

Für 1 Element a_n, muss die Relation $a_1 \cdots a_{n-1} a_n \neq 0$ mindestens für ein Element z. B. a_n bestehen.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \overline{a_1 \cdots a_{n-1} b_1 z_{n-1}}\,, \\ a_1 \cdots a_{n-1} b_1 a_n\,, \\ a_1 \cdots a_{n-1} a_n \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 38)\rightarrow Ea_{n+1}\,,\ \overline{a_1 \cdots a_n a_{n+1}}\,.$$

Daher $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni b_1, \cdots, b_{n+1}$, und $\overline{b_1 \cdots b_{n+1}}$

$$\rightarrow Ea_{n+1}\,,\ \overline{a_1 \cdots a_{n+1}}\,,$$ w. z. b. w.

Satz 40. Jeder in einem linearen Primraume enthaltenen lineare Raum ist stets ein linearer Primraum.

Beweis: Seien die Basen vom enthaltenen linearen Raume bzw. enthaltenden linearen Raume je $a_1 \cdots a_m$, bzw. $a_1 \cdots a_m \cdots a_n$, so ist $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_m \cdots a_n)$ wegen unserer Voraussetzung ein linearer Primraum.

Also folgt nach Satz 39,

$$Ex\,,\ \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_m \cdots a_n) \ni x\,,\ \overline{a_1 \cdots a_m \cdots a_n x}\,.$$

$$\overline{a_1 \cdots a_m \cdots a_n x} -(\text{Satz } 33)\rightarrow Ey\,,\ \overline{a_1 \cdots a_m y}\,.$$

$$\therefore\ Ey\,,\ \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_m) \ni y\,,\ \overline{a_1 \cdots a_m y}\,.$$

Daher ist $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_m)$ auch ein linearer Primraum.

Satz 41. Der lineare Raum derart, dass alle darin liegenden linearen Räume vom Range 2 stets lineare Primräume sind, ist auch ein linearer Primraum.

Beweis: Sei die Basis des linearen Raumes $a_1 \cdots a_n$, so folgt nach unserer Voraussetzung,

$$Ex_1,\ \overline{a_1a_2x_1};\ Ex_2,\ \overline{a_2a_3x_2};\ \cdots;\ Ex_{n-1},\ \overline{a_{n-1}a_nx_{n-1}}\ .$$

Dann folgt,

$$\overline{a_1a_2x_1},\ \overline{a_2a_3x_2},\ a_1a_2a_3 \neq 0\ -(\text{Satz } 37)\rightarrow Ey_3,\ \overline{a_1a_2a_3y_3}\ .$$

$$\overline{a_1a_2a_3y_3},\ \overline{a_3a_4x_3},\ a_1a_2a_3a_4 \neq 0\ -(\text{Satz } 37)\rightarrow Ey_4,\ \overline{a_1a_2a_3a_4y_4}\ .$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\overline{a_1 \cdots a_{n-1}y_{n-1}},\ \overline{a_{n-1}a_nx_{n-1}},\ a_1 \cdots a_n \neq 0\ -(\text{Satz } 37)\rightarrow Ey_n,\ \overline{a_1 \cdots a_ny_n}.$$

$$\therefore\quad Ey_n,\ \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni y_n,\ \overline{a_1 \cdots a_ny_n}\ .$$

Daher ist $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n)$ ein linearer Primraum.

§ 4. Die Zerlegung des linearen Raumes.

Definition IX. Wir sagen, dass der lineare Raum $\mathfrak{R}$ sich in die *direkte Summe* von k linearen Räumen $\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k$ *zerlegt,* und schreiben in Zeichen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\ ,$$

wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_k\ ,$$

$$\text{Rang}\,\mathfrak{R} = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\ .$$

Ferner in diesem Falle, heissen die k linearen Räume $\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k$ sich *mit einander trennen,* und wir bezeichnen dies in Zeichen

$$\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k\ .$$

Dann folgt leicht;

$\text{V}_2.\ 4.$ (i) $\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_i * \cdots * \mathfrak{R}_k \rightarrow \mathfrak{R}_i * \cdots * \mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k\ .$

(ii) $\mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_i \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_i \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\ .$

Satz 42. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_m)$
$\rightarrow \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m)$.

Beweis: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k \rightarrow \mathfrak{R} = \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k)$
$-(\text{Satz } 17)\rightarrow \mathfrak{R} = \mathfrak{B}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m)$.

Rang $\mathfrak{R}$ = Rang $\mathfrak{R}_1 + \cdots +$ Rang $\mathfrak{R}_k = n + \cdots + m$.

$\therefore$ Rang $\mathfrak{B}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m) = n + \cdots + m$.

$\therefore$ $a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m \neq 0$.

$\therefore$ $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m)$, w. z. b. w.

Zusatz. $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{R}(l_1 \cdots l_m) \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m \neq 0.$

Satz 43. $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_m), \\ a_1 \cdots a_n x \neq 0, \cdots, l_1 \cdots l_m x \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m x \neq 0.$

Beweis: Nach Satz 42 folgt,

$$\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m) = \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_m) .$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m) = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_k , \\ a_1 \cdots a_n x \neq 0 \rightarrow \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \not\ni x , \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots , \\ l_1 \cdots l_m x \neq 0 \rightarrow \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_m) \not\ni x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m) \not\ni x \\ \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m x \neq 0 . \end{array}$$

Zusatz. $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{R}(l_1 \cdots l_m) , \\ a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_m x \end{array}\right\} \rightarrow$ Es gilt genau eine der Aussagen $\{a_1 \cdots a_n x , \cdots , \text{ und } l_1 \cdots l_m x\}$.

Satz 44. $\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_i * \cdots * \mathfrak{R}_k \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_i) = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_i$.

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_i \cdots, \mathfrak{R}_k$ bzw. je $a_1 \cdots a_n$, $\cdots$, $b_1 \cdots b_m$, $\cdots$, $l_1 \cdots l_s$, so folgt,

$$\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{R}_i(b_1 \cdots b_m) * \cdots * \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s) -(\text{Zusatz zum Satz } 42)-$$
$$\rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \neq 0 \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m \neq 0$$
$$\rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_i) = \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m) .$$

Daher folgt,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_i) \ni x \rightarrow \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m) \ni x \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m x$$
$$-(\text{Zusatz zum Satz } 43)\rightarrow a_1 \cdots a_n x \text{ od. } \ldots \text{ od. } b_1 \cdots b_m x$$
$$\rightarrow \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_i \ni x .$$

Daher $\quad \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) \leqq \mathfrak{N}_1 + \cdots + \mathfrak{N}_i$.

Anderseits, $\quad \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) \geqq \mathfrak{N}_1 + \cdots + \mathfrak{N}_i$.

Daher $\quad \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{N}_1 + \cdots + \mathfrak{N}_i$, w. z. b. w.

Zusatz. $\mathfrak{N}_1(a_1 \cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{N}_i(b_1 \cdots b_m) * \cdots * \mathfrak{N}_k(l_1 \cdots l_s)$

$$\rightarrow \mathfrak{V}\left\{\mathfrak{N}_1(a_1 \cdots a_n), \cdots, \mathfrak{N}_i(b_1 \cdots b_m)\right\} = \mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m) .$$

Satz 45. $\mathfrak{N}_1 * \cdots * \mathfrak{N}_i * \mathfrak{N}_{i+1} * \cdots * \mathfrak{N}_k$

$$\rightarrow \mathfrak{D}\left\{\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i),\ \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_{i+1} \cdots \mathfrak{N}_k)\right\} = \mathfrak{N} .$$

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{N}_1, \cdots, \mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{N}_k$ bzw. je $a_1 \cdots a_n, \ \ldots, \ b_1 \cdots b_m, \ c_1 \cdots c_r, \ \ldots, \ d_1 \cdots d_s$, so folgt nach Zusatz zum Satz 44,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m) ,$$

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_{i+1} \cdots \mathfrak{N}_k) = \mathfrak{N}(c_1 \cdots c_r \cdots d_1 \cdots d_s) .$$

Daher

$$\mathfrak{D}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i), \\ \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_{i+1} \cdots \mathfrak{N}_k)\end{array}\right\} \ni x \rightarrow \mathfrak{D}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{N}(a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m), \\ \mathfrak{N}(c_1 \cdots c_r \cdots d_1 \cdots d_s)\end{array}\right\} \ni x$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m x , \\ c_1 \cdots c_r \cdots d_1 \cdots d_s x\end{array}\right\} \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_r \cdots d_1 \cdots d_s$$

$$\text{—(Zusatz zum Satz 42)}\rightarrow W .$$

Also ist $\quad \mathfrak{D}\left\{\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i),\ \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_{i+1} \cdots \mathfrak{N}_k)\right\} = \mathfrak{N}$.

Satz 46. $\mathfrak{N}_1 * \cdots * \mathfrak{N}_i * \cdots * \mathfrak{N}_k \rightarrow \mathfrak{N}_1 * \cdots * \mathfrak{N}_i$.

Beweis:

$$\mathfrak{N}_1 * \cdots * \mathfrak{N}_i * \cdots * \mathfrak{N}_k \text{ —(Satz 44)}\rightarrow \mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{N}_1 + \cdots + \mathfrak{N}_i .$$

$$\begin{aligned}\text{Rang}\,\mathfrak{N}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_k &= \text{Rang}\,(\mathfrak{N}_1 + \cdots + \mathfrak{N}_k) \\ &\leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{N}_1 + \cdots + \mathfrak{N}_i) + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_{i+1} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_k \\ &= \text{Rang}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_{i+1} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_k \\ &\leqq \text{Rang}\,\mathfrak{N}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_k .\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \text{Rang}\,\mathfrak{V}(\mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_i) = \text{Rang}\,\mathfrak{N}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{N}_i .$$

$\therefore \quad \mathfrak{N}_1 * \cdots * \mathfrak{N}_i$, w. z. b. w.

Satz 47. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{N}_i \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{N}_k,\ \mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{N}_{is}$

$$\rightarrow \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{N}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{N}_{is} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{N}_k .$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_i + \cdots + \mathfrak{R}_k\,,\\ \mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is}\end{array}\right\} \to \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is} + \cdots + \mathfrak{R}_k.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rang}\,\mathfrak{R} = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_i + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\,,\\ \text{Rang}\,\mathfrak{R}_i = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{is}\end{array}\right\} -$$

$$\to \text{Rang}\,\mathfrak{R} = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{is} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\,.$$

$$\therefore\quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{is} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\,, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 48. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{is} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k$

$$\to \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} (\mathfrak{R}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{is}) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\,.$$

Beweis:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is} + \cdots + \mathfrak{R}_k$$
$$\to \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + (\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is}) + \cdots + \mathfrak{R}_k\,.$$

$$\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_{i1} * \cdots * \mathfrak{R}_{is} * \cdots * \mathfrak{R}_k \xrightarrow{\text{(Satz 46)}} \mathfrak{R}_{i1} * \cdots * \mathfrak{R}_{is}$$

$$\to \mathfrak{R}_{i1} + \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{is} \overset{*}{=} \mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is} \to$$

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{is}) = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{is}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{Rang}\,\mathfrak{R} &= \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{is} + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\\ &= \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is}) + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathfrak{R} &= \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} (\mathfrak{R}_{i1} + \cdots + \mathfrak{R}_{is}) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\\ &= \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} (\mathfrak{R}_{i1} \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_{is}) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\,.\end{aligned}$$

Satz 49. $\left.\begin{array}{l}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_k\,,\\ \mathfrak{D}\left\{\mathfrak{R}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_{i-1}),\ \mathfrak{R}_i\right\} = \mathfrak{N}\,,\ i = 2, \cdots, k\end{array}\right\} \to \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\,.$

Beweis:

$$\mathfrak{D}\left\{\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_{i-1}),\ \mathfrak{R}_i\right\} = \mathfrak{N} \xrightarrow{\text{(Satz 29)}}$$

$$\text{Rang}\,\mathfrak{B}\left\{\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_{i-1}),\ \mathfrak{R}_i\right\} = \text{Rang}\,\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_{i-1}) + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_i\,.$$

$$\therefore\quad \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_i) = \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{i-1}) + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_i\,.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_k) &= \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{k-1}) + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\,,\\ \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{k-1}) &= \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{k-2}) + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_{k-1}\,,\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) &= \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 \qquad\qquad + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_2\,.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{Rang}\,(\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_k) = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\,.$$

$$\therefore \qquad \text{Rang}\,\mathfrak{R} = \text{Rang}\,\mathfrak{R}_1 + \cdots + \text{Rang}\,\mathfrak{R}_k\,.$$

$$\therefore \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k\,, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Definition X. Derjenige lineare Raum $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n)$, der sich unmöglich in die direkte Summe von mehr als zwei linearen Räumen zerlegt, heisst der *unzerlegbare lineare Raum*, und wird bezeichnet mit: $\overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_n)$.

Satz 50.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z, \\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z \neq 0\,, \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \neq 0\,, \\ c_1 \cdots c_k a_1 \cdots a_n z \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ez_1,\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z_1,\ a_1 \cdots a_n z_1 \neq 0,\ b_1 \cdots b_m z_1 \neq 0, \\ Ez_2,\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_2,\ b_1 \cdots b_m z_2 \neq 0,\ c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0, \\ Ez_3,\ c_1 \cdots c_k a_1 \cdots a_n z_3,\ c_1 \cdots c_k z_3 \neq 0,\ a_1 \cdots a_n z_3 \neq 0. \end{array}\right.$$

Beweis: $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \rightarrow Ez_1,\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z_1,\ c_1 \cdots c_k z z_1\,.$

$c_1 \cdots c_k a_1 \cdots a_n z \neq 0\,,\ c_1 \cdots c_k z z_1 \rightarrow a_1 \cdots a_n z_1 \neq 0\,.$

$b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \neq 0\,,\ c_1 \cdots c_k z z_1 \rightarrow b_1 \cdots b_m z_1 \neq 0\,.$

Daher folgt $\quad Ez_1,\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z_1\,,\ a_1 \cdots a_n z_1 \neq 0\,,\ b_1 \cdots b_m z_1 \neq 0.$

Ebenso folgt $\quad Ez_2\,,\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_2\,,\ b_1 \cdots b_m z_2 \neq 0\,,\ c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0\,,$

$\qquad Ez_3\,,\ c_1 \cdots c_k a_1 \cdots a_n z_3\,,\ c_1 \cdots c_k z_3 \neq 0\,,\ a_1 \cdots a_n z_3 \neq 0.$

Satz 51.

$$\left.\begin{array}{l} ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \neq 0\,, \\ ab_1 \cdots b_m z_1\,,\ az_1 \neq 0\,,\ b_1 \cdots b_m z_1 \neq 0, \\ ac_1 \cdots c_k z_2\,,\ az_2 \neq 0\,,\ c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ez,\ ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z\,, \\ ab_1 \cdots b_m z \neq 0,\ ac_1 \cdots c_k z \neq 0\,. \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \neq 0\,. \end{array}\right.$$

Beweis: $ab_1 \cdots b_m z_1\,,\ ac_1 \cdots c_k z_2 \rightarrow b_1 \cdots b_m z_1 c_1 \cdots c_k z_2$

$\qquad \rightarrow Ez\,,\ b_1 \cdots b_m z_2 z\,,\ c_1 \cdots c_k z_1 z\,.$

$ab_1 \cdots b_m z_1\,,\ c_1 \cdots c_k z_1 z \rightarrow ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z\,.$

$ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \neq 0\,,\ b_1 \cdots b_m z_1 \neq 0\,,\ ab_1 \cdots b_m z_1 \rightarrow b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_1 \neq 0\,.$

$b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_1 \neq 0\,,\ c_1 \cdots c_k z_1 z \rightarrow b_1 \cdots b_m z \neq 0\,.$

$ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \neq 0\,,\ ac_1 \cdots c_k z_2\,,\ az_2 \neq 0 \rightarrow ab_1 \cdots b_m z_2 \neq 0\,.$

$b_1 \cdots b_m z \neq 0\,,\ ab_1 \cdots b_m z_2 \neq 0\,,\ b_1 \cdots b_m z_2 z \rightarrow ab_1 \cdots b_m z \neq 0\,.$

$ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \neq 0,\ c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0,\ ac_1 \cdots c_k z_2 \rightarrow b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0.$

$b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0\,,\ b_1 \cdots b_m z_2 z \rightarrow c_1 \cdots c_k z \neq 0\,.$

$ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \neq 0,\ ab_1 \cdots b_m z_1\,,\ az_1 \neq 0 \rightarrow ac_1 \cdots c_k z_1 \neq 0\,.$

$c_1 \cdots c_k z \neq 0\,,\ ac_1 \cdots c_k z_1 \neq 0\,,\ c_1 \cdots c_k z_1 z \rightarrow ac_1 \cdots c_k z \neq 0\,.$

$b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z_2 \neq 0\,,\ b_1 \cdots b_m z \neq 0\,;\ b_1 \cdots b_m z_2 z \rightarrow b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \neq 0\,.$

$\therefore \quad Ez,\ ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z,\ ab_1 \cdots b_m z \neq 0,\ ac_1 \cdots c_k z \neq 0,\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \neq 0,$

w. z. b. w.

Satz 52. $\overline{\mathfrak{R}}^s > \mathfrak{R}^{s-1} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}^{s-1}$.

Beweis: Seien $\overline{\mathfrak{R}}^s = \overline{\mathfrak{R}}(ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k)$, $\mathfrak{R}^{s-1} = \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k)$, und wäre vorläufig $\mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k) = \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m) \overset{*}{+} \mathfrak{R}(c_1 \cdots c_k)$, so wäre,

$\overline{\mathfrak{R}}(ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k) \rightarrow$

$Ex,\ \mathfrak{R}(ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k) \ni x,\ ab_1 \cdots b_m x \neq 0,\ c_1 \cdots c_k x \neq 0,$

$Ey,\ \mathfrak{R}(ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k) \ni y,\ ac_1 \cdots c_k y \neq 0,\ b_1 \cdots b_m y \neq 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m) * \mathfrak{R}(c_1 \cdots c_k), \\ b_1 \cdots b_m x \neq 0,\ c_1 \cdots c_k x \neq 0, \\ b_1 \cdots b_m y \neq 0,\ c_1 \cdots c_k y \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 43)\rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k x \neq 0, \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k y \neq 0. \end{array}\right.$$

Nun wäre $ac_1 \cdots c_k x \neq 0$, so wäre,

$$\left.\begin{array}{l} ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k x, \\ ab_1 \cdots b_m x \neq 0, \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k x \neq 0, \\ c_1 \cdots c_k a x \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 50)\rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ez,\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z, \\ b_1 \cdots b_m z \neq 0,\ c_1 \cdots c_k z \neq 0. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m) * \mathfrak{R}(c_1 \cdots c_k), \\ b_1 \cdots b_m z \neq 0,\ c_1 \cdots c_k z \neq 0, \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \end{array}\right\} -(\text{Satz } 43)\rightarrow W.$$

So müsste $ac_1 \cdots c_k x = 0$.

Ebenso müsste $ab_1 \cdots b_m y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \neq 0, \\ ab_1 \cdots b_m y,\ ay \neq 0,\ b_1 \cdots b_m y \neq 0, \\ ac_1 \cdots c_k x,\ ax \neq 0,\ c_1 \cdots c_k x \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 51)\rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ez,\ ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z, \\ ab_1 \cdots b_m z \neq 0,\ ac_1 \cdots c_k z \neq 0, \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k z \neq 0 \end{array}\right.$$

$$-(\text{Satz } 50)\rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ew,\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k w, \\ b_1 \cdots b_m w \neq 0,\ c_1 \cdots c_k w \neq 0. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m) * \mathfrak{R}(c_1 \cdots c_k), \\ b_1 \cdots b_m w \neq 0,\ c_1 \cdots c_k w \neq 0, \\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k w \end{array}\right\} -(\text{Satz } 43)\rightarrow W.$$

$\therefore \quad \overline{\mathfrak{R}}(ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k),\ \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m) * \mathfrak{R}(c_1 \cdots c_k) \rightarrow W.$

$\therefore \quad \overline{\mathfrak{R}}(ab_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k) \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}(b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k),$ w. z. b. w.

Satz 53. Jeder in einem unzerlegbaren linearen Raume enthaltene lineare Raum ist stets ein unzerlegbarer linearer Raum.

Beweis: Sei $\overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_m \cdots a_n) \geqq \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_m)$, so folgt nach Satz 52,

$$\overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_m \cdots a_n) \to \overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_m \cdots a_{n-1}) \to \cdots \to \overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_m).$$

$$\therefore \quad \overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_m \cdots a_n) \to \overline{\mathfrak{R}}(a_1 \cdots a_m),$$ w. z. b. w.

Satz 54. Der unzerlegbare lineare Raum vom Range 2 ist linearer Primraum.

Beweis: Sei den unzerlegbaren linearen Raum vom Range 2 $\mathfrak{R}(a_1 a_2)$, so folgt,

$$\overline{\mathfrak{R}}(a_1 a_2) \to Ez, \ \mathfrak{R}(a_1 a_2) \ni z, \ a_1 z \neq 0, \ a_2 z \neq 0$$
$$\to Ez, \ \mathfrak{R}(a_1 a_2) \ni z, \ \overline{a_1 a_2 z}.$$

Daher ist $\mathfrak{R}(a_1 a_2)$ ein linearer Primraum.

Satz 55. Der unzerlegbare lineare Raum ist linearer Primraum.

Beweis: Falls der Rang gleich 1 ist, ist es trivial, also genügt es zu zeigen, im Fall der Rang mehr als 2 ist. Dann ergibt sich, nach Satz 53, Satz 54, dass jeder im unzerlegbaren linearen Raume enthaltene lineare Raum vom Range 2 stets ein linearer Primraum ist. Daher ist nach Satz 41 der unzerlegbare lineare Raum auch ein linearer Primraum, w. z. b. w.

Satz 56. Jeder lineare Primraum ist unzerlegbarer linearer Raum.

Beweis: Wäre $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) = \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \overset{*}{+} \mathfrak{R}_2(b \cdots b_m)$, während doch $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m)$ ein linearer Primraum ist, so wäre nach der Definition VIII, Satz 39,

$$Ez, \ \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) \ni z, \ \overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z}.$$

$$\overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z} \to a_1 \cdots a_n z \neq 0, \ b_1 \cdots b_m z \neq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) * \mathfrak{R}(b_1 \cdots b_m), \\ a_1 \cdots a_n z \neq 0, \ b_1 \cdots b_m z \neq 0 \end{array}\right\} - (\text{Satz } 43) \to a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z \neq 0.$$

$$\overline{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z}, \ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m z \neq 0 \to W.$$

Daher ist $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m)$ ein unzerlegbarer linearer Raum, w. z. b. w.

Aus Satz 55 und Satz 56 kann man folgendermassen behaupten:

Satz 57. Die Definitionen des linearen Primraumes und des unzerlegbaren linearen Raumes sind gleichwertig im Inhalt.

Satz 58. Der lineare Raum derart, dass alle darin liegenden linearen Räume vom Range 2 stets unzerlegbare lineare Räume sind, ist auch ein unzerlegbarer linearer Raum.

Beweis: Nach Satz 41, Satz 57, ist es klar.

Satz 59. $$\left.\begin{array}{l}\overline{\mathfrak{R}}(d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n),\\ \overline{\mathfrak{R}}(d_1\cdots d_s b_1\cdots b_m),\\ d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m \neq 0\end{array}\right\}\to \overline{\mathfrak{R}}(d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m).$$

Beweis:

$$\overline{\mathfrak{R}}(d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n)-(\text{Satz 57, Satz 39})\to Ex,\ \overline{d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n x}.$$

$$\overline{\mathfrak{R}}(d_1\cdots d_s b_1\cdots b_m)-(\text{Satz 57, Satz 39})\to Ey,\ \overline{d_1\cdots d_s b_1\cdots b_m y}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n x},\\ \overline{d_1\cdots d_s b_1\cdots b_m y},\\ d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m \neq 0\end{array}\right\}-(\text{Satz 37})\to Ez,\ \overline{d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m z}.$$

$\therefore$ $Ez,\ \mathfrak{R}(d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m)\ni z,\ \overline{d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m z}.$

$\therefore$ (Satz 57)$\to \overline{\mathfrak{R}}(d_1\cdots d_s a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m)$, w. z. b. w.

Satz 60. $\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k,\ \mathfrak{R}_1 \geqq \mathfrak{R}'_1,\ \cdots,\ \mathfrak{R}_k \geqq \mathfrak{R}'_k \ \to\ \mathfrak{R}'_1 * \cdots * \mathfrak{R}'_k$.

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}'_1$, $\mathfrak{R}_1$, $\cdots$, $\mathfrak{R}'_k$, $\mathfrak{R}_k$ bzw. je $a_1\cdots a_m$, $a_1\cdots a_m\cdots a_n$, $\cdots$, $l_1\cdots l_r$, $l_1\cdots l_r\cdots l_s$, so folgt nach Zusatz zum Satz 42,

$$\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k \to a_1\cdots a_m\cdots a_n\cdots l_1\cdots l_r\cdots l_s \neq 0 \to a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r \neq 0.$$

$\therefore$ Rang $\mathfrak{R}'_1(a_1\cdots a_m)+\cdots+$Rang $\mathfrak{R}'_k(l_1\cdots l_r)=$ Rang $\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)$.

$$\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)\ni x\to a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r x\to a_1\cdots a_m\cdots a_n\cdots l_1\cdots l_r\cdots l_s x.$$

$$\left.\begin{array}{l}a_1\cdots a_m\cdots a_n\cdots l_1\cdots l_r\cdots l_s x,\\ \mathfrak{R}_1(a_1\cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{R}_k(l_1\cdots l_s)\end{array}\right\}-(\text{Zusatz zum Satz 43})\to a_1\cdots a_m\cdots a_n x \text{ od. } \cdots \text{ od. } l_1\cdots l_r\cdots l_s x.$$

$$\left.\begin{array}{l}a_1\cdots a_m\cdots a_n x \text{ od. } \cdots \text{ od. } l_1\cdots l_r\cdots l_s x,\\ a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r x,\ a_1\cdots a_m\cdots a_n\cdots l_1\cdots l_r\cdots l_s \neq 0\end{array}\right\}\to a_1\cdots a_m x \text{ od. } \cdots \text{ od. } l_1\cdots l_r x.$$

$a_1\cdots a_m x$ od. $\cdots$ od. $l_1\cdots l_r x \to \mathfrak{R}'_1+\cdots+\mathfrak{R}'_k\ni x$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)\ni x \to \mathfrak{R}'_1+\cdots+\mathfrak{R}'_k\ni x$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)\leqq \mathfrak{R}'_1+\cdots+\mathfrak{R}'_k$.

Anderseits folgt trivialerweise,

$$\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)\geqq \mathfrak{R}'_1+\cdots+\mathfrak{R}'_k.$$

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)=\mathfrak{R}'_1+\cdots+\mathfrak{R}'_k$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1\cdots a_m\cdots l_1\cdots l_r)=\mathfrak{R}'_1\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}\mathfrak{R}'_k$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}'_1 * \cdots * \mathfrak{R}'_k$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k,\ \mathfrak{R}_1\geqq\mathfrak{R}'_1,\ \cdots,\ \mathfrak{R}_k\geqq\mathfrak{R}'_k \ \to\ \mathfrak{R}'_1 * \cdots \mathfrak{R}'_k$,

w. z. b. w.

Satz 61. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k,\ \mathfrak{R} \geqq \overline{\mathfrak{R}}' \rightarrow$ Es gilt genau eine der Aussagen $\left\{ \mathfrak{R}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}',\ \cdots,\ \text{und}\ \ \mathfrak{R}_k \geqq \overline{\mathfrak{R}}' \right\}$.

Beweis:

Seien $\mathfrak{D}(\overline{\mathfrak{R}}', \mathfrak{R}_1) = \mathfrak{R}_1',\ \cdots,\ \mathfrak{D}(\overline{\mathfrak{R}}', \mathfrak{R}_k) = \mathfrak{R}_k'$, so folgt,

$$\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_k \geqq \overline{\mathfrak{R}}' \rightarrow \mathfrak{R}_1' + \cdots + \mathfrak{R}_k' = \overline{\mathfrak{R}}'.$$

$$\mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k,\ \mathfrak{R}_1 \geqq \mathfrak{R}_1',\ \cdots,\ \mathfrak{R}_k \geqq \mathfrak{R}_k' \text{—(Satz 60)}\rightarrow \mathfrak{R}_1' * \cdots * \mathfrak{R}_k'.$$

$\therefore\ \ \overline{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R}_1' \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k'.$

So müssen z. B. $\overline{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R}_1',\ \mathfrak{R}_2' = \cdots = \mathfrak{R}_k' = \mathfrak{N}$.

$\therefore\ \ \overline{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R}_1' \rightarrow \mathfrak{R}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}'.$

Daher gilt genau eine der Aussagen

$$\left\{ \mathfrak{R}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}',\ \cdots,\ \text{und}\ \ \mathfrak{R}_k \geqq \overline{\mathfrak{R}}' \right\}.$$

Zusatz. $\mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k \ni a_1,\ \cdots,\ a_{n+1},\ \overline{a_1 \cdots a_{n+1}} \rightarrow$ Es gilt genau eine der Aussagen $\left\{ \mathfrak{R}_1 \ni a_1,\ \cdots,\ a_{n+1};\ \cdots;\ \mathfrak{R}_k \ni a_1,\ \cdots,\ a_{n+1} \right\}$.

Satz 62. Jeder lineare Raum lässt sich bis auf die Anordnung der Faktoren auf die einzige Weise in die direkte Summe von unzerlegbaren linearen Räumen zerlegen.

Beweis:

Es sei $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \overline{\mathfrak{R}}_k = \overline{\mathfrak{R}}_1' \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \overline{\mathfrak{R}}_m'.$

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k,\ \mathfrak{R} \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1' \text{—(Satz 61)}\rightarrow \mathfrak{R}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1'$ od. $\cdots$

od. $\mathfrak{R}_k \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1' \rightarrow$ z. B. $\mathfrak{R}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1'$.

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1' \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k',\ \mathfrak{R} \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1 \text{—(Satz 61)}\rightarrow \mathfrak{R}_1' \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1$ od. $\cdots$

od. $\mathfrak{R}_k' \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1 \rightarrow$ z. B. $\mathfrak{R}_i' \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1$.

$\overline{\mathfrak{R}}_i' \geqq \mathfrak{R}_1,\ \overline{\mathfrak{R}}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1' \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_i' \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1' \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_i' = \overline{\mathfrak{R}}_1'.$

$\overline{\mathfrak{R}}_i' \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}}_1',\ \overline{\mathfrak{R}}_i' = \overline{\mathfrak{R}}_1' \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_1 = \overline{\mathfrak{R}}_1'.$

$\therefore$ z. B. $\overline{\mathfrak{R}}_1 = \overline{\mathfrak{R}}_1'$.

$\therefore$ z. B. $\overline{\mathfrak{R}}_1 = \overline{\mathfrak{R}}_1',\ \cdots,\ \overline{\mathfrak{R}}_k = \overline{\mathfrak{R}}_k';\ \ k = m.$

Daher lässt sich jeder lineare Raum bis auf die Anordnung der Faktoren auf eine und nur eine Weise in die direkte Summe von unzerlegbaren linearen Räumen zerlegen.

§ 5. Die Zerlegung des $\mathfrak{V}_2$-Raumes.

Definition XI. Falls für zwei Elemente a, b von $\mathfrak{V}_2$ die Relation ab oder Ez, $\overline{abz}$ besteht, so heisst, "*a trennt sich nicht von b*", und wird mit $a \sim b$ bezeichnet. Sonst heisst, "*a trennt sich von b*", und wird mit $a \not\sim b$ bezeichnet.

Satz 63. Die Relation "$\sim$" erfüllt das Äquivalenzgesetz.

Beweis: (i) Sie ist reflexiv, d. h.;

$aa \to a \sim a$.

(ii) Sie ist symmetriseh, d. h.;

$a \sim b \to ab$ od. $\left\{Ez,\ \overline{abz}\right\}$.

$ab \to ba \to b \sim a$.

$Ez,\ \overline{abz} \to Ez,\ \overline{baz} \to b \sim a$.

$\therefore\ a \sim b \to b \sim a$.

(iii) Sie ist transitiv, d. h.;

$a \sim b,\ b \sim c \to \left\{ab,\ bc\right\}$ od. $\left\{ab,\ Ey,\ \overline{bcy}\right\}$

od. $\left\{Ex,\ \overline{abx},\ bc\right\}$ od. $\left\{Ex,\ \overline{abx},\ Ey,\ \overline{bcy}\right\}$.

$ab,\ bc \to ac \to a \sim c$.

$ab,\ Ey,\ \overline{bcy} \to Ey,\ \overline{acy} \to a \sim c$.

$Ex,\ \overline{abx},\ bc \to Ex,\ \overline{acx} \to a \sim c$.

$Ex,\ \overline{abx},\ Ey,\ \overline{bcy} \to \overline{acxy}$ od. $\left\{abc,\ ab \neq 0,\ bc \neq 0\right\}$.

$\overline{acxy} \to Ez,\ \overline{acz} \to a \sim c$.

$abc,\ ab \neq 0,\ bc \neq 0 \to \overline{abc}$ od. ac.

$\overline{abc} \to Eb,\ \overline{acb} \to a \sim c$.

$ac \to a \sim c$.

$\therefore\ a \sim c,\ b \sim c \to a \sim c,$ w. z. b. w.

Zusatz. Bezeichnet man die zwei sich mit einander nicht trennenden Elemente von $\mathfrak{V}_2$ als eine Klasse von Elementen, so zerlegt der $\mathfrak{V}_2$-Raum in eine Anzahl von Klassen, die untereinander keine gemeinsamen Elemente besitzen.

Definition XII. Eine solche Klasse von Elementen von $\mathfrak{V}_2$ heisst der *Primverknüpfungsraum*, in kurzen Worten, **$\mathfrak{P}$-Raum**, von $\mathfrak{V}_2$-Raum, und wird mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Ferner heisst *der $\mathfrak{V}_2$-Raum sich in die direkte Summe von Primverknüpfungsräumen* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\cdots$ *zerlegen,* und wir bezeichnen in Zeichen:

$$\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{P}_1 \overset{*}{+} \mathfrak{P}_2 \overset{*}{+} \mathfrak{P}_3 \overset{*}{+} \cdots .$$

Satz 64. $\mathfrak{P} \ni a_1, \cdots, a_n$, und $a_1 \cdots a_n \neq 0 \rightarrow \mathfrak{P} \geqq \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n)$.

Beweis:

$\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni x \rightarrow a_1 \cdots a_n \neq 0$, $a_1 \cdots a_n x$.

$a_1 \cdots a_n \neq 0$, $a_1 \cdots a_n x \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_n x}$ oder

$$\{ * a_2 \cdots a_n x \text{ od. } a_1 * \cdots a_n x \text{ od. } \cdots \text{ od. } a_1 \cdots a_{n-1} * x \}$$

$$\rightarrow \overline{a_1 \cdots a_n x} \text{ oder z. B. } a_2 \cdots a_n x .$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x \end{array}\right\} \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_n x} \text{ oder z. B. } a_2 \cdots a_n x .$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 \cdots a_n \neq 0, \\ a_2 \cdots a_n x \end{array}\right\} \rightarrow \overline{a_2 \cdots a_n x} \text{ oder z. B. } a_3 \cdots a_n x .$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} a_n \neq 0, \\ a_{n-1} a_n x \end{array}\right\} \rightarrow \overline{a_{n-1} a_n x} \text{ oder z. B. } \overline{a_n x} .$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x \end{array}\right\} \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_n x} \text{ od. z. B. } \overline{a_2 \cdots a_n x}$$
$$\text{od. z. B. } \cdots \text{ od. z.B } \overline{a_n x} .$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n x \end{array}\right\} \rightarrow \text{ z. B. } \overline{a_m \cdots a_n x} .$$

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni x \rightarrow$ z. B. $\overline{a_m \cdots a_n x}$.

$\overline{a_m \cdots a_n x}$ —(Satz 33)→ Ez, $\overline{a_n x z}$ oder $\overline{a_n x} \rightarrow a_n \sim x$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni x \rightarrow$ z. B. $a_n \sim x$.

$\mathfrak{P} \ni a_n$, $a_n \sim x \rightarrow \mathfrak{P} \ni x$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \ni x \rightarrow \mathfrak{P} \ni x$.

$\therefore$ $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n) \leqq \mathfrak{P}$, w. z. b. w.

Zusatz. $\mathfrak{P} \geqq M \rightarrow \mathfrak{P} \geqq \mathfrak{V}(M)$.

Satz 65. $\mathfrak{P} \ni \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$.

Beweis: Falls der Rang von $\mathfrak{R}$ gleich 1 ist, ist es trival, so genügt es zu zeigen, im Fall der Rang von $\mathfrak{R}$ mehr als 2 ist.

Es sei nun

$$\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{R}^2(a_1a_2).$$
$$\mathfrak{P} \ni a_1,\ a_2 \rightarrow a_1 \sim a_2.$$
$$a_1 \sim a_2,\ a_1a_2 \neq 0 \rightarrow Ez,\ \overline{a_1a_2z}.$$
$$Ez,\ \mathfrak{R}^2(a_1a_2) \ni z,\ \overline{a_1a_2z} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}^2(a_1a_2).$$
$$\therefore\ (\text{Satz } 58) \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}.$$
$$\therefore\ \mathfrak{P} \geqq \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz 1. $\mathfrak{P} \ni a_1, \cdots, a_n,$ und $a_1 \cdots a_n \neq 0 \rightarrow Ez,\ \mathfrak{P} \ni z,\ \overline{a_1 \cdots a_n z}.$

Zusatz 2. $\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{R}_2 \rightarrow$ Es ist nie $\mathfrak{R}_1 * \mathfrak{R}_2$.

Nach Satz 64, und Satz 65, ergibt sich,

Satz 66. Ist der Rang des $\mathfrak{P}$-Raumes endlich, so ist der $\mathfrak{P}$-Raum ein linearer Primraum.

Satz 67. $\left.\begin{array}{l}\mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ \mathfrak{P}_2 \ni b_1, \cdots, b_m, \text{ und } b_1 \cdots b_m \neq 0\end{array}\right\} \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0.$

Beweis: Wäre vorläufig $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m = 0$, so wäre,

$$a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \rightarrow Ex,\ a_1 \cdots a_n x,\ b_1 \cdots b_m x.$$
$$\mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n \neq 0,\ a_1 \cdots a_n x \text{ —(Satz 64)}\rightarrow \mathfrak{P}_1 \ni x.$$
$$\mathfrak{P}_2 \ni b_1, \cdots, b_m, \text{ und } b_1 \cdots b_m \neq 0,\ b_1 \cdots b_m x \text{ —(Satz 64)}\rightarrow \mathfrak{P}_2 \ni x.$$
$$Ex,\ \mathfrak{P}_1 \ni x,\ \mathfrak{P}_2 \ni x \rightarrow W.$$
$$\therefore\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \rightarrow W.$$
$$\therefore\ a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \neq 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 68. $\mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, \mathfrak{P}_k \ni a_k \rightarrow a_1 \cdots a_k \neq 0.$

Beweis: Wäre vorläufig $a_1 \cdots a_k = 0$, so wäre,

$$a_1 \cdots a_k \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_k} \text{ oder } a_1 \cdots * \cdots a_k.$$
$$\therefore\ a_1 \cdots a_k \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_k} \text{ oder z. B. } a_1 \cdots a_{k-1}.$$
$$a_1 \cdots a_{k-1} \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_{k-1}} \text{ oder z. B. } a_1 \cdots a_{k-2}.$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$a_1a_2a_3 \rightarrow \overline{a_1a_2a_3} \text{ oder z. B. } \overline{a_1a_2}.$$
$$\therefore\ a_1 \cdots a_k \rightarrow \overline{a_1 \cdots a_k} \text{ od. z. B. } \overline{a_1 \cdots a_{k-1}} \text{ od. z.B. } \cdots \text{ od. z.B. } \overline{a_1a_2}.$$
$$\therefore\ a_1 \cdots a_k \rightarrow \text{z. B. } \overline{a_1 \cdots a_m},\ 2 \leqq m \leqq k.$$
$$\overline{a_1 \cdots a_m} \rightarrow Ez,\ \overline{a_1a_2z} \text{ oder } \overline{a_1a_2} \rightarrow a_1 \sim a_2.$$

$\therefore \quad a_1 \cdots a_k \to$ z. B. $a_1 \sim a_2$.

$\mathfrak{P}_1 \ni a_1, \mathfrak{P}_2 \ni a_2, a_1 \sim a_2 \to W.$

$\therefore \quad a_1 \cdots a_k \to W.$

$\therefore \quad a_1 \cdots a_k \neq 0,$ w. z. b. w.

Satz 69.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ \mathfrak{P}_2 \ni b_1, \cdots, b_m, \text{ und } b_1 \cdots b_m \neq 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \text{ und } l_1 \cdots l_s \neq 0 \end{array}\right\} \to a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \neq 0.$$

Beweis: Wäre vorläufig $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s = 0$, so wäre,

$a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \to Ea, \ a_1 \cdots a_n a, \ ab_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s.$

$\mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n$, und $a_1 \cdots a_n \neq 0, \ a_1 \cdots a_n a \xrightarrow{\text{(Satz 64)}} \mathfrak{P}_1 \ni a$.

$\therefore \quad a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \to Ea, \ \mathfrak{P}_1 \ni a, \ ab_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s.$

$ab_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \to Eb, \ \mathfrak{P}_2 \ni b, \ ab \cdots l_1 \cdots l_s.$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$ab \cdots l_1 \cdots l_s \to El, \ \mathfrak{P}_k \ni l, \ ab \cdots l.$

$$\therefore \quad a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \to \left\{\begin{array}{l} Ea, \ Eb, \ \cdots, \ El, \ ab \cdots l, \\ \mathfrak{P}_1 \ni a, \ \mathfrak{P}_2 \ni b, \ \cdots, \ \mathfrak{P}_k \ni l. \end{array}\right.$$

$\mathfrak{P}_1 \ni a, \ \mathfrak{P}_2 \ni b, \ \cdots, \ \mathfrak{P}_k \ni l \xrightarrow{\text{(Satz 68)}} ab \cdots l \neq 0.$

$ab \cdots l, \ ab \cdots l \neq 0 \to W.$

$\therefore \quad a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \to W.$

$\therefore \quad a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s \neq 0,$ w. z. b. w.

Zusatz.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \ \cdots, \ l_s, \\ a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s \end{array}\right\} \to a_1 \cdots a_n \text{ od. } \cdots \text{ od. } l_1 \cdots l_s.$$

Satz 70.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n x \neq 0, \\ \mathfrak{P}_2 \ni b_1, \cdots, b_m, \text{ und } b_1 \cdots b_m x \neq 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \text{ und } l_1 \cdots l_s x \neq 0 \end{array}\right\} \to a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s x \neq 0.$$

Beweis: Ist zum Beispiel $\mathfrak{P}_1 \ni x$, so ergibt sich,

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, x, \text{ und } a_1 \cdots a_n x \neq 0, \\ \mathfrak{P}_2 \ni b_1, \cdots, b_m, \text{ und } b_1 \cdots b_m \neq 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \text{ und } l_1 \cdots l_s \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 69) \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s x \neq 0.$$

Ist $\mathfrak{P}_i \not\ni x$, $(i = 1, \cdots, k)$, so ergibt sich,

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ \mathfrak{P}_2 \ni b_1, \cdots, b_m, \text{ und } b_1 \cdots b_m \neq 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \text{ und } l_1 \cdots l_s \neq 0, \\ \mathfrak{P} \ni x \quad\quad, \text{ und } x \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 69) \rightarrow a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m \cdots l_1 \cdots l_s x \neq 0,$$

w. z. b. w.

Zusatz 1. $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \\ a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s x \end{array}\right\} \rightarrow a_1 \cdots a_n x \text{ od. } \cdots \text{ od. } l_1 \cdots l_s x.$

Zusatz 2. $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \text{ und } l_1 \cdots l_s \neq 0, \\ a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s x \end{array}\right\} \rightarrow$

Es gilt genau eine der Aussagen

$$\left\{ a_1 \cdots a_n x, \cdots, \text{ und } l_1 \cdots l_s x \right\}.$$

Satz 71. $\mathfrak{P}_1 \geqq \mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{P}_k \geqq \mathfrak{R}_k \rightarrow \mathfrak{R}_1 * \cdots * \mathfrak{R}_k$.

Beweis: Seien die Basen von $\mathfrak{R}_1, \cdots$, und $\mathfrak{R}_k$ bzw. je $a_1 \cdots a_n, \cdots$, und $l_1 \cdots l_s$, so folgt,

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \text{ und } a_1 \cdots a_n \neq 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \text{ und } l_1 \cdots l_s \neq 0 \end{array}\right\} -(\text{Satz } 69) \rightarrow a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s \neq 0.$$

$\therefore$ Rang $\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s) =$ Rang $\mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) + \cdots +$ Rang $\mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s)$.

Einerseits folgt,

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mathfrak{P}_k \ni l_1, \cdots, l_s, \\ a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s x \end{array}\right\} -(\text{Zusatz 1 zum Satz } 70) \rightarrow a_1 \cdots a_n x \text{ od. } \cdots \text{ od. } l_1 \cdots l_s x.$$

$\therefore \quad \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s) \ni x \longrightarrow \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \ni x$ od. $\cdots$ od. $\mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s) \ni x$.

$\therefore \quad \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s) \leqq \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) + \cdots + \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s)$.

Anderseits folgt trivialerweise,

$$\mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s) \geqq \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) + \cdots + \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s).$$

$$\therefore \quad \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s) = \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) + \cdots + \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s).$$

$$\therefore \quad \mathfrak{R}(a_1 \cdots a_n \cdots l_1 \cdots l_s) = \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s).$$

$\therefore \quad \mathfrak{R}_1(a_1 \cdots a_n) * \cdots * \mathfrak{R}_k(l_1 \cdots l_s)$, w. z. b. w.

Zusatz. $\mathfrak{P}_1 \ni \mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{P}_k \ni \mathfrak{R}_k \longrightarrow$

$$\mathfrak{D}\left\{\mathfrak{V}(\mathfrak{R}_1 \cdots \mathfrak{R}_i),\ \mathfrak{V}(\mathfrak{R}_{i+1} \cdots \mathfrak{R}_k)\right\} = \mathfrak{R}, \quad 1 \leqq i \leqq k-1.$$

Satz 72. $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{R}) \overset{*}{+} \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{R}) \overset{*}{+} \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{R}) \overset{*}{+} \cdots$.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \cdots, \\ \mathfrak{V}_2 \geqq \mathfrak{R} \end{array}\right\} \longrightarrow \mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{R}) + \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{R}) + \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{R}) + \cdots.$$

Weiter ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{R})$, $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ ein linearer Raun nach Zusatz zum Satz 64.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \geqq \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{R}), \\ \mathfrak{P}_2 \geqq \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{R}), \\ \mathfrak{P}_3 \geqq \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{R}), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{array}\right\} -(\text{Satz } 71) \longrightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{R}) * \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{R}) * \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{R}) * \cdots.$$

Ferner ergibt sich,

$$\mathfrak{P}_i \geqq \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{R}),\ (i = 1, 2, 3, \cdots) -(\text{Satz } 65) \longrightarrow \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{R}).$$

Also ist,

$$\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{R}) \overset{*}{+} \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{R}) \overset{*}{+} \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{R}) \overset{*}{+} \cdots, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz 1. Für jeden linearen Primraum $\overline{\mathfrak{R}}$, gilt genau eine der Aussagen

$$\left\{\mathfrak{P}_1 \geqq \overline{\mathfrak{R}},\ \mathfrak{P}_2 \geqq \overline{\mathfrak{R}},\ \mathfrak{P}_3 \geqq \overline{\mathfrak{R}},\ \cdots\right\}.$$

Zusatz 2. Für jeden linearen Primzyklus $\overline{a_1 \cdots a_{n+1}}$, gilt genau eine der Aussagen

$$\left\{\mathfrak{P}_1 \ni a_1, \cdots, a_{n+1}, \text{ und } \mathfrak{P}_2 \ni a_1, \cdots, a_{n+1}, \text{ und } \mathfrak{P}_3 \ni a_1, \cdots, a_{n+1}, \text{ und } \cdots\right\}.$$

Satz 73. Eine beliebige Summenmenge der linearen Räume bzw. Primverknüpfungsräume von $\mathfrak{B}_2$ ist auch ein $\mathfrak{B}_2$-Raum.

Beweis: Der Beweis ist klar, weil die Grundannahme, sowie die Axiome 1*, 2, 3, 4, 5 in unserer Definition von $\mathfrak{B}_2$-Raums erfüllt sind.

Bemerkungen zum Schluss.

Es bleibt noch zu zeigen, dass wenn ferner die Endlichkeit des Ranges als Axiom zugefügt wird, so reduziert sich unser Primverknüpfungsraum zu einem projektiven Raum von endlicher Dimension, welcher auf Grund des Verknüpfungs- und des Dimensionsaxiom(16) aufgebaut wird. Dabei zerlegt sich also der $\mathfrak{B}_2$-Raum in die endliche direkte Summe von projektiven Räumen von endlicher Dimension.

---

(16) Z. B. vgl. Veblen-Young: Projective Geometry!